



Πέμπτη 26 Οκτωβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 5

1. Έστω $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί την

$$\sigma'(t) \leq 3\sigma(t) + 6\sigma^{\frac{2}{3}}(t), \quad t > 0.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sigma^{\frac{1}{3}}(t) \leq (\sigma^{\frac{1}{3}}(0) + 2)e^t - 2, \quad t \geq 0.$$

2. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $c \in \mathbf{R}$, εξετάστε το μονοσήμαντο των λύσεων του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y^{\frac{1}{3}}(t), \quad t > 0, \\ y(0) &= c. \end{aligned}$$

3. Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση, $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής με $\phi(t) > 0, \quad \forall t > 0$, και

$$\int_0^a \frac{dt}{\phi(t)} = +\infty, \quad \forall a > 0.$$

Η f είναι τέτοια ώστε $\forall [a, b] \times [m, M], \exists k > 0$ ώστε

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k \phi(|x - y|), \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x, y \in [m, M].$$

Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t > 0, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

στο μεγιστικό τους διάστημα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!