ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 16 Νοεμβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 8

1. Αποδείξτε ότι η λύση του Π.Α.Τ.

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= x(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right), \quad t > 0, \\
y'(t) &= y(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right), \quad t > 0 \\
&\quad x(0) = c_1, \quad y(0) = c_2
\end{aligned}
$$

ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$. Ειδικότερα αποδείξτε ότι αν $c_1^2 + 2c_2^2 > 0$, τότε

$$\lim_{t \to +\infty} \left(x^2(t) + 2y^2(t)\right) = 1.$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$\sigma(t) = x^2(t) + 2y^2(t), \quad t \geq 0,$$

και βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\sigma(t),\ t \geq 0$.

2. Έστω $A : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^{n\times n}$ συνεχής και $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ σταθερός πίνακας. Ποιά ιδιότητα πρέπει να ικανοποιούν οι πίνακες $A(t),\ B$ ώστε η λύση του Π.Α.Τ.

$$
\begin{aligned}
X'(t) &= A(t)X(t) - X(t)A(t), \quad t > 0, \\
X(0) &= B,
\end{aligned}
$$

$$X : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^{n\times n}$$

να είναι ανεξάρτητη του χρόνου;

3. Έστω $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ συνεχής τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$A(t)A(s) = A(s)A(t), \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

α) Αποδείξτε ότι

$$A(t) \int_0^s A(\sigma)\, d\sigma = \int_0^s A(\sigma)\, d\sigma\, A(t), \quad \forall\, t, s \in \mathbf{R}.$$

β) Εαν P, Q πολυώνυμα αποδείξτε ότι

$$P(A(t)) \cdot Q\left(\int_0^s A(\sigma)\, d\sigma\right) = Q\left(\int_0^s A(\sigma)\, d\sigma\right) \cdot P(A(t)), \quad \forall\, t, s \in \mathbf{R}.$$

γ) Εαν επιπρόσθετα ο $A(t),\ t \in \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμος, τότε θα ισχύει επίσης

$$A(t)A'(s) = A'(s)A(t), \quad \forall\ t, s \in \mathbf{R}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!