ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δευτέρα 25 Δεκεμβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 12 (Επαναληπτικό)

1. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= t^3(y^2(t)-1)+\sqrt{y(t)}, \quad t>0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.
γ) Αποδείξτε ότι η λύση δεν ορίζεται σε όλο το $[0,+\infty)$.

2. Να βρεθεί η λύση του συστήματος :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3x(t)+2y(t), \quad t\in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= -4x(t)+3y(t), \quad t\in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

και στη συνέχεια να γίνει ένα πρόχειρο διάγραμμα φάσεων.

3. Έστω $\sigma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Εαν επιπρόσθετα ισχύει:

$$\sigma'(t) \le 2t\,\sigma(t)+\sqrt{\sigma(t)}\,, \quad t>0,$$
$$\sigma(0)=0,$$

να αποδείξτε ότι

$$\sigma(t) \le 1/4 \left(e^{t^2/2} \int_0^t e^{-s^2/2}\,ds \right)^2, \quad t\ge 0.$$

4. Έστω $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ πίνακας που έχει ακριβώς μια πραγματική ιδιοτιμή την -1. Βρείτε τη λύση και το μεγιστικό διάστημα ύπαρξης της λύσης $X:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n\times n}$ του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} X'(t) &= X^2(t), \\ X(0) &= A. \end{aligned}$$

5. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= t^2(y^2(t)-1)+\sqrt{y(t)}, \quad t>0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.
γ) Αποδείξτε ότι η λύση δεν ορίζεται σε όλο το $[0,+\infty)$.

6. Να βρεθεί η λύση του συστήματος :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \quad t\in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= 2x(t)+3y(t), \quad t\in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

και στη συνέχεια να γίνει ένα πρόχειρο διάγραμμα φάσεων.

7. Έστω $\alpha>0, \beta>0$ και $y:[0,+\infty)\to \mathbf{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση η οποία είναι διαφορίσιμη στο $(0,+\infty)$. Εάν η y επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$-\beta t y(t) \geq y'(t) \geq -\alpha t y(t), \quad t>0,$$

$$y(0)=0.$$

Να αποδείξτε ότι

$$y(t)\equiv 0, \quad t\geq 0.$$

8. Έστω $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ πίνακας που έχει ακριβώς μια πραγματική ιδιοτιμή την -1. Βρείτε τη λύση και το μεγιστικό διάστημα ύπαρξης της λύσης $X:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n\times n}$ του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} X'(t) &= 2X^2(t), \\ X(0) &= A. \end{aligned}$$

9. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= t\sqrt{y(t)}+t^2+y^2(t), \quad t>0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης στο διάστημα ύπαρξής της.
γ) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.
δ) Αποδείξτε ότι η λύση δεν ορίζεται σε όλο το $[0,+\infty)$.

10. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t)+y(t), \quad t\in\mathbf{R}, \\ y'(t) &= 2y(t)+z(t), \quad t\in\mathbf{R} \\ z'(t) &= 2z(t), \quad t\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

11. α) Αποδείξτε ότι η λύση του συστήματος :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + x(t)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= -y(t) + 2y(t)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \\ z'(t) &= -z(t) + 3z(t)(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

με αρχική συνθήκη

$$x(0) = \frac{1}{3}, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad z(0) = \frac{1}{4}$$

ορίζεται για όλα τα $t > 0$ και μάλιστα ικανοποιεί

$$\lim_{t \to +\infty} (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) = 0.$$

β) Αποδείξτε ότι η λύση του προηγούμενου συστήματος με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}, \quad z(0) = \frac{2}{3}$$

δεν ορίζεται για όλα τα $t > 0$.

12. Έστω $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ πίνακας που έχει όλες τις ιδιοτιμές καθαρά μιγαδικές. Αποδείξτε ότι η λύση του Π.Α.Τ. $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} X'(t) &= X^2(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ X(0) &= A, \end{aligned}$$

ορίζεται για όλους τους χρόνους.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>