Πέμπτη 14 Νοεμβρίου 2013

Α. Τερτίκας

<u>ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>

(Φυλλάδιο 5)

1. Έστω $A : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^{n\times n}$ συνεχής και $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ σταθερός πίνακας. Ποιά ιδιότητα πρέπει να ικανοποιούν οι πίνακες $A(t)$, B ώστε η λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) - X(t)A(t), \;\; t > 0, \\ X(0) &= B, \end{aligned}$$

$$X : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^{n\times n}$$

να είναι ανεξάρτητη του χρόνου;

2. Έστω $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ συνεχής τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$A(t)A(s) = A(s)A(t), \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$A(t) \int_a^t A(s)\, ds = \int_a^t A(s)\, ds\, A(t), \quad t, a \in \mathbf{R}.$$

3. Δίνεται η αναδρομική ακολουθία $\mathbf{y}_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{m\times 1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}(t) &= \mathbf{c} + \int_0^t A(s)\, \mathbf{y}_n(s)\, ds, \;\; t \in \mathbf{R}, \\ \mathbf{y}_1(t) &= \mathbf{c}, \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

όπου $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{m\times m}$ συνεχής τέτοιος ώστε

$$A(t) \int_a^t A(s)\, ds = \int_a^t A(s)\, ds\, A(t), \quad t, a \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\mathbf{y}_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα κλειστά διαστήματα καθώς $n \to +\infty$. Ποιό είναι τό όριο αυτής;

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>