



Πέμπτη 12 Οκτωβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 3

1. Έστω $\delta > 0$, $L \in \mathbf{R} - \{0\}$ και $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί την συνθήκη

$$\sigma'(t) \leq \delta^2 + L\sigma(t), \quad t > 0.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sigma(t) \leq \left(\frac{\delta^2}{L} + \sigma(0)\right)e^{Lt} - \frac{\delta^2}{L}, \quad t > 0.$$

2. Έστω $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ και $g : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\sigma(t) \leq 1 + \int_0^t g(s)\sigma(s) ds, \quad \forall t > 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sigma(t) \leq e^{\int_0^t g(s) ds}, \quad \forall t \geq 0.$$

3. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= y^{1/3}(t) + t^2, \quad t > 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.

β) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης στο διάστημα ύπαρξής της.

γ) Αποδείξτε ότι οι λύσεις ορίζονται σε όλο το $[0, +\infty)$.

δ) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!