ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ακαδ. Ετος 2011 - 2012

Της φοιτήτριας:

ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ ΦΑΝΗ

Διδάσκων

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΤΕΡΤΙΚΑΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : [Μ.Δ.Ε.]

8ο εξάμηνο : Τερτίκας

14-02-2012

▶ **ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ:** (έχουμε να ασχοληθούμε με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, ενώ η παράγωγος με μια μεταβλητή).

• Αν η άγνωστη συνάρτηση, $u(x,y)$, μας δίνεται μια εξίσωση με στόχο να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση. □

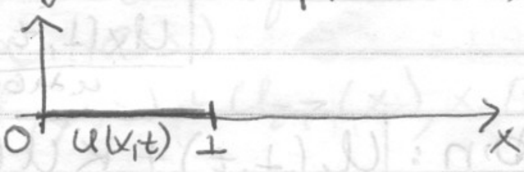
• Αρμονικές συναρτήσεις: $\boxed{u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0}$, $(x,y)\in\Omega$

$u_x(x,y) =: \frac{\partial}{\partial x}$, με $u_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x,y)}{h}$. □

• $f=f(t)$, $f'(t)=\frac{\partial}{\partial t}f(t)=\dot{f}(t)$. □

• Εξίσωση Θερμότητας (Θεωρία Fourier)
Μοντελοποίηση θερμότητας με μαθηματικά εργαλεία:
$\boxed{u_t(x,y)=u_{xx}(x,t)}$: εξίσωση διάδοσης θερμοκρασίας (εξίσωση θερμότητας).

x: χωρική μεταβλητή
t: χρονική μεταβλητή



με $u(x,t)$:= θερμοκρασία της ράβδου στη θέση x τη χρονική στιγμή t. □

• Θα ασχοληθούμε με ντετερμινιστική προσέγγιση για την επίλυση εξισώσεων. □

• Καλή τοποθέτηση του προβλήματος:
(i) Ύπαρξη λύσης στο μαθηματικό μοντέλο.
(ii) Μοναδικότητα της λύσης.
(iii) Συνεχής εξάρτηση των λύσεων από τις παραμέτρους του προβλήματος. [Συνθήκες Hadamard]. □

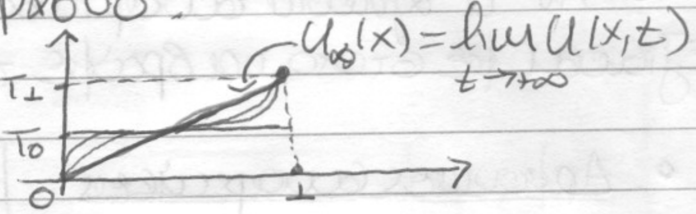
• Μελέτη του Μαθηματικού Μοντέλου:

Εξίσωση θερμότητας: $\boxed{u_t = u_{xx}}$

Εξίσωση κύματος (ή παλλόμενης χορδής): $\boxed{u_{tt} = u_{xx}}$

Εξίσωση Schrodinger: $iu_t = u_{xx}$. □

• Πείραμα: Θερμαίνω μια ράβδο.



$u_\infty(x) = T_1 x$

$u(x,0) = T_0$, $0 \le x \le 1$

$0 < T_0 < T_1$

$u(0,t) = 0$, $t \ge 0$

$u(1,t) = T_1$, $t \ge 0$

Μαθηματική προσέγγιση:

Παραβολική εξίσωση: $\boxed{u_t(x,t) = K u_{xx}(x,t)}$, $0 \le x < 1$, $t > 0, K > 0$

- Αρχικές συνθήκες (Α.Σ): $\boxed{u(x,0) = u_0(x)}$
- Συνοριακές συνθήκες (Σ.Σ) (Dirichlet): $\boxed{\begin{matrix} u(1,t) = h_2(t) \\ u(0,t) = h_1(t) \end{matrix}}$ τιμή της λύσης
- Σ.Σ Neumann: $\boxed{\begin{matrix} u_x(0,t) = h_1(t) \\ u_x(1,t) = h_2(t) \end{matrix}}$ κλίση της λύσης
- Σ.Σ Robin: $\boxed{\begin{matrix} u_x(1,t) + K u(1,t) = h_2(t) \\ u_x(0,t) + K u(0,t) = h_1(t) \end{matrix}}$.

- Ασυμπτωτικό πρόβλημα.

Για μεγάλους χρόνους: $\boxed{0 = K u_{xx}(x)}$, $0 < x < 1$

ελλειπτική εξίσωση

Α.Σ: $u(x,0) = u_0(x)$

Σ.Σ Dirichlet: $u(0,t) = 0$, $t \ge 0$

$u(1,t) = 1$, $t \ge 0$

$u(0) = 0$, $u(1) = 1$

κλασική λύση: $u(x,t)$: $D^{2,1}((0,1)\times(0,+\infty)) \cap \underbrace{C((0,1)\times[0,+\infty))}_{\text{για τις Α.Σ}} \cap \underbrace{C([0,1]\times[0,+\infty))}_{\text{για τις Σ.Σ}}$

$x \in \overset{\text{2 φορές παρ/μη}}{D^2(0,+\infty)} \cap \underbrace{C^1[0,+\infty)}_{\text{η παράγωγος συνεχής}}$. □

—o— □

21-02-2012

$\boxed{\text{Μ.Δ.Ε. 1ης Τάξης}}$

- F δοθείσα συνάρτηση.
$F(x, u(x), u_x(x), u_y(x), u_z(x)) = 0$

$\Rightarrow \boxed{F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0}$, με $\nabla u(x) = (u_x(x), u_y(x), u_z(x))$

Μ.δ.ε 1ης τάξης. □

> Μ.δ.ε 2ης τάξης (δεν θα ασχοληθούμε)
> - Πίνακας του Hess:
>
> $F(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) = 0$,
>
> με $D^2 u = (u_{x_i x_j}(x))_{i,j=1}^{n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\left(\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)\right)$
>
> $u_{x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$
>
> - Αν u δύο φορές παρ/μη με συνεχείς τις 2ες παραγώγους τότε: $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$.
> - $\nabla^2 u = \Delta u =$ (το άθροισμα της διαγωνίου του πίνακα του Hess)
>
> $= u_{xx}(x) + u_{yy}(x) + u_{zz}(x)$, $x = (x, y, z)$ □

- $\boxed{\text{Π.Χ.}}$ (η πιο απλή μ.δ.ε)

$u_x(x, y) = 0$, $x = (x, y)$

Ζητείται να βρεθεί $u: \Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω χωρίο $\subseteq \mathbb{R}^2$

συνεκτικό, ανοιχτό

$\forall x_0 \in \Omega$, $\exists \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \subset \Omega$. □

- Στην 1 μεταβλητή: $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

$f'(t) = 0$, $t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow f(t) = f(t_0)$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

Από Θ.Μ.Τ: $\exists \xi \in (t, t_0)$ τ.ω.

$f(t) - f(t_0) = (t - t_0) f'(\xi)$. □

• <u>Πρόταση</u>: Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω ανοικτό, συνεκτικό κ $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι παρ/μη ως προς την 1η μεταβλητή κ $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Τότε:

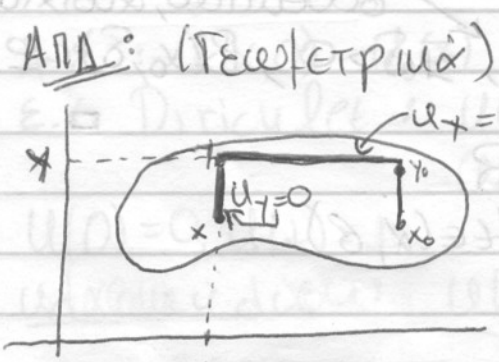
$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) \quad , \forall (x_0, y_0) \in \Omega$$

<u>ΑΠΔ</u>:
$\exists \xi \in [x, x_0] \times \{y_0\} \subset \Omega$
$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} u(\xi, y_0) = 0$$
$$\Rightarrow u(x, y_0) = u(x_0, y_0). \ \square$$

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό, $\boxed{u_x(x,y) = 0}$, $(x,y) \in \Omega$, η u παρ/μη ως προς την 1η μεταβλητή.
Αν $(x_0, y) \in \Omega$ κ x τ.ω. $[x, x_0] \times \{y\} \in \Omega$, αν $x < x_0$ ή $[x_0, x] \times \{y\} \subset \Omega$, αν $x_0 < x$.
Τότε $\boxed{u(x,y) = u(x_0, y)}$. $\square$

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό, συνεκτικό κ $u : \Omega \to \mathbb{R}$ παρ/μη κ $\nabla u(x,y) = 0 \Leftrightarrow u_x(x,y) = 0$ κ $u_y(x,y) = 0$.
Τότε αν $(x_0, y_0) \in \Omega$, θα ισχύει:
$$u(x,y) = u(x_0, y_0) \quad , \forall (x,y) \in \Omega.$$
Δηλ. $\left.\begin{array}{l} u_x(x,y) = 0 \\ u_y(x,y) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{u(x,y) = u(x_0, y_0)}, \forall (x,y) \in \Omega$. $\square$

<u>ΑΠΔ</u>: (Γεωμετρικά)



Χρησιμοποιώ το γεγονός ότι αν Ω ανοιχτό, συνεκτικό, τότε για κάθε 2 σημεία του, υπάρχει πολυγωνική γραμμή με πλευρές παράλληλες των αξόνων, η οποία ενώνει τα δύο σημεία.

$\square$

- Έστω Ω, $(x,y)\in\Omega : (x_0,y)\in\Omega \Rightarrow [x,x_0]\times\{y\}\subset\Omega$

$\boxed{u_x(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y)=f(y)}$. □

- $\boxed{\text{Π.χ.:}}$ $\Omega=\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y)=u(0,y)=f(y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. □

- $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$: (Σε μια μεταβλητή)

$f'(t)+f(t)=0 \Rightarrow (e^t f(t))'=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x u(x,y))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x u_x(x,y)+e^x u(x,y)=0,\ y\in\mathbb{R},\ x>0 \\ e(0,y)=f(y),\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right]$$

Από Θ.Μ.Τ:

$$e^x u(x,y)-e^0 u(0,y)=(x-0)\frac{\partial}{\partial x}[e^{\xi}u(\xi,y)]=0$$

$\Rightarrow e^x u(x,y)-e^0 u(0,y)=0 \Rightarrow e^x u(x,y)=u(0,y)$

$\Rightarrow u(x,y)=e^{-x}f(y),\ x\geq 0,\ y\in\mathbb{R}$. □

- $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$: Έστω $u:\mathbb{R}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, παρ/μη στο $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$.

Βρείτε την u για την οποία:

$u_x(x,y)+u_y(x,y)=0,\ y\in\mathbb{R},\ x>0$

$u(x,0)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$, f δοθείσα ομαλή συνάρτηση

Λύση:

Ξέρω ότι, η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι:

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x+tn)-u(x)}{t}=\frac{\partial u}{\partial n}(x)=\nabla(u(x))\cdot\vec{n}.$$

Επιλέγω διάνυσμα $\vec{n}=(1,1)$.

$$u_x+u_y=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(x)=0. \ \square$$

$\boxed{23-02-2012}$

- $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$ αρχικών τιμών:

$u_t(x,t) \mp u_x(x,t) = 0$

$u_t(x,t)=0$, $x,t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow u(x,t)=u(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$

Από ΘΜΤ: $\exists\, \xi\in(t,0)$: $u(x,t)-u(x,0)=(t-0)\,u_t(x,\xi)=0$ κ

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=0$ κ $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0 \Rightarrow u(x,t)=u(0,t)$ □

- Λύση της: $\boxed{u_t+u_x=0}$

– $\boxed{1^{ος}\ \text{τρόπος}}$: Κατά κατεύθυνση παράγωγος

$u(x_0,t_0)$, $v=(\alpha,\beta)$, $|v|=1$

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0,t_0)=\lim_{s\to 0}\frac{u(x_0+s\alpha,\,t_0+s\beta)-u(x_0,t_0)}{s}=\nabla u(x_0,t_0)\cdot\vec{v}$$

κατά κατεύθυνση παράγωγος του u στην κατεύθυνση του $\vec{v}$ στο (x_0,t_0).

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι ίση με το μηδέν, όταν:

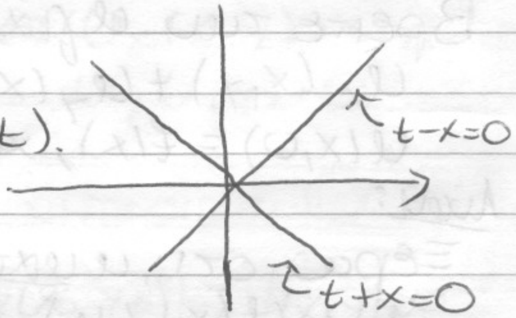
$u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial v}(x,t)=\nabla u(x,t)\,v}=\big(u_x(x,t),u_t(x,t)\big)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_x(x,t)+u_t(x,t)\big)=0$$

$\Rightarrow u(x,t)=f(x+t)$.

Άρα $u_t+u_x=0 \Rightarrow u(x,t)=f(x+t)$.



– $\boxed{2^{ος}\ \text{τρόπος}}$: Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Εισάγουμε: $\xi=x-t$
$\eta=x+t$

Θέτω: $u(x,t)=u(\xi,\eta)$

Κανόνας της αλυσίδας: $u_t(x,t)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=u_\xi(\xi,\eta)+u_\eta(\xi,\eta)$

κ $u_x(x,t)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-u_\xi(\xi,\eta)+u_\eta(\xi,\eta)$.

Άρα, έχω:

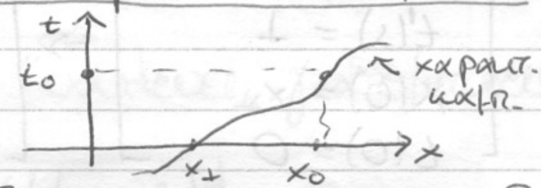
$$u_t + u_x = 0 \Leftrightarrow u_\xi + u_\eta - u_\xi + u_\eta = 0 \Leftrightarrow 2u_\eta(\xi,\eta)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)=0 \Leftrightarrow u(\xi,\eta)=u(\xi,0)=f(\xi)=u(x,t) = f(t-x)$$

Άρα, $u_t+u_x=0 \Rightarrow u(x,t)=f(t-x)$.

- $\boxed{3^{ος}\ \text{τρόπος}}$: <u>Μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών</u>

<u>Στόχος</u>: $(x(s),t(s)) = (x_0,t_0)$
$(x(0),t(0)) = (x_1, 0)$



Γενικά, καμπύλη στο επίπεδο $(x(s),t(s))$, $s\in\mathbb{R}$, s παραμ.

Ο προσδιορισμός της καμπύλης θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να παραγωγίσουμε την λύση κατά μήκος της χαρ. καμπύλης τότε ο υπολογισμός θα είναι τέτοιος ώστε να μηδενίζει τη Δ.Ε: $x'(s)=\frac{dx}{ds}$, $t'(s)=\frac{\partial t}{\partial s}$.

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(u(x(s),t(s))\big) = u_x(x(s),t(s))\cdot x'(s) + u_t(x(s),t(s))\cdot t'(s)$$

$$\begin{bmatrix} x'(s)=1,\ s\in\mathbb{R} \\ t'(s)=1,\ s\in\mathbb{R} \\ x(0)=x_1 \\ t(0)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s)=s+x(0) \\ t(s)=s+t(0) \\ x(0)=x_1 \\ t(0)=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s)=s+x_1 \\ t(s)=s \end{bmatrix}$$

Τότε, όμως: $\frac{\partial}{\partial s}u(x(s),t(s)) = u_x\cdot 1 + u_t \cdot 1 = 0,\ s>0$

$$u(x(s),t(s)) = u(x(0),t(0))$$
$$u(s+x_1,s) = u(x_1,0) = f(x_1)$$

$$\begin{bmatrix} x(s)=x_0 \\ t(s)=t_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s+x_1=x_0 \\ s=t_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1=x_0-t_0 \\ s=t_0 \end{bmatrix}$$

Άρα $u(s+x_1,s) = u(x_0,t_0) = u(x_1,0) = f(x_1) = f(x_0-t_0)$

Δηλ. $u(x,t) = f(x-t) \Leftarrow u_t+u_x=0$. □

• $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$ Αρχικών Τιμών

$u_t(x,t) + 2x u_x(x,t) = x + u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

$u(x,0) = 1 + x^2$

Θα χρησιμοποιήσω την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπ.

$u(x(s), t(s))$

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x\, x(s) + u_t\, t(s).$$

$$\begin{bmatrix} x'(s) = 2x(s) \\ t'(s) = 1 \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'(s) - 2x(s) = 0 \Rightarrow e^{-2s} x'(s) - 2e^{-2s} x(s) = 0 \\ t(s) = s + t(0) \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{ds}(e^{-2s} x(s)) = 0 \\ x(0) = x_1 \\ t(s) = s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-2s} x(s) = e^{-2\cdot 0} x(0) = x_1 \\ t(s) = s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) = x_1 e^{2s} \\ t(s) = s \end{bmatrix}$$

Τότε: $u'(x(s), t(s)) = u_x \cdot x' + u_t \cdot t'$

$$= 2x\, u_x + u_t = x(s) + u(x(s), t(s)).$$

$6(s) = u(x(s), t(s)) = (x_1 e^{2s}, s)$

$$\left.\begin{matrix} 6'(s) = x_1 e^{2s} + 6(s) \\ 6(0) = u(x,0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6'(s) - 6(s) = x_1 e^{2s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} e^{-s} 6'(s) - e^{-s} 6(s) = x_1 e^{2s} e^{-s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} (e^{-s} 6(s))' = x_1 e^{s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} (e^{-s} 6(s) - x_1 e^{s})' = 0 \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} e^{-s} 6(s) - x_1 e^{s} = e^{0} 6(0) - x_1 e^{0} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$e^{-s} 6(s) - x_1 e^{s} = 1 + x_1^2 - x_1 \Rightarrow 6(s) = x_1 e^{2s} + (1 - x_1 + x_1^2) e^{s}$$

Άρα, $u(x_1 e^{2s}, s) = x_1 e^{s} + (1 - x_1 + x_1^2) e^{s}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x_1 e^{s} \\ t_0 = s \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_0 e^{-2t_0} \\ s = t_0 \end{array}$$

Άρα, $u(x_0, t_0) = x_0 e^{-2t_0} e^{2t_0} + (1 - x_0 e^{2t_0} + x_0^2 e^{-4t_0}) e^{t_0} \Rightarrow$

$u(x_0, t_0) = x_0 + e^{t_0}(1 - x_0 e^{-2t_0} + x_0^2 e^{-4t_0})$.

Άρα, η λύση είναι:

$u(x,t) = x + e^{t}(1 - x e^{-2t} + x^2 e^{-4t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. □

• Η <u>Μέθοδος των χαρακτηριστικών</u> "δουλεύει" για εξισώσεις της μορφής:

$$\boxed{\alpha(t,x,u)\,u_x + \beta(t,x,u)\,u_t = \gamma(t,x,u)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t,x,u,u_x,u_t) = 0.}$$ □

• $\boxed{\text{Π.Χ.:}}$ Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t + u_x = \frac{2x}{1+(x-t)^2}\,u^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

$$u(x,0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θα την λύσω με την μέθοδο των χαρακτ. καμπ.

Η χαρακτ. καμπ: $(x(s), t(s))$ με $\frac{\partial}{\partial x} u(x(s),t(s)) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$

Στόχος: $(x(s), t(s)) = (x_0, t_0)$

$(x(0), t(0)) = (x_1, 0)$

Προσδιορίζω την καμπύλη, ώστε να έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x'(s) = 1 \\ t'(s) = 1 \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) = s + x(0) \\ t(s) = s + t(0) \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) = s + x_1 \\ t(s) = s \end{bmatrix}$$

$\sigma(s) = u(x(s), t(s)) = u(s + x_1, s)$

$\sigma'(s) = u_x + u_t = \frac{2x(s)}{1 + (x(s) - t(s))^2}\,\sigma^2(s), \quad s > 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma'(s) = \frac{2(s + x_1)}{1 + (s + x_1 - s)^2}\,\sigma^2(s), \quad s > 0 \\ \sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_1, 0) = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} G'(s) = \dfrac{2(s+x_1)}{1+x_1^2}\, G^2(s) \\ G(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{G'(s)}{G^2(s)} = \dfrac{2(s+x_1)}{1+x_1^2} \\ G(0) = 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\text{ολοκλ.}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{G(s)} = \displaystyle\int \dfrac{2s}{1+x_1^2}\, ds + \int \dfrac{2x_1}{1+x_1^2}\, ds \\ G(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{G(s)} = \dfrac{s^2}{1+x_1^2} + \dfrac{2x_1 s}{1+x_1^2} + c_1 \\ G(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} G(s) = -\dfrac{1}{\dfrac{s^2}{1+x_1^2} + \dfrac{2x_1 s}{1+x_1^2} + c_1} \\ G(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 = -\dfrac{1}{c_1} \\ \Rightarrow c_1 = -1 \\ G(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G(s) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{s^2}{1+x_1^2} - \dfrac{2x_1 s}{1+x_1^2}} \\ G(0) = 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{1 - \dfrac{s^2}{1+x_1^2} - \dfrac{2x_1 s}{1+x_1^2}}, \quad G(0) = 1$$

Οπότε $G(s) = u(x(s), t(s)) = u(s+x_1, s) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{s^2}{1+x_1^2} - \dfrac{2x_1 s}{1+x_1^2}}$

με $\left.\begin{array}{l} s+x_1 = x \\ s = t \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x-t \\ s = t \end{array}$.

Αντικαθιστώ κ έχω:

$$u(x,t) = \frac{1}{1 - \dfrac{t^2}{1+(x-t)^2} - \dfrac{2(x-t)t}{1+(x-t)^2}} = \frac{1}{\dfrac{1+(x-t)^2 - t^2 - 2t(x-t)}{1+(x-t)^2}}$$

$$= \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2+t^2-2xt-t^2-2tx+2t^2} = \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2-4tx-2t^2}$$

$$= \frac{1+(x-t)^2}{1+x^2-2\cdot 2tx+(2t)^2-(2t)^2+2t^2} = \frac{1+(x-t)^2}{1+(x-2t)^2-2t^2},$$

$x\in\mathbb{R},\ 0\leq t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

διοτι $(x-2t)^2=2t-1$
$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

□

01-03-2012

Ταξινόμηση

- $\boxed{AU_{xx}+2BU_{xy}+\Gamma U_{yy}+\Delta U_x+EU_y+ZU=H}$

$\xi=\xi(x,y)$
$\eta=\eta(x,y)$
$U(x,y)=\bar{U}(\xi,\eta)$

Κανονική μορφή (μόνο τοπικά):

(I) Ελλειπτικού Τύπου:

Αν $\Delta=(2B)^2-4A\Gamma=4(B^2-A\Gamma)<0$, τότε:

$$\boxed{\bar{U}_{\xi\xi}+\bar{U}_{\eta\eta}+A_1\bar{U}_\xi+A_2\bar{U}_\eta+A_3\bar{U}=A_4.}$$

(II) Υπερβολικού Τύπου:

Αν $\Delta=4(B^2-A\Gamma)>0$, τότε:

$$\bar{U}_{\xi\xi}-\bar{U}_{\eta\eta}+B_1\bar{U}_\xi+B_2\bar{U}_\eta+B_3\bar{U}=B_4 \iff$$

$$\boxed{\bar{U}_{\xi\eta}+B_1\bar{U}_\xi+B_2\bar{U}_\eta+B_3\bar{U}=B_4}$$

(III) Παραβολικού Τύπου:

Αν $\Delta=4(B^2-A\Gamma)=0$, τότε:

$$\boxed{\bar{U}_{\xi\xi}+\Gamma_1\bar{U}_\xi+\Gamma_2\bar{U}_\eta+\Gamma_3\bar{U}=\Gamma_4}.\ \square$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1ο

• $\boxed{\text{Άσκ. 1}}$: Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παρ/μη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(t)\le f(t)$, $t>0$
$f(0)=0$.

Δ.ο. $f(t)\le 0$, $t\ge 0$.

Λύση:

$$f'(t)\le f(t),\ t>0 \iff e^{-t}f'(t)\le e^{-t}f(t),\ t>0$$
$$\iff e^{-t}f'(t)-e^{-t}f(t)\le 0,\ t>0$$
$$\iff \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}f(t)\right)\le 0,\ t>0$$

Δηλ. η συνάρτηση $t\longmapsto e^{-t}f(t)$ είναι φθίνουσα, οπότε:

$$e^{-t}f(t)\le e^{-0}f(0)=0 \Rightarrow e^{-t}f(t)\le 0,\ t>0$$

Η $e^{-t}>0$ $\forall t>0$.

Άρα, $f(t)\le 0$, $t\ge 0$ □

• $\boxed{\text{Άσκ. 2.}}$: Βρες όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση, $\phi(x,y)=e^x f(y)$, λύνει την δ.ε,

$$\phi_{xx}(x,y)+\phi_{yy}(x,y)=\phi(x,y),\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Λύση:

$$\phi(x,y)=e^x f(y)$$
$$\phi_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x f(y)\right)=e^x f(y)=\phi_{xx}(x,y)$$
$$\phi_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x f(y)\right)=e^x f'(y)$$
$$\phi_{yy}(x,y)=e^x f''(y).$$

Αντικαθιστώ στην δ.ε:

$$e^x f(y)+e^x f''(y)=e^x f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow e^x f''(y)=0,\ y\in\mathbb{R} \Rightarrow f''(y)=0,\ y\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow f''(y) = c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(y) = c_1 y + c_2 \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}$

Άρα, οι ζητούμενες λύσεις είναι της μορφής:
$$\phi(x,y) = e^x (c_1 y + c_2) \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \ \square$$

- $\boxed{\text{Άσκ. 3}}$: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 2 \ , \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$
$$u(x,0) = x^2, \ x \in \mathbb{R}$$

<u>Λύση</u>: Θα χρησιμοποιήσω την μέθοδο χαρακτ. καμπυλών:

Στόχος $(x(s), t(s)) = (x_0, t_0)$
$(x(0), t(0)) = (x_1, 0)$

$u(x(s), t(s))$ με $\frac{\partial}{\partial s} u(x(s), t(s)) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$

Προσδιορίζω την καμπύλη:

$$\begin{bmatrix} x'(s) = 1 \\ t'(s) = 1 \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s) = s + x(0) \\ t(s) = s + t(0) \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s) = s + x_1 \\ t(s) = s \end{bmatrix}, \ s \geq 0$$

Θέτω $\sigma(s) = u(x(s), t(s)) = u(s + x_1, s) \ , \ s > 0$

Τότε, $\sigma'(s) = u_x + u_t = 2$
$\sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_1, 0) = x_1^2$

Άρα, $\sigma'(s) = 2 \Rightarrow \sigma(s) = 2s + c_1$ κ $\sigma(0) = x_1^2$

Δηλ. $x_1^2 = c_1$, οπότε $\sigma(s) = 2s + x_1^2, \ s \geq 0$.

με $\begin{bmatrix} s + x_1 = x \\ s = t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = x - t \\ s = t \end{bmatrix}$

Τότε:
$$u(s + x_1, s) = u(x(s), t(s)) = 2t + (x-t)^2$$

Άρα $u(x,t) = 2t + (x-t)^2 \ , \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0$

$\square$

• $\boxed{\text{Άσκ. 4}}$: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t(x,t)+u_x(x,t)=u^2(x,t)\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ t>0$$
$$u(x,0)=1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσω την μέθοδο των χαρακτ. καμπ: καμπύλη $u(x(s),t(s))$ με $\frac{\partial}{\partial s}(u(x(s),t(s)))=u_x x'(s)+u_t t'(s)$.

Στόχος: $(x(s),t(s))=(x,t)$
$(x(0),t(0))=(x_1,0)$

Προσδιορίζω την καμπύλη:

$$\begin{bmatrix} x'(s)=1 \\ t'(s)=1 \\ x(0)=x_1 \\ t(0)=0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x(s)=s+x(0) \\ t(s)=s+t(0) \\ x(0)=x_1 \\ t(0)=0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x(s)=s+x_1 \\ t(s)=s \end{bmatrix},\ s\geq 0$$

Θέτω, $\sigma(s)=u(x(s),t(s))=u(s+x_1,s)\quad s\geq 0$

$$\sigma'(s)=u_x+u_t=\sigma^2(s)\ \Rightarrow\ \sigma'(s)=\sigma^2(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)}=1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right)=\frac{\partial}{\partial s}(s)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma(s)}=s+c \Rightarrow \sigma(s)=-\frac{1}{s+c},$$

$$\sigma(0)=1:\ 1=-\frac{1}{c}\Rightarrow c=-1$$

Άρα, $\sigma(s)=-\frac{1}{s-1}$, με $\left.\begin{matrix} x_1+s=x \\ s=t \end{matrix}\right]\Rightarrow \begin{matrix} x_1=x-t \\ s=t \end{matrix}$

Άρα, $u(x,t)=-\frac{1}{t-1}$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{1-t},\quad t<1.\ \square$$

$\square$

ΤΕΛΟΣ ΦΥΛ.

• $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$: Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος:

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

Έστω $u(x,y) = v(\xi, \eta)$, με $\xi = \xi(x,y)$
$\eta = \eta(x,y)$

$$u_x(x,y) = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{και}$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x\right) = v_\xi \xi_{xy} + \xi_x\left(v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y\right)$$
$$+ v_\eta \eta_{xy} + \eta_x\left(v_{\eta\xi}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y\right)$$

Επειδή έχω σταθερούς συντελεστές, έχω το γραμμικό σύστ:

$$\xi = \alpha x + \beta y$$
$$\eta = \gamma x + \delta y$$

Άρα, $u_x = \alpha v_\xi + \gamma v_\eta$ και $u_y = \beta v_\xi + \delta v_\eta$.

Οπότε, πιο απλά,

$$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha v_\xi + \gamma v_\eta\right)$$
$$= \alpha\left(v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \gamma\left(v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$
$$= \alpha\beta v_{\xi\xi} + \alpha\delta v_{\xi\eta} + \gamma\delta v_{\eta\eta} + \gamma\beta v_{\eta\xi}$$
$$= \alpha\beta v_{\xi\xi} + \gamma\delta v_{\eta\eta} + (\alpha\delta + \gamma\beta)v_{\eta\xi}$$

$$u_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha v_\xi + \gamma v_\eta\right) = \alpha\left(v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \gamma\left(v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$
$$= \alpha^2 v_{\xi\xi} + \alpha\gamma v_{\xi\eta} + \gamma^2 v_{\eta\eta} + \gamma\alpha v_{\eta\xi}$$
$$= \alpha^2 v_{\xi\xi} + \gamma^2 v_{\eta\eta} + 2\alpha\gamma v_{\eta\xi}$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_\xi + \delta v_\eta)$$

$$= \beta\left(v_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + v_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \delta\left(v_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + v_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$$

$$= \beta^2 v_{\xi\xi} + 2\beta\delta v_{\xi\eta} + \delta^2 v_{\eta\eta}$$

Αντικαθιστώ,

$$4(\alpha^2 v_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma v_{\xi\eta} + \gamma^2 v_{\eta\eta}) - 12(\alpha\beta v_{\xi\xi} + \gamma\delta v_{\eta\eta} + (\alpha\delta+\beta\gamma)v_{\xi\eta})$$
$$+ 9(\beta^2 v_{\xi\xi} + 2\beta\delta v_{\xi\eta} + \delta^2 v_{\eta\eta}) + (\beta v_\xi + \delta v_\eta) = 0$$

$$\Rightarrow (4\alpha^2 + 9\beta^2 - 12\alpha\beta)v_{\xi\xi} + (8\alpha\gamma + 18\beta\delta - 12(\alpha\delta+\beta\gamma))v_{\xi\eta}$$
$$+ (4\gamma^2+9\delta^2-12\gamma\delta)v_{\eta\eta} + \beta v_\xi + \delta v_\eta = 0$$

$\Delta = 4(6^2 - 4\cdot 9) = 0$, άρα είναι Παραβολικού Τύπου

Πρέπει: $4\gamma^2+9\delta^2-12\gamma\delta = 0 \Rightarrow (2\gamma-3\delta)^2 = 0$

$\Rightarrow 2\gamma = 3\delta \Rightarrow \gamma = \frac{3}{2}\delta$ (ή $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \gamma=3,\ \delta=2$)

κ, επίσης,

$8\alpha\gamma + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - 12\beta\gamma = 0$

$\Rightarrow 4\cancel{8}\frac{3}{\cancel{2}}\alpha\delta + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - \cancel{12}^{6}\beta\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\delta = 0$

$\Rightarrow 12\alpha\delta + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - 18\beta\delta = 0 \Rightarrow 0=0$ ισχύει.

Άρα, έχω: $(4\alpha^2+9\beta^2-12\alpha\beta)v_{\xi\xi} + \beta v_\xi + \delta v_\eta = 0$

Για να απλοποιήσω την δ.ε., έστω $\beta=0$:

Δηλ. $4\alpha^2 v_{\xi\xi} + \delta v_\eta = 0$

Επιλέγω, $\alpha=1$ κ $\delta=-4$ (αυθαίρετα, για ευκολία, για να έρθει στην μορφή $u_t = u_{xx}$)

Άρα, $v_{\xi\xi} = v_\eta$ ← παραβολική εξίσωση. □

—•—

□

$\boxed{\text{ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ}}$ (Εξίσωση Υπερβολικού Τύπου)

- $\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}} \Rightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$
  κυματική εξίσωση

Στο καινούργιο σύστημα (με τις χαρακ. καμπ.):

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad \text{κ} \quad v(\xi,\eta) = \boxed{u(x,t) = f(x-ct) + \phi(x+ct)}$$

όπου f, ϕ αυθαίρετες συναρτήσεις.

ΑΠΔ:

$\Delta = 4c^2 > 0$, εξ. υπερβολικού τύπου.

Θα την λύσω με την μέθοδο των χαρακτηριστικών:

$\xi = x - ct$

$\eta = x + ct$

$u(x,t) = v(\xi,\eta)$

$$u_t(x,t) = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c v_\xi + c v_\eta = c(v_\eta - v_\xi)$$

$$u_{tt}(x,t) = c\frac{\partial}{\partial t}(-v_\xi + v_\eta)$$

$$= c\left(-v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} - v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)$$

$$= c(c v_{\xi\xi} - c v_{\eta\xi} + c v_{\eta\eta} - c v_{\eta\xi})$$

$$= c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta})$$

$$u_x(x,t) = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(v_\xi + v_\eta) = \left(v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε.:

$$c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}) - c^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = 0$$

$$\Rightarrow -4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U_{\xi}(\xi,\eta)\right)=0 \Rightarrow U_{\xi}(\xi,\eta)=f(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi,\eta)\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_0^{\xi} f(t)\,dt\right)=F'(\xi)$$

$$\Rightarrow U(\xi,\eta)-F(\xi)=\phi(\eta)$$

Άρα, $U(\xi,\eta)=F(\xi)+\phi(\eta)$

Δηλαδή, $U(\xi,\eta)=u(x,t)=F(x-ct)+\phi(x+ct)$,
όπου F,ϕ ομαλές τυχαίες συναρτ. □

• <u>Άσκηση</u>: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κ $f(x+t)+g(x-t)$ παρ/μη ως προς x κ ως προς t.
Δ.Ο. f,g παρ/μες.
<u>ΑΠΔ</u>:
Έστω $h(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$ παρ/μη.
Δηλαδή, υπάρχει το όριο κ είναι αριθμός:
$h'(x_0,t_0)=$

$$=\lim_{l\to 0}\frac{h(x+lt)-h(x)}{l}=\frac{f(x+tl)+g(x+tl)-f(x)-g(x)}{l}$$

$$=\frac{f(x+tl)-f(x)}{l}+\frac{g(x+tl)-g(x)}{l}=f'(x_0,t_0)+g'(x_0,t_0)$$

Άρα f,g παρ/μες. □

• $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$:
$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0)=g(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

<u>Λύση</u>:

Η λύση έχει την μορφή:
$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$

[Αν $F+G$ δυο φορές παρ/μη $\Rightarrow F,G$ δυο φορές παρ/μες]

Ο προσδιορισμός των F,G θα γίνει ώστε το πρόβλημα να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Πρέπει: $u \in D^{2,2}(\mathbb{R}\times(0,+\infty)) \cap C^{1}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$
(Δηλ. οι F, G να είναι 2 φορές παρ/μες, με το $x\in\mathbb{R}$ κ το $t>0$, κ να έχουν συνεχή την πρώτη παράγωγο, με το $x\in\mathbb{R}$ κ το $t\geq 0$).

Αφού η $u \in C^{0}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, πρέπει:

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u(x,0) \iff$$

$$\lim_{t\to 0^+} \left(F(x-ct)+G(x+ct) \right) = f(x)$$

Άρα, $F(x)+G(x) = f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

$$u_t(x,t) = -cF'(x-ct) + cG'(x+ct), \quad t>0$$

Αφού η $u\in C^{1}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, πρέπει:

$$\lim_{t\to 0^+} u_t(x,t) = u_t(x,0) = g(x) \iff$$

$$-cF'(x)+cG'(x) = g(x), \ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, έχω το σύστημα:

$$F(x)+G(x) = f(x), \ x\in\mathbb{R}$$

$$-cF'(x)+cG'(x) = g(x), \ x\in\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-cF(x)+cG(x)\right) = g(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x g(\xi)\,d\xi \ ; \ g\in C^{0}(\mathbb{R})$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial x}\left(-cF(x)+cG(x)-\int_0^x g(\xi)\,d\xi\right) = 0$$

$$\Rightarrow -cF(x)+cG(x)-\int_0^x g(s)\,ds = K$$

$$\Rightarrow -F(x)+G(x)-\frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds = \frac{K}{c} \quad \text{και} \quad F(x)+G(x) = f(x),$$

προσθέτω κατά μέλη: $G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + \frac{K}{2c}$, $x\in\mathbb{R}$

κ $F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - \frac{K}{2c}$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, $u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - \frac{K}{2c} + \frac{1}{2} f(x+ct)$

$+ \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{K}{2c}$

$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,$

με $f \in D^2(\mathbb{R})$ κ $g \in D^1(\mathbb{R})$. □

06-03-2012

- Συνοπτικά: Κυματική εξίσωση + λύση της.

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad x\in\mathbb{R} \\ &u_t(x,0) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}\right] \circledast$$

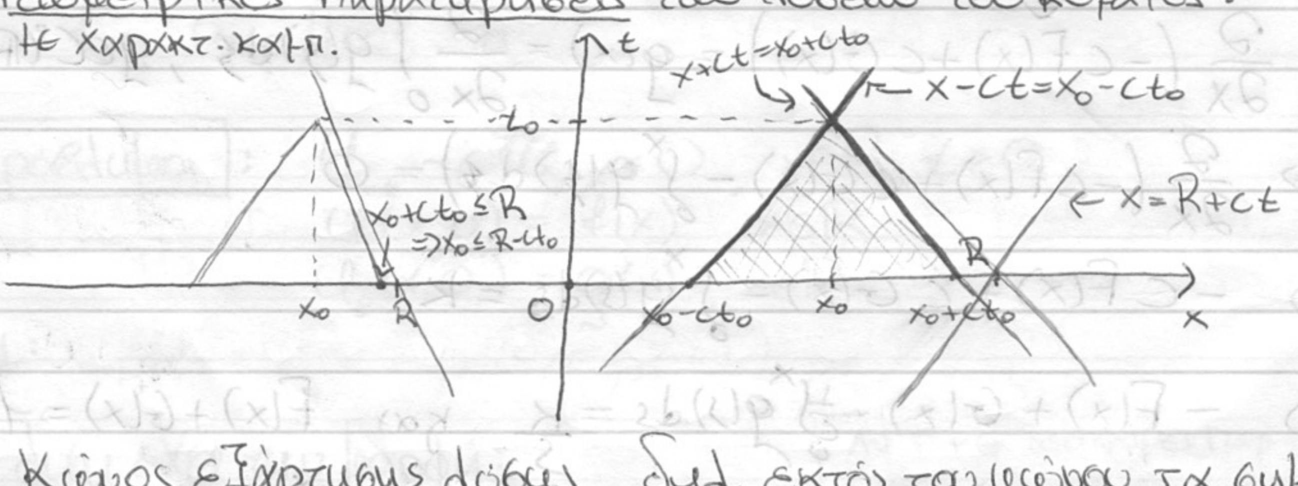
με $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ κ $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών, η λύση είναι η: $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$ □

- Συμπαγής φορέας: f έχει συμπαγή φορέα ανν $\exists R>0 : f(x) = 0,\ |x| \geq R$. □

- Γεωμετρικές Παρατηρήσεις των λύσεων του κύματος: (με χαρακτ. καμπ.)



(I) Κώνος εξάρτησης λύσης, δηλ. εκτός του κώνου τα σημεία δεν επηρεάζουν την λύση.

(II) Οι ϕ κ η φ έχουν συμπαγή φορέα, δηλ εκτός του φορέα, δηλ. των ευθειών $x = -R-ct$ κ $x = R+ct$, οι λύσεις είναι οι μηδενικές. □

- Ενέργεια του συστήματος ⊛

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Κινητική ενέργεια} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx \\ &\text{Δυναμική ενέργεια} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx \end{aligned}}$$

εκτός του φορέα είναι κ οι δύο μηδέν. Άρα είναι σε πεπερ. διαστήματα. Η αρχική δεδ. έχει συμπαγή φορέα.

Ολική Ενέργεια : $\boxed{E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right)dx}$

κ $\frac{d}{dt}E(t) = 0$, $t > 0$.

- Το $\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy$, υπάρχει, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x+h,y)\,dy - \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\right]dy.$$

Άρα, (Θεώρημα: $\exists$ δίσυ):

Έστω $f : [A,B]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής κ $\frac{\partial f}{\partial x}$ συνεχής.

Τότε $x \longmapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy$ είναι παρ/μη ως προς x

$$\text{κ} \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

- Τώρα Θ.δ.ο. $\frac{d}{dt}E(t) = 0$.

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2u_t u_{tt}(x,t) + 2c^2 u_x u_{xt}(x,t)\right]dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xt}(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)\left(u_t(x,t)\right)_x\,dx$$

$$= u_x(x,t)u_t(x,t) - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,dx.$$

Άρα, $E'(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[u_t(x,t)u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\right]dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[u_{tt} - c^2 u_{xx}\right]u_t\,dx = 0 \quad \square$$

• <u>Θεώρημα</u> (<u>Μοναδικότητα της λύσης</u>):

Το πρόβλημα αρχ. τιμών ⊛ έχει το πολύ μια λύση.

<u>Απόδειξη</u>: [η απλή απδ]

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις. Τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \quad \left(\begin{array}{l} u_{1,tt} - u_{2,tt} - c^2(u_{1,xx} - u_{2,xx}) = \\ u_{1,tt} - c^2 u_{1,xx} - (u_{2,tt} - c^2 u_{2,xx}) = 0 \end{array} \right)$$

$$w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

$$\Rightarrow w(x,0) = 0 \quad \text{και}$$

$$w_t(x,0) = u_{1,t}(x,0) - u_{2,t}(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow w_t(x,0) = 0$$

Άρα η w λύνει την αντίστοιχη ομογενή δ.ε.

Έχω, $E'(t) = 0$, $t > 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$, $t > 0$

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)]\,dx = 0,$$

αφού $w_t(x,0) = 0 \Rightarrow w_t^2(x,0) = 0$ και
$w(x,0) = 0 \Rightarrow w_x(x,0) = 0 \Rightarrow w_x^2(x,0) = 0$.

Άρα, $E(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)]\,dx = 0$

$$\Rightarrow w_t(x,t) = 0 \quad \text{κ} \quad w_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$$

Από $w_t(x,t) = 0 \Rightarrow w(x,t) = w(x,0) = 0$.

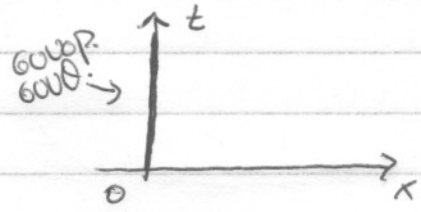
Άρα, $w(x,0) = 0 \Rightarrow w \equiv 0$. Άτοπο! □

• $f : [0,1] \to [0,+\infty)$, συνεχής και $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, τότε $f \equiv 0$

□

- <u>Ανακλώμενα κύματα</u>

$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$, $x>0$, $t>0$



- <u>Α.Σ</u>: $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \varphi(x)$, $x \geq 0$

<u>Σ.Σ</u>: $u(0,t)=0$, $t \geq 0$, για <u>περιττές επεκτάσεις</u>
<u>Dirichlet</u>

<u>Σ.Σ.</u> : $u_x(0,t)=0$, $t \geq 0$, για <u>άρτιες επεκτάσεις</u>
<u>Neumann</u>

- περιττή συνάρτηση : $f(-x) = -f(x)$ $(\forall x \in I \Rightarrow -x \in I)$, με κεντρο συμμετριας το 0, $f(0)=0$.

  αρτια συνάρτηση : $f(-x) = f(x)$, άξονας συμμετριας xx'.

24-

Βρες μια λύση για το π.α.τ :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , x \in \mathbb{R} \, , t > 0$$
$$u(x,0) = \phi_\pi(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = \varphi_\pi(x) \, , x \in \mathbb{R}$$

<u>Λύση</u>:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi_\pi(x+ct) + \phi_\pi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_\pi(s)\,ds$$

πρέπει : $\phi_\pi \in C^2(\mathbb{R})$ κ $\varphi_\pi \in C^1(\mathbb{R})$.

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\phi_\pi(ct) + \phi_\pi(-ct)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right) + \frac{1}{2c}\underbrace{\int_{-ct}^{ct} \varphi_\pi(s)\,ds}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$\Rightarrow u(0,t) = 0$, άρα έχω Σ.Σ. Dirichlet (για περιττές επεκτ)

Τότε $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi_\pi(x+ct) + \phi_\pi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_\pi(s)\,ds$

είναι μια λύση του προβλήματος στην ημιευθεία. ■

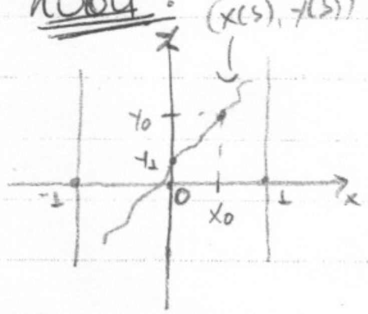
<u>Άσκηση</u>: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, περιττή κ συνεχής συνάρτηση . Τότε:
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0 \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R}$. ■

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8ο

- $\boxed{\text{Ασκ. 1}}$: Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\sqrt{1-x^2}\,u_x(x,y)+u_y(x,y)=0,\quad x\in(-1,1),\ y\in\mathbb{R}$$
$$u(0,y)=y,\quad y\in\mathbb{R}.$$

Λύση:



Θα εφαρμόσω την μέθοδο των χαρακτ., οπότε επιλέγω την χαρακτ. καμπ.

$\sigma(s)=(x(s),y(s)),\quad s\in\mathbb{R}$

με $\sigma'(s)=u_x\dot{x}+u_y\dot{y}$

Στόχος: $(x(s),y(s))=(x_0,y_0)$

$(x(0),y(0))=(0,y_1)$

Έχω:
$$\left[\begin{array}{ll}\dot{x}(s)=\sqrt{1-x^2(s)}, & s\geq 0\\ \dot{y}(s)=1, & s\geq 0\\ x(0)=0 & \\ y(0)=y_1 & \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y(s)=s+y(0)\\ \dot{x}(s)=\sqrt{1-x^2(s)}\\ x(0)=0\\ y(0)=y_1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} y(s)=s+y_1 & \\ \dfrac{\dot{x}(s)}{\sqrt{1-x^2(s)}}=1, & s\geq 0\\ x(0)=0 & \end{array}\right].$$

Οπότε, έχω: $\displaystyle\int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-x^2(t)}}\,dt=\int_0^s 1\,dt \Rightarrow \int_0^s \frac{x'(t)}{\sqrt{1-x^2(t)}}\,dt=1,\ s\geq 0$

Θέτω: $x(t)=\xi \Rightarrow x'(t)\,dt=d\xi$

Άρα, $\displaystyle\int_0^{x(s)}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=s,\ s\geq 0 \Rightarrow \Big[\arcsin\xi\Big]_0^{x(s)}=s,\ s\geq 0$

$\Rightarrow \arcsin x(s)=s \Rightarrow x(s)=\sin s$, με $-\frac{\pi}{2}\leq s\leq\frac{\pi}{2}$

(Το διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ είναι το μεγαλύτερο διάστημα που ορίζεται η λύση κ είναι γν. αύξουσα κ για $s\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ το $\sin s$ καλύπτει όλο το φάσμα τιμών $[-1,1]$).

Επομένως, $x(s)=\sin s$ κ $y(s) = s + y_1$

Άρα $\sigma(s) = (x(s), y(s)) = (\sin s, s + y_1)$

κ $\sigma(0) = (x(0), y(0)) = (0, y_1) = y_1$

$$\sigma'(s) = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = \sqrt{1-x^2}\, u_x + u_y = 0$$

$$\Rightarrow \sigma'(s) = 0 \Rightarrow \sigma(s) = \sigma(0) = y_1, \quad s\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα $u(\sin s, s+y_1) = y_1$

Θέτω: $s = s_0$ τότε $\begin{bmatrix} \sin s_0 = x_0 \\ s_0 + y_1 = y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_0 = \arcsin x_0 \\ y_1 = y_0 - \arcsin x_0 \end{bmatrix}$

Άρα, $u(x_0,y_0) = u(\sin s_0, s_0+y_1) = y_0 - \arcsin x_0$.

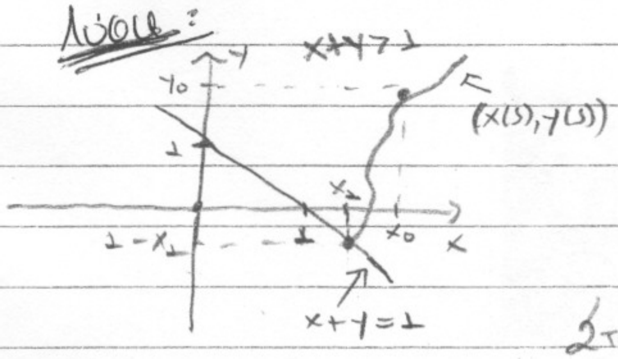
Δηλαδή, $u(x,y) = y - \arcsin x, \quad x\in[-1,1], y\in\mathbb{R}$ ■

• $\boxed{\text{Ασκ. 2}}$: Να λυθεί το πρόβλημα:

$$u_x(x,y) + (x+y)\, u_y(x,y) = 0, \quad x+y>1$$
$$u(x, 1-x) = f(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

<u>Λύση</u>:



Θα εφαρμόσω την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών.

Χαρ. καμπ: $\sigma(s) = (x(s), y(s))$

με $\sigma'(s) = u_x \dot{x} + u_y \dot{y}$

Στόχος: $(x(s), y(s)) = (x_0, y_0)$

$(x(0), y(0)) = (x_1, 1-x_1)$

Οπότε επιλέγω: $\begin{bmatrix} x'(s) = 1, & s>0 \\ y'(s) = x(s) + y(s), & s>0 \\ x(0) = x_1 & \\ y(0) = 1 - x_1 & \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x(s) = s + x_1, & s\geq 0 \\ y'(s) = s + x_1 + y(s), & s\geq 0 \end{bmatrix}$$

Έχω, $y'(s) = y(s) + (s+x_1) \Rightarrow y'(s) - y(s) = s + x_1$

$\Rightarrow e^{-s} y'(s) - e^{-s} y(s) = e^{-s}(s+x_1)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-s} y(s)\right) = e^{-s}(s+x_1) \quad , s \geq 0$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) = \int_0^s e^{-\xi}(\xi + x_1)\,d\xi + y(0)$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) = \int_0^s (-e^{-\xi})'(\xi + x_1)\,d\xi + 1 - x_1$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) - (1 - x_1) = \left[(-e^{-\xi})(\xi + x_1)\right]_0^s - \int (-e^{-\xi})\,d\xi$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) - (1 - x_1) = -e^{-s}(s + x_1) + \left[-e^{-\xi}\right]_0^s + x_1, \; s \geq 0$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) - (1 - x_1) = -e^{-s}(s + x_1) + x_1 - e^{-s} + 1, \; s \geq 0$

$\Rightarrow e^{-s} y(s) = 1 - \cancel{x_1} - s e^{-s} - x_1 e^{-s} + \cancel{x_1} - e^{-s} + 1, \; s \geq 0$

$\Rightarrow y(s) = 2e^{s} - s - x_1 - 1$ κ $x(s) = s + x_1, \; s \geq 0$

Άρα, $\sigma(s) = (x(s), y(s)) = (s + x_1, 2e^{s} - 1 - (s + x_1))$ κ

$\sigma'(s) = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = u_x + (x(s) + y(s))\, u_y = 0.$

$\Rightarrow \sigma'(s) = 0$

$\sigma(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_1, 1 - x_1) = f(x_1)$

Δηλ. $\sigma'(s) = 0 \Rightarrow \sigma(s) = \sigma(0) = f(x_1)$

Άρα $u(s + x_1, 2e^{s} - 1 - s - x_1) = f(x_1)$.

Θέτω $s = s_0$ κ έχω: $x_0 = s_0 + x_1$, $x_0 + y_0 > 1$.

$y_0 = 2e^{s_0} - 1 - s_0 - x_1$

προσθέτω κατά μέλη $\Rightarrow$ $x_0 + y_0 = 2e^{s_0} - 1 \Rightarrow 2e^{s_0} = x_0 + y_0 + 1 \Rightarrow s_0 = \ln\left(\frac{x_0 + y_0 + 1}{2}\right)$

Άρα, $s_0 = \ln\left(\frac{x_0 + y_0 + 1}{2}\right)$

$x_1 = x_0 - \ln\left(\frac{x_0 + y_0 + 1}{2}\right)$, $x_0 + y_0 > 1$

Οπότε:

$$u(x_0,y_0)=f(x_0)=f\left(x_0-\ln\left(\frac{x_0+y_0+1}{2}\right)\right),\ x_0+y_0>1$$

Άρα, $u(x,t)=f\left(x-\ln\left(\frac{x+y+1}{2}\right)\right)$, $x+y>1$ ■

• $\boxed{\text{Ασκ. 3}}$ (α) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$u_{tt}(x,t)-u_{xt}(x,t)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0)=g(x),\ x\in\mathbb{R},$$

όπου $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

(β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα:

$$u_{tt}(x,t)-u_{xt}(x,t)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$$
$$u(x,-x)=0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,-x)=x,\ x\in\mathbb{R},$$ δεν έχει ομαλή λύση.

Λύση:

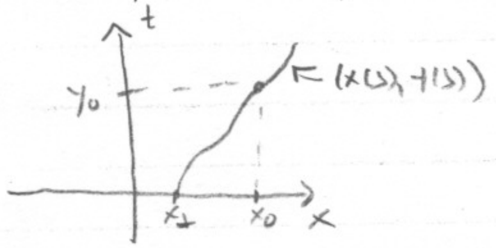
(α) Παρατηρώ ότι: $u_{tt}(x,t)-u_{xt}(x,t)=0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t(x,t)-u_x(x,t)\right)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$\Longrightarrow u_t(x,t)-u_x(x,t)=u_t(x,0)-u_x(x,0),\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Όμως, $u_t(x,0)=g(x)$ κ
$u(x,0)=f(x) \Rightarrow u_x(x,0)=f'(x)$.

Επομένως, $u_t(x,t)-u_x(x,t)=g(x)-f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$
με $u(x,0)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$



Το πρόβλημα αυτό θα το λύσω με την μέθοδο των χαρακτ. με χαρακτ. καμπύλη $\sigma(s)=(x(s),y(s))$ κ $\sigma'(s)=u_x\dot{x}+u_y\dot{y}$

Προσδιορίζω την καμπύλη έτσι ώστε:

$$\begin{bmatrix} t'(s)=1 & , s>0 \\ x'(s)=-1 & , s>0 \\ t(0)=0 & \\ x(0)=x_1 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} t(s)=s+t(0) \\ x(s)=-s+x(0) \\ t(0)=0 \\ x(0)=x_1 \quad , s>0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} t(s)=s \\ x(s)=-s+x_1 \quad , s\geq 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, $\sigma(s)=(s,-s+x_1)$

$\sigma(0)=(x_1,0)=f(x_1)$.

Επομένως, $\sigma'(s)=u_t-u_x=g(x(s))-f'(x(s))$

$$\Rightarrow \sigma'(s)=g(-s+x_1)-f'(-s+x_1)\ , \ s\geq 0$$

$$\Rightarrow \sigma(s)-\sigma(0)=\int_0^s [g(-\theta+x_1)-f'(-\theta+x_1)]\,d\theta$$

$$\Rightarrow \sigma(s)=\int_0^s [g(-\theta+x_1)-f'(-\theta+x_1)]\,d\theta+f(x_1)$$

Θέτω: $-\theta+x_1=\xi \Rightarrow -d\theta=d\xi$, $\theta\to 0 : \xi\to x_1$, $\theta\to s : \xi\to -s+x_1$

Οπότε,

$$\sigma(s)=f(x_1)+\int_{x_1}^{-s+x_1}[g(\xi)-f'(\xi)](-d\xi)$$

$$=f(x_1)-\int_{x_1}^{-s+x_1}g(\xi)d\xi+\int_{x_1}^{-s+x_1}f'(\xi)d\xi$$

$$=f(x_1)-\int_{x_1}^{-s+x_1}g(\xi)d\xi+f(-s+x_1)-f(x_1)$$

$$=f(-s+x_1)-\int_{x_1}^{-s+x_1}g(\xi)d\xi\ , \ s>0$$

Οπότε $u(-s+x_1,s)=f(-s+x_1)-\int_{x_1}^{-s+x_1}g(\xi)d\xi$

Έστω $s=s_0$ τότε έχω : $\begin{bmatrix} t_0=s_0 \\ x_0=-s_0+x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_0=s_0 \\ x_1=x_0+t_0 \end{matrix}$

Άρα, $u(x_0,t_0)=f(x_0)-\int_{x_0+t_0}^{x_0} g(\xi)d\xi$

(β) Έστω ότι έχει ομαλή λύση.
Τότε, παραγωγίζω ως προς x την:

$$u_t(x,-x)=x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t(x,-x)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x)$$

$$\Rightarrow u_{tx}(x,-x)\frac{\partial}{\partial x}(x)+u_{tt}(x,-x)\frac{\partial}{\partial x}(-x)=1$$

$$\Rightarrow u_{tx}(x,-x)-u_{tt}(x,-x)=1 \quad , x\in\mathbb{R}$$

Όμως, από την δ.ε. για $t=-x$, έχω:

$$u_{tx}(x,-x)-u_{tt}(x,-x)=0\neq 1 \quad \text{Άτοπο!}$$

Άρα το πρόβλημα δεν έχει ομαλή λύση ■

• $\boxed{\text{Ασκ. 4}}$: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος α.τ.

$$2u_{xx}(x,t)-u_{tt}(x,t)+u_{xt}(x,t)=0 \ , x\in\mathbb{R}, t>0$$
$$u(x,0)=f(x) \quad x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0)=0 \ , x\in\mathbb{R}$$

όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Λύση:

$$\Delta = 4\left(\frac{1}{4}+2\right)=1+8=9>0$$, άρα η δ.ε. είναι υπερβολικού τύπου.

Οπότε έχω το γραμμικό σύστημα:

$$\xi=\alpha t+\beta x \quad , \quad u(x,t)=U(\xi,\eta)$$
$$\eta=\gamma t+\delta x$$

Τότε, $u_x=U_\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}+U_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=\beta U_\xi+\delta U_\eta$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta U_\xi+\delta U_\eta\right)=\beta\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$=\beta^2U_{\xi\xi}+\beta\delta U_{\xi\eta}+\beta\delta U_{\eta\xi}+\delta^2U_{\eta\eta}=\beta^2U_{\xi\xi}+2\beta\delta U_{\eta\xi}+\delta^2U_{\eta\eta}$$

$$u_t=U_\xi\frac{\partial\xi}{\partial t}+U_\eta\frac{\partial\eta}{\partial t}=\alpha U_\xi+\gamma U_\eta$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha U_\xi + \gamma U_\eta) = \alpha\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) + \gamma\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$$

$$= \alpha^2 U_{\xi\xi} + \alpha\gamma U_{\xi\eta} + \alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta} = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\eta\xi} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$$

$$u_{xt} = \frac{\partial}{\partial t}(\beta U_\xi + \delta U_\eta) = \beta\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) + \delta\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$$

$$= \alpha\beta U_{\xi\xi} + \beta\gamma U_{\xi\eta} + \alpha\delta U_{\eta\xi} + \delta\gamma U_{\eta\eta}$$

Αντικαθιστω στην δ.ε. κ έχω:

$$2(\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\eta\xi} + \delta^2 U_{\eta\eta}) - (\alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\eta\xi} + \gamma^2 U_{\eta\eta}) + \alpha\beta U_{\xi\xi} + \delta\gamma U_{\eta\eta} + (\beta\gamma + \alpha\delta) U_{\eta\xi} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\beta^2 - \alpha^2 + \alpha\beta) U_{\xi\xi} + (2\delta^2 - \gamma^2 + \delta\gamma) U_{\eta\eta} + (2\beta\delta - 2\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta) U_{\eta\xi} = 0$$

Πρέπει, τώρα: $2\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$ κ

$2\delta^2 - \gamma^2 + \delta\gamma = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 + \frac{\delta}{\gamma} - 1 = 0$ κ

$2\beta\delta - 2\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta \neq 0$

Άρα, $2p^2 + p - 1 = 0$

$\Delta = 9$, $p_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$ — $p_1 = \frac{\beta}{\alpha} = -1$, $p_2 = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2}$

Οπότε, έχω την επιλογή:

$\xi = x - t$

$\eta = x + 2t$

Και η δ.ε. γίνεται: $U_{\eta\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(U_\eta) = 0$

$\Rightarrow U_\eta = F(\xi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}(U(\xi,\eta)) = F(\xi) \Rightarrow U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$

για F, G κατάλληλες

Επομένως, $u(x,t) = F(x-t) + G(x+2t)$.

$u_t(x,t) = -F'(x-t) + 2G(x+2t)$ και

$u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + G(x) = f(x)$

και $u_t(x,0)=0 \Rightarrow -F'(x)+2G'(x)=0. \Longrightarrow$

$2G(x)-F(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$

Αρα, $\begin{array}{l} F(x)+G(x)=f(x) \\ 2G(x)-F(x)=c_1 \end{array} \Big| \xrightarrow[\text{κατα μέλη}]{\text{προσθέτω}} 3G(x)=f(x)+c_1$

$\Rightarrow G(x)=\dfrac{f(x)}{3}+\dfrac{c_1}{3},\ c_1\in\mathbb{R}$

και $F(x)=f(x)-\dfrac{f(x)}{3}-\dfrac{c_1}{3} \Rightarrow F(x)=\dfrac{2}{3}f(x)-\dfrac{c_1}{3},\ c_1\in\mathbb{R}$

Τελικά, έχω:

$$u(x,t)=\frac{2}{3}f(x-t)-\frac{c_1}{3}+\frac{1}{3}f(x+2t)+\frac{c_1}{3}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{2}{3}f(x-t)+\frac{1}{3}f(x+2t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$

ΤΕΛΟΣ ΦΥΛ.

10-03-2012

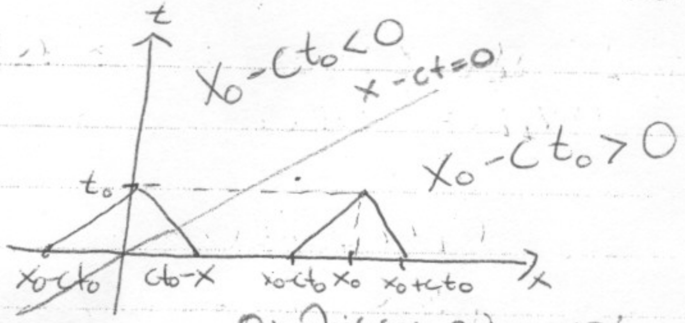
Ομ. κυμ. εξ. με Σ.Σ. Dirichlet (περιττή επέκταση)

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $x>0$, $t>0$

A.Σ. : $u(x,0) = \phi(x)$, $x>0$

$u_t(x,0) = \psi(x)$, $x>0$

Σ.Σ. Dirichlet : $\boxed{u(0,t) = 0}$, $x \geq 0$



Οι λύσεις πάνω από την ευθεία $x - ct_0 = 0$ είναι αρνητικές, ενώ από κάτω θετικές.

Παίρνω περιττή επέκταση:

$$\phi_\pi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\psi_\pi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

Άρα, έχω το πρόβλημα: $v_{tt} = c^2 v_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t>0$

A.Σ: $v(x,0) = \phi_\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$v_t(x,0) = \psi_\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Οπότε, $v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi_\pi(x-ct) + \phi_\pi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_\pi(t)\,dt$

Δηλαδή, $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi_\pi(x-ct) + \phi_\pi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_\pi(t)\,dt$.

- Αν (x,t): $x - ct > 0$, τότε:

$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(t)\,dt$.

- Αν (x,t): $x - ct < 0$, τότε:

$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(-\phi(ct-x) + \phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int_{x-ct}^{0} \psi_\pi(t)\,dt + \int_{0}^{x+ct} \psi_\pi(t)\,dt\right)$

Έχω, $\int_{x-ct}^{0} \psi_\pi(t)\,dt = \int_{x-ct}^{0} -\psi(-t)\,dt$ $\left(\text{αφού, } \psi_\pi(t) = -\psi_\pi(-t) = -\psi(-t),\ t<0\right)$

Θέτω $p = -t \Rightarrow dp = -dt$, $\left[\begin{matrix} t \to 0 : p \to 0 \\ t \to x-ct : p \to ct-x \end{matrix}\right]$

$\int_{x-ct}^{0} -\psi(-t)\,dt = \int_{ct-x}^{0} \psi(p)\,dp$

Άρα, $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) - \phi(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(t)\,dt}$ $t>0$, $x \geq 0$

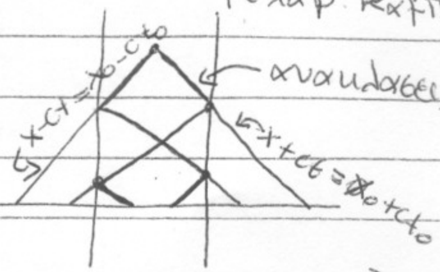
- **Αλλαγή Στόχου (Ανακλώμενα Κύματα – Σ.Σ. Dirichlet)**

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$

Α.Σ : $u(x,0) = \phi(x)$, $0<x<l$
$u_t(x,0) = \psi(x)$

Σ.Σ Dirichlet : $u(0,t)=0$, $t \geq 0$
$u(l,t)=0$

κώνος εξάρτ. με χαρ. καμπ.



(Δηλαδή κάνω περιττή επέκταση στο $(-l,0)$ και στην συνέχεια περιοδική επέκταση με περίοδο $2l$.
[Αν είχα Σ.Σ. Neumann θα έκανα άρτια επέκταση])

Έχω την λύση:

$$V(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\phi}(x+ct) + \hat{\phi}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \hat{\psi}(\tau)\,d\tau$$

και $V_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\phi}'(x+ct) + \hat{\phi}'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left[\hat{\psi}(x+ct) - \hat{\psi}(x-ct)\right]$

Όμως, $V_x(0,t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\hat{\phi}'(ct) + \hat{\phi}'(-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left[\hat{\psi}(ct) - \hat{\psi}(-ct)\right] = 0$

Άρα, $\frac{1}{2c}\left[\hat{\psi}(ct) - \hat{\psi}(-ct)\right] = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(ct) = \hat{\psi}(-ct)$
(άρτια επέκταση)

και $\frac{1}{2}\left[(\hat{\phi}'(-ct) + \hat{\phi}'(-ct)\right] = 0 \Rightarrow \hat{\phi}'(ct) = -\hat{\phi}'(-ct)$
(περιττή επέκταση)

■

■

Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση

- $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$
  $u(x,0) = \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$
  $u_t(x,0) = \varphi(x)$

(Γενικά: λύση μη ομ. συστ. $Ax = B$. Βρίσκουμε μια ειδική λύση της μη ομογ. $Ax_0 = B$ κ την γενική λύση της της αντίστοιχης ομογενούς $Ax_0 = B$ κ τις προσθέτουμε)

Η αντίστοιχη ομογ.: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$
$u(x,0) = \phi(x)$
$u_t(x,0) = \varphi(x)$

Βρίσκω γενική λύση v (Μου μένει να βρω την ειδική λύση w του μη ομ.)

Θέτω $u = v + w$.

Τότε: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \iff v_{tt} + w_{tt} - c^2(v_{xx} + w_{xx}) = f$

$$\overset{\text{αφού } v}{\underset{\text{λύνει την ομογενή}}{\iff}} \underbrace{v_{tt} - c^2 v_{xx}}_{0} + w_{tt} - c^2 w_{xx} = f$$

$\implies w_{tt} - c^2 w_{xx} = f$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Έχω, $u(x,0) = \phi(x) \iff v(x,0) + w(x,0) = \phi(x)$
$\iff \phi(x) + w(x,0) = \phi(x) \implies w(x,0) = 0$

Άρα, $w_{tt} - c^2 w_{xx} = f$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$
$w(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$w_t(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. ∎

- Λύση της μη Ομογενούς δ.ε.:
  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$
  $u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
  $u_t(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- **$\boxed{\text{II}^{\text{ος}}\ \text{τρόπος}}$ (2η ΛΥΣΗ)** : <u>Με αλλαγή συστήματος συντεταγμένων</u>

Θέτω: $\left.\begin{array}{l} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi) \end{array}$

$u(x,t) = v(\xi,\eta)$

Κανόνας αλυσίδας: $u_t(x,t) = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c\frac{\partial v}{\partial \xi} + c\frac{\partial v}{\partial \eta}$

Όμως $u_t(x,0) = 0 \underset{\eta=\xi}{\overset{t=0}{\Longrightarrow}} -c\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\xi) + c\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\xi) = 0$

$\Rightarrow v_\eta(\xi,\xi) = v_\xi(\xi,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$

κ $t > 0 \Rightarrow \frac{1}{2c}(\eta - \xi) > 0 \Rightarrow \eta > \xi$.

Άρα, έχω το καινούργιο σύστημα:

$$-4c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} v(\xi,\eta) = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right), \ \eta > \xi, \ \xi \in \mathbb{R}$$

$$v(\xi,\xi) = 0, \ \xi \in \mathbb{R} \ (\text{αφού } t=0 : \eta = \xi)$$

$$v_\eta(\xi,\xi) = v_\xi(\xi,\xi), \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Έχω, $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} v(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[-\frac{1}{4c^2}\int_\xi^\eta f\left(\frac{\xi+\theta}{2}, \frac{\theta-\xi}{2c}\right)d\theta\right]$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_\xi^\eta f\left(\frac{\xi+\theta}{2}, \frac{\theta-\xi}{2c}\right)d\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_\xi^\eta f\left(\frac{\xi+\theta}{2}, \frac{\theta-\xi}{2}\right)d\theta = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\xi) + \frac{1}{4c^2}\int_\xi^\xi f\left(\frac{\xi+\theta}{2}, \frac{\theta-\xi}{2}\right)d\theta$$

και $\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\xi) + \cancelto{0}{\frac{1}{4c^2}\int_\xi^\xi f\left(\frac{\xi+\theta}{2}, \frac{\theta-\xi}{2}\right)d\theta} = 0$

$\Rightarrow v_\xi(\xi,\xi) = 0$

Επομένως, $\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_{\xi}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\theta}{2},\frac{\theta-\xi}{2c}\right)d\theta + U_\xi(\xi,\xi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[-\frac{1}{4c^2}\left(\int_{\eta}^{\xi}\int_{t}^{\eta} f\left(\frac{t+\theta}{2},\frac{\theta-t}{2c}\right)d\theta\, dt\right)\right]$$

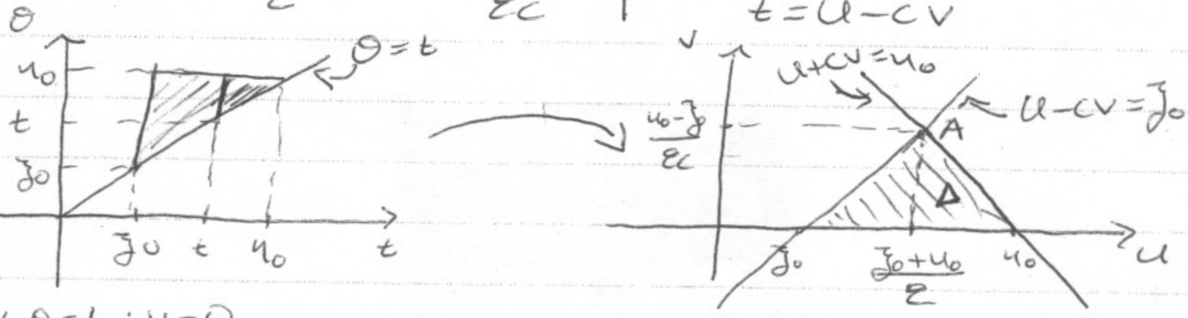
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left[U(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_{\eta}^{\xi}\int_{t}^{\eta} f\left(\frac{t+\theta}{2},\frac{\theta-t}{2c}\right)d\theta\, dt\right] = 0$$

$$\Rightarrow U(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_{\eta}^{\xi}\int_{t}^{\eta} f\left(\frac{t+\theta}{2},\frac{\theta-t}{2c}\right)d\theta\, dt = U(\xi,\xi) = 0 = U(\eta,\eta)$$

$$\Rightarrow U(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_{\eta}^{\xi}\int_{t}^{\eta} f\left(\frac{t+\theta}{2},\frac{\theta-t}{2c}\right)d\theta\, dt.$$

Άρα,
$$u(x,t) = -\frac{1}{4c^2}\int_{x+ct}^{x-ct}\int_{t}^{x+ct} f\left(\frac{t+\theta}{2},\frac{\theta-t}{2c}\right)d\theta\, dt$$

Καλούμε: $u = \frac{t+\theta}{2}$, $v = \frac{\theta-t}{2c}$ $\Rightarrow$ $\theta = u+cv$, $t = u-cv$



A : τομή των ευθειών $u = \frac{\xi_0+\eta_0}{2}$, $v = \frac{\eta_0-\xi_0}{2c}$

για $\theta = t$: $v = 0$

για $t = \xi_0$: $u - cv = \xi_0$

για $\theta = \eta_0$: $u + cv = \eta_0$

$\frac{\partial \theta}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial \theta}{\partial v} = c$, $\frac{\partial t}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial t}{\partial v} = -c$.

Άρα $\left|\frac{\partial(\theta,t)}{\partial(u,v)}\right| = 2c$. Δηλαδή $\partial t\,\partial\theta = 2c\,\partial u\,\partial v$.

Άρα, $u(x,t) = -\frac{1}{4c^2}\iint_{\Delta} f(u,v)\,2c\,\partial u\,\partial v = \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} f(u,v)\,du\,dv$

$$U(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} f(u,v)\,du\,dv\,, \qquad \begin{vmatrix} \xi_0 = x_0 - ct_0 \\ \eta = x_0 + ct_0 \end{vmatrix}$$

Επομένως,

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2c}\int_{x_0+ct_0}^{x_0-ct_0}\int_{t_0}^{x_0+ct_0} f(u,v)\,du\,dv.$$

- Γενικά: $\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, θέτω $x = h(u,v)$, $y = g(u,v)$

Άρα, $\iint_{\Omega^*} f(h(u,v), g(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$,

όπου, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$

- Η μέθοδος των χαρακτηριστικών "δουλεύει" σε δ.ε. της μορφής:

$$\boxed{\alpha(x,t,u)\,u_t + \beta(x,t,u)\,u_x = \gamma(x,t,u)}$$

Χαρακτ. καμπ.: $\sigma(s) = u(x(s), t(s))$

$\sigma'(s) = u_x \dot{x} + u_t \dot{t}$

με $\dot{x} = \beta(x,t,u)$

$\dot{t} = \alpha(x,t,u)$

$\dot{\sigma} = \gamma(x,t,u)$

- $\boxed{\text{Π.Χ.}}$: Να λυθεί το πρόβλημα α.τ.:

$$u_t + u_x^2 = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0) = 3x,\ x\in\mathbb{R}$$

Λύση:

Παραγωγίζω την δ.ε. ως προς x κ έχω:

$u_{tx} + 2u_x u_{xx} = 0$

$u(x,0) = 3$

κ θέτω $u_x(x,t) = v(x,t)$

Άρα, η δ.ε. γίνεται: $v_t + 2v v_x = 0$

$v(x,0) = 3$

Θα χρησιμοποιήσω την μέθοδο των χαρακ. καμπ.

με χαρακτ. καμπ : $\sigma(s) = V(x(s), t(s))$

$\sigma'(s) = V_x \dot{x} + V_t \dot{t}$

Προσδιορίζω το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(s) &= 2\sigma(s) \\ \dot{t}(s) &= 1 \\ x(0) &= x_1 \\ t(0) &= 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x(s) &= \sigma(s) + x_1 \\ t(s) &= s \quad , \; s \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα, $\sigma'(s) = V_t + 2\sigma(s) = 0 \Rightarrow \sigma'(s) = 0$.

κ $\sigma(0) = V(x(0), t(0)) = V(x_1, 0) = 3$.

Οπότε, $\sigma(s) = \sigma(0) = 3 \Rightarrow \sigma(s) = 3 \Rightarrow V(\sigma(s) + x_1, s) = 3$

κ $(x(s), t(s)) = (x_0, t_0)$

Άρα, $V(x_0, t_0) = 3$ κ $u_x(x_0, t_0) = V(x_0, t_0)$,

δηλ. $u_x(x, t) = 3$

Επομένως, $u_t + 9 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$u(x, 0) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t) + 9t\right) = 0 \Rightarrow u(x,t) = u(x,0) - 9t = 3x - 9t$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = 3x - 9t}, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0$$

- Τύπος του Green : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right] dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \left[f(x,y)\,dy + g(x,y)\,dx\right]}$$

- Ολοκλήρωση κατά μέρη : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{x_1} g(x)\,dx = -\iint_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_1} g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) V_{x_1}(x)\,dS$$

, όπου V μοναδιαίο κάθετο.

• <u>Ταυτότητες του Green</u> :

(I) $$\boxed{\int_{\Omega} f(x)\Delta g(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla f(x)\cdot \nabla g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}\,dS}$$

όπου ν μοναδιαίο κάθετο κ $\Delta g(x) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}$

(II) $$\boxed{\int_{\Omega} \big(f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\big)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu} - g(x)\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)dS}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F\,dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot \nu\,dS$$, ν μοναδιαίο κάθετο

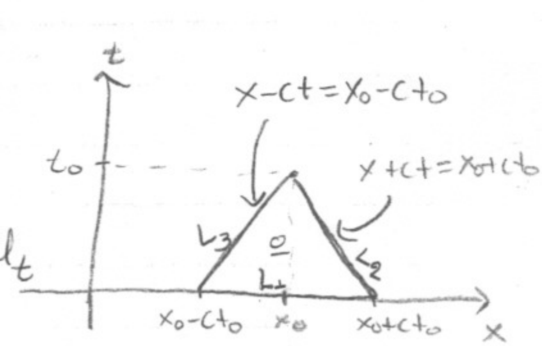
$F = (f_1, \dots, f_n)$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

• <u>Λύση της μη ομογενούς ΔΕ</u> :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

- $\boxed{\text{2ος Τρόπος}}$: <u>Με Green</u>:
(2η λύση)



Επιλέγω: $F(x,t) = -c^2 u_x$

$-G(x,t) = u_t \Rightarrow G(x,t) = -u_t$

Τύπος του Green: $$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial t}\right]dx\,dt$$

$$= \iint_{\Omega}\left[F_x - G_t\right]dx\,dt = \iint_{\Omega}\left[-c^2 u_{xx} + u_{tt}\right]dx\,dt = \iint_{\Omega} f(x,t)\,dx\,dt$$

κ $$\iint_{\Omega}\left[F_x - G_t\right]dx\,dt = \int_{\partial\Omega}\left[F\,dt + G\,dx\right].$$

$$I = \int_{L_1} [-c^2 \cancel{u_x dt}^{\,0} - u_t dx] = -\int_{L_1} u_t\, dx = -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)\,dx = 0$$

$(u(x,0)=0 \Rightarrow u_x(x,0)=0)$

$$II = \int_{L_2} [-c^2 u_x dt - u_t dx]$$

L_2: $dx + c\,dt = 0 \Rightarrow c\,dt = -dx$

και $du = u_x dx + u_t dt$

Άρα, $-c^2 u_x dt - u_t dx = -u_x c^2\left(-\frac{dx}{c}\right) - u_t(-c\,dt)$

$$= c u_x dx + c u_t dt$$

$$= c(u_x dx + u_t dt) = c\,du$$

Οπότε, $II = c\int_{L_2} du = c\int_{x_0+ct_0}^{t_0} du = c(u(x_0,t_0) - \cancel{u(x_0+ct_0,0)}^{\,0})$

$$= c\,u(x_0,t_0) \qquad \begin{pmatrix}\text{αφού}\\ u(x,0)=0\end{pmatrix}$$

$$III = \int_{L_3} [-c^2 u_x dt - u_t dx]$$

L_3: $dx - c\,dt = 0 \Rightarrow dx = c\,dt$ κ $du = u_x dx + u_t dt$

Άρα, $-c^2 u_x dt - u_t dx = -u_x c^2 \frac{dx}{c} - u_t c\,dt$

$$= -c u_x dx - c u_t dt$$

$$= -c(u_x dx + u_t dt) = -c\,du$$

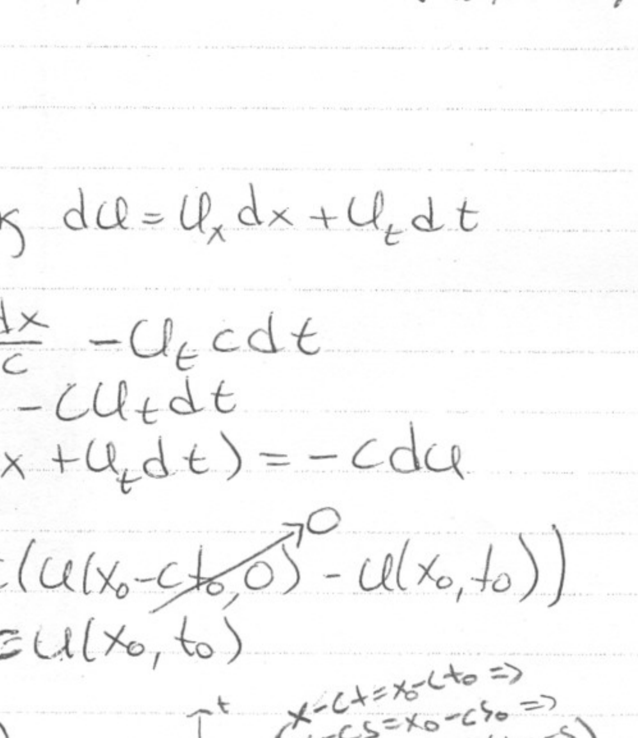
Οπότε, $III = -c\int_{L_3} du = -c\int_{t_0}^{x_0-ct_0} du = -c(\cancel{u(x_0-ct_0,0)}^{\,0} - u(x_0,t_0))$

$$= c\,u(x_0,t_0)$$

Άρα, $\iint_{\Omega} f(x,t)\,dx\,dt = 2c\,u(x_0,t_0)$

Με παραμετροποίηση στο χωρίο Ω, έχω:

$$\int_0^{t_0}\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)} f(x,s)\,dx\,ds$$



$x_0-c(t_0-s) < x < x_0+c(t_0-s)$

• $\boxed{\text{Άσκηση}}$: Να αποδείξεις το μοναδικό των λύσεων:

① $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$
$u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
$u_t(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$

② $2u_{xx} - u_{tt} + u_{xt} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$
$u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
$u_t(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

① Αν u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις, τότε η $w = u_1 - u_2$ θα λύνει το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$w(x,0) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}.$$
$$w_t(x,0) = 0$$

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \Rightarrow w_t(w_{tt} - c^2 w_{xx}) = 0 \Rightarrow w_t w_{tt} - c^2 w_t w_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (w_t w_{tt} - c^2 w_t w_{xx}) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{w_t^2}{2} dx - c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_t w_{xx} dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w_t^2 dx - c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_t w_{xx} dx = 0 \quad (*)$$

Όμως, $c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_t w_{xx} dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_t (w_x)_x dx = w_t w_x - \int_{-\infty}^{\infty} w_{tx} w_x dx$

$$= -c^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w_x^2 dx.$$

Άρα, η $(*)$ γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w_t^2 dx + \frac{1}{2} c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_x^2 dx \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)] dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)] dx = 0$$

$$\Rightarrow w_t(x,t) = 0 \quad \text{η} \quad w_x(x,t) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w(x,t) = 0 \quad . \quad \text{Δηλ. } u_1 = u_2.$$
$$\parallel$$
$$w(x,0)$$

② Αν u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις, τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το αντίστοιχο ομογενές:

$$2w_{xx} - w_{tt} + w_{xt} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

$$2w_{xx} - w_{tt} + w_{xt} = 0 \Rightarrow w_t(2w_{xx} - w_{tt} + w_{xt}) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (2w_t w_{xx} - w_t w_{tt} + w_t w_{xt})\,dx = 0$$

$$\Rightarrow -2\int_{-\infty}^{\infty} w_{tx} w_x\,dx - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w_t^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{\left(\tfrac{1}{2}w_t^2\right)_x}^{\,0}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow -2\int_{-\infty}^{\infty} w_{tx} w_x\,dx - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w_t^2\,dx = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} w_x^2\,dx - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w_t^2\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} \left[w_x^2 + \frac{1}{2}w_t^2\right]dx = 0$$

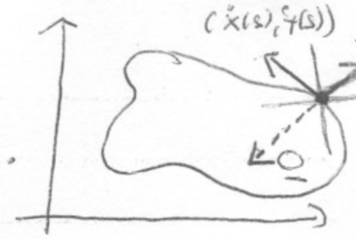
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[w_x^2 + \frac{1}{2}w_t^2\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\overset{0}{w_x^2(x,0)} + \frac{1}{2}\overset{0}{w_t^2(x,0)}\right]dx = 0$$

Άρα, επειδή $w_t = 0 \Rightarrow w(x,t) = w(x,0) = 0$
$\Rightarrow w \equiv 0$. Άρα $u_1 = u_2$. ■

- $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,dx = -\int_{\Omega} f\frac{\partial}{\partial x_i} g\,dx + \int_{\partial\Omega} f g\,\vec{n}_i\,dS$, $\vec{n}_i$ μοναδιαίο κάθετο

- <u>Στις 2 μεταβλητές</u> ($\mathbb{R}^2$)

Ένα κάθετο διάνυσμα: $(-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$ με $(\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ εφαπτόμενο διάνυσμα, $s\in[0,1]$



Το κάθετο διάνυσμα προς τα έξω είναι $(-\dot y(s), \dot x(s))$ (προς τα μέσα: $(\dot y(s), -\dot x(s))$).
Άρα το μοναδιαίο κάθετο είναι:

$$\vec{n} = \frac{(-\dot y(s), +\dot x(s))}{\sqrt{\dot x^2(s)+\dot y^2(s)}}$$

Το dS είναι μήκος, με

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{\dot x^2(s)+\dot y^2(s)}\,ds$$

$$dS = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,ds.$$

Έχω,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} g\,dxdy = -\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy + \int_{\partial\Omega} fg\left(\frac{-\dot y\cdot\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}\right)ds$$

$$= -\int_\Omega f\frac{dg}{dx}\,dxdy - \int_{\partial\Omega} f\,\frac{\partial y}{\dot y(s)ds} = -\int_\Omega f\frac{dg}{dx}\,dxdy - \int_{\partial\Omega} fg\,dy$$

κ, επίσης,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y} g\,dxdy = -\int f\frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy + \int_{\partial\Omega} fg\,dx.$$

$\blacksquare$

• <u>Θεώρημα</u>: Το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ &u(x,0) = g(x) \\ &u_t(x,0) = h(x) \quad , x\in\mathbb{R} \end{aligned},$$

έχει το πολύ μια λύση.

<u>Απόδειξη</u>: (Κανονική απόδ)

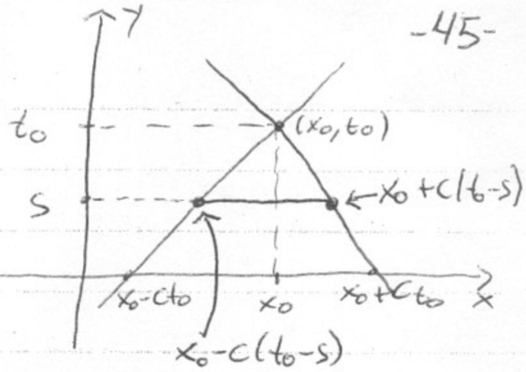
Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις κ θέτω $w = u_1 - u_2$.
Τότε η w λύνει το αντίστοιχο ομογενές:

$$\begin{aligned} &w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ &w(x,0) = 0 \\ &w_t(x,0) = 0 \quad , x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ο στόχος είναι να αποδείξουμε, ότι αν $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, τότε

$$w(x_0,t_0) = 0.$$

Φτιάχνω του ακόλο εξάρτηση του x_0, με τις χαρακτηρ. καμπύλες.



Άρα, $E(s)=\displaystyle\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)}\left(\frac{1}{2}\omega_t^2(x,s)+\frac{c^2}{2}\omega_x^2\right)dx$

$$E'(s)=\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)}[\omega_t\omega_{tt}+c^2\omega_x\omega_{xt}]dx - c\left[\frac{1}{2}\omega_t^2(x,x_0+c(t_0-s))+\frac{c^2}{2}\omega_x^2(x,x_0+c(t_0-s))\right]-c\left[\frac{1}{2}\omega_t^2(x,x_0-c(t_0-s))+\frac{c^2}{2}\omega_x^2(x,x_0-c(t_0-s))\right]$$

$$=\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)}\omega_t\omega_{tt}\,dx-\left[c^2\omega_x\omega_t\right]_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)}-\frac{c}{2}\omega_t^2(x,x_0+c(t_0-s))$$

$$+\frac{c^3}{2}\omega_x^2(x,x_0+c(t_0-s))-\frac{c}{2}\omega_t^2(x,x_0-c(t_0-s))+\frac{c^3}{2}\omega_x^2(x,x_0-c(t_0-s))$$

$$=\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)}[\omega_{tt}-c^2\omega_{xx}]\omega_t\,dx+\ldots$$

$$\left(\int_\alpha^\beta\omega_x\omega_{tx}\,dx=-\int_\alpha^\beta\omega_{xx}\omega_t\,dx+\left[\omega_x\omega_t\right]_\alpha^\beta\right)$$

Άρα, $E'(t)=c^2\omega_x(x,x_0+c(t_0-s))\omega_t(x,x_0+c(t_0-s))-$
$c^2\omega_x(x,x_0-c(t_0-s))\cdot\omega_t(x,x_0-c(t_0-s))-\frac{c}{2}\omega_t^2(x,x_0+c(t_0-s))$
$-\frac{c^3}{2}\omega_x^2(x,x_0+c(t_0-s))-\frac{c^3}{2}\omega_x^2(x,x_0-c(t_0-s))$.

$$=\frac{c}{2}\left[c^2\omega_x^2(x,x_0+ct_0)+\omega_t^2(x,x_0+c(t_0-s))-2c\omega_x\omega_t\right]$$

$$-\frac{c}{2}\left[\omega_t^2+c^2\omega_x^2+2c\omega_x\omega_t\right]$$

$$=-\frac{c}{2}\left(\omega_t(x,x_0+c(t_0-s))-c\,\omega_x(x,x_0+c(t_0-s))\right)^2-$$

$$\frac{c}{2}\left(\omega_t(x,x_0-c(t_0-s))+c\,\omega_x(x,x_0-c(t_0-s))\right)^2\leq 0$$

Άρα, $E(s) \leq E(0) = 0 \quad , \quad 0 < s \leq t_0$

Δηλαδή, $\omega_t = 0$ κ $\omega_x = 0$.

$$\Downarrow$$

$$\omega(x_0, t_0) = 0. \blacksquare$$

$$\text{———} \circ \text{———} \qquad \square$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3ο

• **Άσκ. 1** : Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ):

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \ , \ x>0 \ , \ t>0$$

Α.Σ: $u(x,0) = x^3 \ , \ x>0$

$u_t(x,0) = 0 \ , \ x>0$

Σ.Σ: $u(0,t) = 0 \ , \ t>0$

Λύση:

Αφού έχω Dirichlet σ.σ στο $(0,t)$, θα κάνω περιττή επέκταση στην συνάρτηση $\phi(x) = x^3$, $x \geq 0$, δηλ.

$$x^3 = \phi_{\pi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases} \ , \ x \in \mathbb{R} \quad \kappa \quad \varphi_{\pi}(x) = 0$$

Η λύση του προβλήματος (έχουμε δει) ότι έχει την μορφή:

$$U(x,t) = u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi_{\pi}(x+ct) + \phi_{\pi}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0 \, dx$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+ct)^3 + (x-ct)^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 + 3c^2x^2t + 3cxt^2 + c^3t^3 + x^3 - 3c^2x^2t + 3c^2xt^2 - c^3t^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x^3 + 6cx^2t\right) = x^3 + 3cx^2t \ , \ x>0, \ t>0 \ . \ \blacksquare$$

• **Άσκ. 2** : Αποδείξτε ότι το Π.Α.Σ.Τ. :

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \ 0<x<1, \ t>0$$

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ 0<x<1$$

$$u_t(x,0) = \varphi(x) \ , \ 0<x<1$$

$$u(0,t) = h_1(t) \ , \ t>0$$

$$u(1,t) = h_2(t) \ , \ t>0 \ ,$$

έχει το πολύ μια λύση. Οι ϕ, φ, h_1, h_2 ομαλές.

Λύση:

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις. Θέτω $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $x \in (0,1)$, $t>0$.

Τότε η w λύνει το αντίστοιχο πρόβλημα:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad , x \in (0,1), t > 0$$
$$w(x,0) = 0 \quad , x \in [0,1]$$
$$w_t(x,0) = 0 \quad , x \in [0,1]$$
$$w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad , t \geq 0$$

Θεωρώ την ενέργεια του συστήματος,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)]dx, \quad t \geq 0$$

Τότε, $E'(t) = \int_0^1 [w_t w_{tt} + c^2 w_x w_{xt}]\,dx$

$$= \int_0^1 [w_t w_{tt} + c^2 w_x (w_t)_x]\,dx$$

$$= \int_0^1 [w_t w_{tt} - c^2 w_{xx} w_t]\,dx + c^2 [w_x w_t]_0^1$$

$$= \int_0^1 [\underbrace{w_{tt} - c^2 w_{xx}}_{=0}]\, w_t\, dx + c^2 (w_x(1,t) w_t(1,t) - w_x(0,t) w_t(0,t))$$

Όμως, $w(1,t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} w(1,t) = 0 \Rightarrow w_t(1,t) = 0$

κ $w(0,t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} w_t(0,t) = 0 \Rightarrow w_t(0,t) = 0$

Άρα, $E'(t) = 0$, $t \geq 0$

Οπότε, $E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 [w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)]dx = 0$,

αφού $w_t(x,0) = 0$ κ $w_x(x,0) = 0$.

Οπότε, $E(t) = 0$ κ επομένως: $w_t \equiv 0$ κ $w_x \equiv 0$ στο $[0,1] \times [0,+\infty)$.

Τελικά, επειδή $\exists\, \xi_t \in (0,t)$:

$$\frac{w(x,t) - w(x,0)}{t-0} = w_t(x,\xi_t) = 0, \text{ Άτοπο!}$$

• $\boxed{\text{Ασκ. 3}}$: Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ :

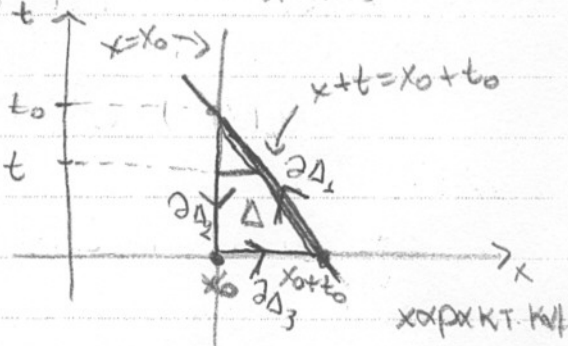
$$u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = f(x,t) \;,\; x\in\mathbb{R},\; t>0.$$
$$u(x,0)=0 \;,\; x\in\mathbb{R}.$$
$$u_t(x,0)=0 \;,\; x\in\mathbb{R} \;,$$

όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Λύση :

Η λύση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί με 2 τρόπους, με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών (αλλαγή συστήματος συντεταγμένων) ή με την χρήση των ταυτοτήτων του Green.

Θα λύσω το πρόβλημα με Green.



χαρακτ. καμ:
$x=x_0$ κ
$x+t=x_0+t_0$

Η ταυτότητα του Green στο Δ, δίνει:

$$\iint_\Delta \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right] dx\,dt = $$

$$= \int_{\partial\Delta} [Q\,dt + P\,dx]$$

Επιλέγω, $Q(x,t) = -u_t(x,t)$ κ $-P(x,t) = u_t(x,t) \Rightarrow P(x,t) = -u_t(x,t)$.

Οπότε, έχω :

$$\iint_\Delta [-u_{xt}(x,t) + u_{tt}(x,t)]\,dx\,dt = \int_{\partial\Delta} [-u_t(x,t)\,dt - u_t(x,t)\,dx]$$

$$\Rightarrow \iint_\Delta f(x,t)\,dx\,dt = -\int_{\partial\Delta} u_t(x,t)(dt+dx)$$

Όμως, στο $\partial\Delta_1$: $x+t = x_0+t_0 \Rightarrow dx+dt=0$, οπότε

$$\int_{\partial\Delta_1} u_t(x,t)(dt+dx) = 0 \quad \text{και}$$

στο $\partial\Delta_2$: $x=x_0 \Rightarrow dx=0$, οπότε $\displaystyle\int_{\partial\Delta_2} u_t(x,t)(dx+dt) = \int_{\partial\Delta_2} u_t(x,t)\,dt$

$$= \int_{\partial\Delta_2} du = u(x_0,0) - u(x_0,t_0) = -u(x_0,t_0) \quad \text{και, τέλος,}$$

στο $\partial\Delta_3$: $t=0$, άρα $u_t=0$, δηλαδή

$$\int_{\partial\Delta_3} u_t\,(dx+dt)=0..$$

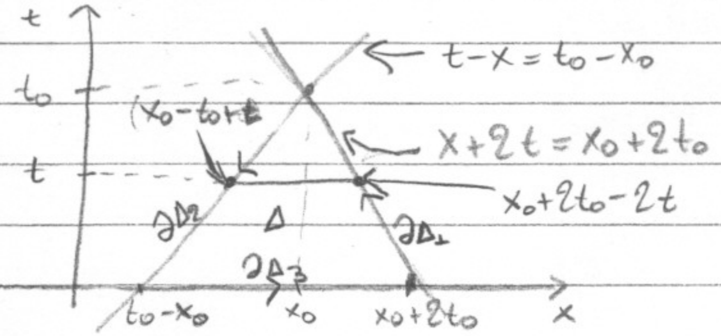
Τελικά, $$u(x_0,t_0)=\iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt=\int_0^{t_0}\int_{x_0}^{x_0+t_0-t} f(x,t)\,dx\,dt. \ \blacksquare$$

• $\boxed{\text{Ασκ. 4}}$: Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ:

$$2u_{xx}(x,t)-u_{tt}(x,t)+u_{xt}(x,t)=f(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R},$$ όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Λύση:

Θα λύσω το πρόβλημα με την χρήση της ταυτότητας του Green



Οι χαρακτ. καμπύλες που διέρχονται από το (x_0,t_0) είναι:
$t-x=t_0-x_0$
$2t+x=2t_0+x_0$.

Άρα, επιλέγω:
$Q(x,t)=2u_x(x,t)+u_t(x,t)$ και
$-P(x,t)=-u_t(x,t) \Rightarrow P(x,t)=u_t(x,t)$.

$du=u_x\,dx+u_t\,dt$

Green: $$\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right]dx\,dt=\int_{\partial\Delta}[Q\,dt+P\,dx],$$ άρα έχω:

$$\iint_{\Delta}[2u_{xx}+u_{tx}-u_{tt}]\,dx\,dt=\int_{\partial\Delta}[(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx]$$

$$\Leftrightarrow \iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt=\int_{\partial\Delta}[(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx]$$

Όμως, στο $\partial\Delta_1$: $2t+x=2t_0+x_0 \Rightarrow 2\,dt+dx=0$, οπότε

$$(2u_x+u_t)dt+u_t dx = 2u_x dt + u_t dt + u_t dx$$
$$= 2u_x\left(-\frac{dx}{2}\right) + u_t dt + u_t(-2dt)$$
$$= -u_x dx + u_t dt - 2u_t dt = -u_x dx - u_t dt$$
$$= -(u_x dx + u_t dt) = -du$$

Άρα, $\displaystyle\int_{\partial\Delta_1}\left[(2u_x+u_t)dt + u_t dx\right] = -\int_{\partial\Delta_1} du = -u(x_0,t_0)+u(x_0+2t_0,0)$

$$= -u(x_0,t_0).$$

Στο $\partial\Delta_2$: $t-x = t_0-x_0 \Rightarrow dt-dx=0$, οπότε:
$$(2u_x+u_t)dt+u_t dx = 2u_x dt + u_t dt + u_t dx$$
$$= 2u_x dx + u_t dt + u_t dt = 2(u_x dx + u_t dt) = 2du$$

Άρα, $\displaystyle\int_{\partial\Delta_2}\left[(2u_x+u_t)dt + u_t dx\right] = \int_{\partial\Delta_2} 2du =$

$$= 2u(x_0-t_0,0) - 2u(x_0,t_0) = -2u(x_0,t_0).$$

Στο $\partial\Delta_3$: $t=0$, $u=0 \Rightarrow u_x=0$ κ $u_t=0$, οπότε:

$$\int_{\partial\Delta_3}\left[(2u_x+u_t)dt + u_t dx\right] = 0.$$

Οπότε, συνολικά έχω,

$$u(x_0,t_0) = -\frac{1}{3}\iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt = -\frac{1}{3}\int_0^{t_0}\int_{x_0-t_0-t}^{2t_0+x_0-2t} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Τέλος φυλ.

□

Εξίσωση Θερμότητας (ομογενής)

- $\boxed{\begin{array}{l} u_t = K u_{xx}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ x\in\mathbb{R} \end{array}}$, $K\geq 0$, K σταθερά $\Big]$ (⊛)

- Αν u η λύση της ⊛.
Υπάρχουν λύσεις που προκύπτουν από την u, όπως οι συμμετρίες του διαφορικού τελεστή,

$u+c\,,\ c\in\mathbb{R}$

$\forall d\in\mathbb{R},\ du$ $\Big] \leftarrow$ είναι αποτελέσματα της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή.

$\forall u,v,\ u+v$

$L : A \to A$

$L(u+v) = L(u)+L(v)$

$L(du) = d\,L(u)$

$L(u) = u_t - K u_{xx}$

- Αν $f(t)$ λύνει την ⊛ τότε και η $f(t+c)$ την λύνει.

- Άρα, αν $u(x,t)$ λύση, τότε (συμμετρίες του διαφ. τελεστή):

(Ι) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $u(x+\alpha, t+\beta)$ είναι, επίσης, λύση της ⊛

(ΙΙ) $u(dx, d^2t)$ είναι λύση, επίσης. $\left(\begin{array}{l}\text{π.χ.: } u_t = u_{xxx}\,,\ x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.\ \text{Αν } u \\ \text{λύση} \Rightarrow u(dx,\lambda^3 t)\ \text{λύση}\end{array}\right)$

Απόδειξη στο ΙΙ :

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(dx, \mu t) \\ &= u(y,s) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} y = dx &\Rightarrow x = \frac{y}{d}\,,\ d\in\mathbb{R} \\ s=\mu t &\Rightarrow t = \frac{s}{\mu}\,,\ \mu>0 \end{aligned}$$

$u_s(y,s) = K u_{yy}(y,s)$

Αλλαγή συστήματος συντ.:

$$u_s(y,s) = v_t(x,t)\frac{dt}{ds} + v_x(x,t)\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\mu}v_t$$

$$u_y = v_t\frac{dt}{dy} + v_x\frac{dx}{dy} = \frac{1}{d}v_x$$

Άρα, $u_s(y,s) = K u_{yy}(y,s) \Rightarrow \frac{1}{\mu}v_t(x,t) = K\frac{1}{d^2}v_{xx}(x,t)$

Δηλαδή, $v_t = \frac{\mu}{d^2}K v_{xx}$, αν $\mu = d^2$ ή ακόμη αν $\frac{\mu}{d^2}K=1$.

- **Λύση του προβλήματος Cauchy**

$$\boxed{\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t>0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

– Αρχικά, θα λύσω το πρόβλημα:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = \delta_0$$

όπου $\delta_0 :=$ μάζα dirack, με $\delta_0(x) = 0$, $x \neq 0$ κ $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)dx = 1$
(η λύση θα είναι συμμετρική ως προς το μηδέν)

Έχω,
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)\,dx$$
$$= \Big[u_x(x,t)\Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

και $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = 1$

Θέτω $v = d^{\beta} u(dx, d^2 t)$ κ έχω:
$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)\,dx = 1 \iff d^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} u(dx, d^2 t)\, dx = 1$$

Θα μπορούσα να επιλέξω $d^2 t = 1 \iff d = \frac{1}{\sqrt{t}}$, τότε η λύση:
$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\beta} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

Άρα, την λύση την ψάχνουμε στην μορφή:
$$v(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{\beta}{2}}}\, g\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

Οπότε, $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, g\left(\frac{x^2}{t}\right)}$ Θέτω $\frac{x^2}{t} = \xi$, $\begin{array}{l} t \to 0 \\ \xi \to +\infty \end{array}$

κ $\lim_{\xi \to +\infty} g(\xi) = 0$

κ $g(0) > 0$ (αφού το $\frac{g(0)}{\sqrt{t}}$ απειρίζεται)

Έχω: $u_t = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} g(\xi) - x^2 t^{-\frac{5}{2}} g'(\xi)$

$$u_x = 2\frac{x}{t^{3/2}} g'(\xi)$$

$$u_{xx} = \frac{2}{t^{3/2}} g'(\xi) + 4\frac{x^2}{t^{5/2}} g''(\xi)$$

$$= \frac{2}{t^{3/2}}\left[g'(\xi) + 2\xi g''(\xi)\right].$$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε:

$$-\frac{1}{2} t^{-3/2} g(\xi) - \frac{1}{t^{3/2}} \xi g'(\xi) = \frac{2}{t^{3/2}}\left[g'(\xi) + 2\xi g''(\xi)\right]$$

$$\Rightarrow 2\left[g'(\xi) + 2\xi g''(\xi)\right] + \frac{1}{2} g(\xi) + \xi g'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow 4g'(\xi) + 8\xi g''(\xi) + g(\xi) + 2\xi g'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(\xi) + 4g'(\xi)}_{\overset{\shortparallel}{Q(\xi)}} + 2\xi\left(\underbrace{g'(\xi) + 4g''(\xi)}_{\overset{\shortparallel}{Q'(\xi)}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow Q + 2\xi Q' = 0 \Rightarrow \frac{Q'(\xi)}{Q(\xi)} + \frac{1}{2\xi} = 0$$

$$\Rightarrow \ln Q(\xi) + \frac{1}{2}\ln(\xi) = c \Rightarrow \ln\left(Q(\xi)\xi^{1/2}\right) = c$$

$$\Rightarrow Q(\xi)\xi^{1/2} = c \Rightarrow Q(\xi) = \frac{c}{\xi^{1/2}}$$

$$\Rightarrow g(\xi) + 4g'(\xi) = \frac{c}{\xi^{1/2}} \Rightarrow g(\xi) + 4g'(\xi) = c\xi^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} g(\xi) + g'(\xi) = \frac{c}{4}\xi^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{\xi}{4}} g(\xi) + e^{\frac{\xi}{4}} g'(\xi) = \frac{c}{4} e^{\frac{\xi}{4}} \xi^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left(e^{\frac{\xi}{4}} g(\xi)\right) = \frac{c}{4}\frac{d}{d\xi}\left(\int_0^{\xi} e^{\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds\right)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\xi}{4}} g(\xi) = \frac{c_1}{4}\int_0^{\xi} e^{s/4} s^{-1/2}\,ds + c_2$$

$$\Rightarrow g(\xi) = \underbrace{\frac{c_1}{4} e^{-\frac{\xi}{4}}\int_0^{\xi} e^{s/4} s^{-1/2}\,ds}_{0} + c_2 e^{-\frac{\xi}{4}}$$

(αφού $4g'+g=c_1$ και $4g'+g \xrightarrow{\xi \to 0} 0$ τότε $c_1 \to 0$)

$$\Rightarrow g(\xi) = c_2 e^{-\xi/4}$$

Οπότε, $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{t^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} c_2 e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1$

$$\Rightarrow \frac{2}{t^{1/2}}\int_0^{\infty} c_2 e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1 \qquad x = 2\sqrt{t}\,y,\quad dx = 2\sqrt{t}\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{2}{t^{1/2}}\int_0^{\infty} c_2 e^{-y^2}\,2\sqrt{t}\,dy = 1$$

$$\Rightarrow c_2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{4}$$

Όμως, $I = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, γιατί: $\xi^2 = x \Rightarrow dx = 2\xi\,d\xi \Rightarrow d\xi = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

και $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1+\alpha}\,dx$

Δηλαδή, $I = \int_0^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1+\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Οπότε, $c_2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Τελικά, η λύση είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(c_2 e^{-\frac{\xi}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

Στην θέση y: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$

Οπότε, κατέληξα στην λύση του προβλήματος: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$,

η οποία είναι: $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy}$$

Άσκηση:

· Να λυθεί το πρόβλημα: $$\boxed{\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad x>0,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x\geq 0 \\ u(0,t)=0, \quad t\geq 0 \end{array}}$$

Λύση:

Κάνω περιττή επέκταση: $f_\pi(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x<0 \end{cases}$

Η λύση έχει την μορφή:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f_\pi(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(-y)\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy \right]$$

Θέτω $-y = z \Rightarrow -dy = dz$, και έχω:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+z)^2}{4t}} f(z)\,dz + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[\int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) f(y)\,dy \right]}$$

Εξισώσεις Θερμότητας (μη ομογενείς)

- $\boxed{\begin{array}{l} w_t = w_{xx} + f(x,t) \\ w(x,0) = g(x) \end{array}}$

Δηλαδή, έχω να λύσω τα συστήματα:

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = g(x) \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} v_t = v_{xx} + f(x,t) \\ v(x,0) = 0 \end{array}$$

Και, τελικά, $w = u + v$ ∎

- $\boxed{\text{Λύση}}$ του προβλήματος: $\boxed{\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{array}}$

Αρχικά, θα λύσω το: $\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + \delta_{(x_0,t_0)} \\ u(x,0) = 0 \end{array}$

Φτιάχνω την δέλτα κατά μάζα dirac στο (y,s), δηλαδή:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(y,s) \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \, dy \, ds$$ ∎

- $\boxed{\text{Άσκηση}}$: Να λυθεί το πρόβλημα: με $u = u(x,y,t)$,

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + u_{yy} & ,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0 \\ u(x,y) = f(x,y) & \end{array}$$

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{4t}} f(\alpha,\beta) \, d\alpha \, d\beta$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{2/2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|X-Y|^2}{4t}} f(Y) \, dY$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{2/2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|X-Y|^2}{4t}} f(Y) \, dY$$ ∎

Μέχρι τώρα είχαμε ασχοληθεί για την εύρεση λύση της κυματικής εξίσωσης κ την εξίσωση θερμότητας σε άφραχτα χωρία.

➤ Μέθοδος του Fourier (ή μέθοδος των χωριζόμενων μεταβλητών)

- **Εξίσωση θερμότητας (ομογενής) σε φραγμένο χωρίο:**
  ↳ εύρεση λύσης με την μέθοδο του Fourier.

$$\boxed{\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad 0<x<\pi, \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \end{array} \quad , \; t \geq 0}$$

- Στόχος: Να βρούμε "πολλές" λύσεις του: $u_t = u_{xx}$, $0<x<\pi$, $t>0$
  $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

Τις λύσεις τις ψάχνουμε στην μορφή:

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

κ $u(0,t)=0 \Rightarrow X(0)T(t)=0$

Αναγκαστικά, έχω $X(0)=0$ (διότι, αν $T(t)=0$, θα είχα μόνο την μηδενική λύση).

Άρα, $\boxed{\begin{array}{l} u(x,t) = X(x)T(t) \\ X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{array}}$

Η u πρέπει να λύνει, επίσης, κ την εξίσωση:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$u_t(x,t) = X(x)T'(t)$$
$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$
$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

Οπότε, $u_t = u_{xx} \Rightarrow X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \xrightarrow{\text{διαιρώ με } X(x)T(t)}$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \forall t>0, \; \forall\, 0<x<\pi$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{κ} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda}$, $X(0)=X(\pi)=0$, λ σταθερά

↳ ιδιοτιμή

Οπότε, έχω το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\boxed{\begin{aligned} &X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<\pi,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ &X(0) = X(\pi) = 0 \end{aligned}}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\boxed{p^2 - \lambda = 0}$

(I) Αν $\boxed{\lambda = 0}$: $X''(x) = 0$. Τότε $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

Όμως, $X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ κ

$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα, $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος.

(II) Αν $\boxed{\lambda > 0}$: $p^2 = \lambda \Rightarrow p = \pm\sqrt{\lambda}$.

Τότε $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}, \quad 0 \le x < \pi$$

κ $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$ $\Bigg] \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αν $\det \neq 0$, τότε έχω τετριμμένες λύσεις

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\left(1 - e^{2\sqrt{\lambda}\pi}\right) \neq 0, \ \forall \lambda > 0.$$

Άρα, $c_1 = c_2 = 0$

Άρα, για $\lambda > 0$ όχι ιδιοτιμή του προβλήματος.

(III) Αν $\boxed{\lambda < 0}$: $p^2 = \lambda \Rightarrow p = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$e^{\pm\sqrt{-\lambda}\, i x} = \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) \pm i \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

Τότε, $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

Όμως, $\left.\begin{matrix} X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\,\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow$

$c_1 = 0$
πρέπει $c_2 \neq 0$ (για να έχω λύση), άρα
$$\sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,\pi = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow -\lambda = k^2$$

Οπότε, $\underbrace{\lambda = -k^2}_{\text{ιδιοτιμή}} \longrightarrow \underbrace{X_k(x) = \sin(kx)}_{\text{ιδιοσυνάρτηση}},\ k \in \mathbb{N}$

Δηλαδή, $\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2$
$$\Rightarrow \ln T_k(t) = -k^2 t + c \Rightarrow T_k(t) = e^{-k^2 t}$$

Οπότε, για το πρόβλημα: $\boxed{\begin{matrix} u_t = u_{xx}, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t>0 \end{matrix}}$,

βρήκα λύσεις:
$$\boxed{\begin{aligned} u_k(x,t) &= X_k(t)\,T_k(t) \\ &= e^{-k^2 t}\sin kx,\quad 0<x<\pi,\ t>0,\ k\in\mathbb{N} \end{aligned}}$$

- <u>Η γενικότερη λύση</u> του προβλήματος $\begin{matrix} u_t = u_{xx}, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t>0 \end{matrix}$

έχει την μορφή:
$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t}\sin(kx)},$$

Τα c_k, $k\in\mathbb{N}$, θα επιλεγούν κατάλληλα.

- <u>Ερώτημα:</u> $\exists\, c_k$ τ.ω. $u(x,0) = f(x)$, $x\in[0,\pi]$;
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) = f(x),\ x\in[0,\pi]$$
$$\int_0^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2kx)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Άρα, $\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx \overset{m \neq k}{=\!=} \delta_{k,m}\frac{\pi}{2}$

$m \in \mathbb{N}$: $f(x)\sin(mx) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(mx)\sin(kx)$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(kx)\,dx$

$\overset{m=k}{=\!=} c_m \int_0^{\pi} \sin^2(mx)\,dx = c_m \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}$

Άρα, $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t}\sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}$ ■

• **Άσκηση** : Να λυθεί η εξίσωση θερμότητας :

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}, & x>0,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x>0 \\ u(0,t) = 0, & t>0 \end{array}}$$

Λύση:

Θα την λύσω με την μέθοδο του Fourier κ η λύση θα έχει την μορφή:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$X(0) = 0$$

Έχω δηλαδή : $X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \quad x>0, t>0$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Έχω να λύσω τα προβλήματα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$
$$X(0) = 0.$$

Θα λύσω, αρχικά, το : $X''(x) + \lambda X(x) = 0$
$X(0) = 0$

(I) $\lambda = 0$: $\left.\begin{array}{l} X(x) = c_1 x + c_2 \\ X(0) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow X_\lambda(x) = c_1 x$

(II) $\lambda < 0$: $\left.\begin{array}{l} X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \\ X(0) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Downarrow c_1 = -c_2$

Άρα, $X_\lambda(x) = c_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \right)$

απορρίπτεται, διότι αν $x \to +\infty$ τότε η λύση απειρίζεται. Οι λύσεις πρέπει να είναι φραγμένες (για το μονοσήμαντο των λύσεων).

(III) $\lambda > 0$: $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x)$
$X(0) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα, $X_\lambda(x) = \sin(\sqrt{\lambda}\,x)$.

Τώρα, θα λύσω το: $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \Rightarrow T_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$

Οπότε, $u(x,t) = e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}\,x)$, $\lambda \geq 0$
$= e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$

Αναλυτικά, $u(x,t) = \int_0^\infty c(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)\, d\lambda$

Για να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, η συνάρτηση c πρέπει να προσδιοριστεί, ώστε: $u(x,0) = f(x)$, δηλ.

$$f(x) = \int_0^\infty c(\lambda) \sin(\lambda x)\, d\lambda$$

• **Κυματική Εξίσωση** σε φραγμένο χωρίο

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0<x<2\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t) & \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) & ,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ u_t(x,0) = g(x) & ,\ 0<x<2\pi \end{array}}$$

- Περιοδική συνάρτηση:
  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με περίοδο 2π

$$f(x+2\pi) = f(x)$$
$$f(0) = f(2\pi)$$
$$f'(0) = f'(2\pi).$$

- Τις λύσεις τις ψάχνουμε στην μορφή:

$$\boxed{u(x,t) = X(x)\,T(t)}$$

Αντικαθιστώ, $X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

Θέτω: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \dfrac{T''(t)}{T(t)}$

και $X(0) = X(2\pi)$
$X'(0) = X'(2\pi)$

Οπότε έχω, $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Χαρακτ. εξίσωση: $\rho^2 + \lambda = 0$

[I] $\boxed{\lambda = 0}$: Τότε, $X''(x) = 0$, άρα
$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\left.\begin{array}{l} X(x) = c_1 x + c_2 \\ X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{array}\right] \Leftrightarrow c_1 = 0$

Άρα, το $\lambda=0$ είναι ιδιοτιμή της εξίσωσης: $X_0(x)=1$

(II) $\boxed{\lambda<0}$:

$p^2=-\lambda \iff p=\pm\sqrt{-\lambda}$

Τότε, $\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}$, τ.ω. $X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

κ $X(0)=X(2\pi) \iff c_1+c_2=c_1e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$

$\iff c_1(e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}-1)+c_2(e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}-1)=0$ (1)

και $X'(0)=X'(2\pi) \iff c_1\sqrt{-\lambda}-c_2\sqrt{-\lambda}=\sqrt{-\lambda}e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}c_1-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$

$\iff c_1-c_2=c_1e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}-c_2e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$

$\iff c_1(e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}-1)+c_2(1-e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}})=0$ (2)

Από (1) κ (2) $\Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow X(x)\equiv 0$

Άρα για $\lambda<0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος.

(III) $\boxed{\lambda>0}$:

$p=\pm\sqrt{\lambda}$, τότε $\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$, και

$X(0)=X(2\pi) \iff c_1=c_1\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)$

$\iff c_1(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$ (1) και

$X'(0)=X'(2\pi) \iff -c_1\sqrt{\lambda}\cdot 0+c_2\sqrt{\lambda}=-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+\sqrt{\lambda}c_2\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)$

$\iff -c_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1)=0$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \begin{pmatrix}\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 & \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Αναγκαστικά θα πρέπει $\det A=0 \iff$

$(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1)^2+\sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi)=0 \iff$

$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=1$ και $\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$

$\Updownarrow$

$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=\cos(2\kappa\pi) \iff \sqrt{\lambda}2\pi=2\kappa\pi \iff \lambda_\kappa=\kappa^2$, $\kappa=1,2,\dots$

$\uparrow$

ιδιοτιμή

$\lambda_k = k^2$: $\cos kx$,
$\sin kx$

Οπότε, $X_k(x) = \delta_k \cos kx + c_k \sin kx$

Τώρα θα λύσω το πρόβλημα:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

(I) Για $\lambda_0 = 0 \Rightarrow T''(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = c_1 t + c_2$

(II) $\frac{1}{c^2}\frac{T_k''(t)}{T_k(t)} = -k^2 \iff T_k''(t) + (kc)^2 T_k(t) = 0$

$$\Rightarrow T_k(t) = \cos(kct) \quad \text{ή} \quad T_k(t) = \sin(kct)$$

Οπότε, $T_k(t) = (\alpha_k \cos(kct) + \beta_k \sin(kct))$.

Επομένως,

$$u_0(x,t) = \alpha_0 t + \beta_0$$

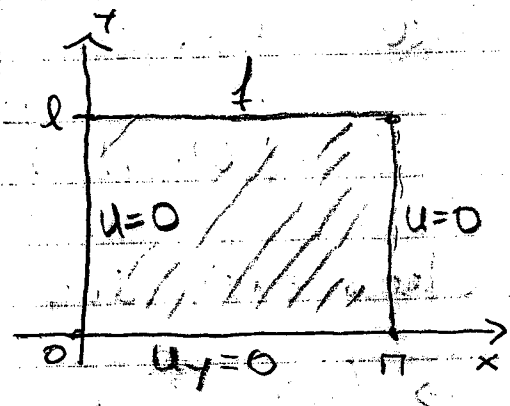
$$\Rightarrow u_k(x,t) = (\alpha_k \cos(kct) + \beta_k \sin(kct))(\delta_k \cos kx + c_k \sin kx), \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Τελικά, η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u(x,t) = \alpha_0 t + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kct + \beta_k \sin kct)(\delta_k \cos kx + c_k \sin kx)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- $\boxed{\text{Εξίσωση του Laplace}}$ (Αρμονικές Συναρτήσεις)

$$\boxed{\begin{aligned} &u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi, \ 0<y<l \\ &u(0,y)=0, \quad 0<y<l \\ &u_y(x,0)=0, \quad 0<x<\pi \\ &u(\pi,y)=0, \quad 0<y<l \\ &u(x,l)=f(x) \leftarrow \text{Την βάζουμε στο τέλος} \end{aligned}}$$



- Ψάχνουμε λύσεις στην μορφή:

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y)$$
$$u_{xx}(x,y)=X''(x)\,Y(y)$$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε.: $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0, \quad 0<x<\pi, \ 0<y<l$$

κ $X(0)=0$ (αφού $u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)Y(y)=0 \Rightarrow X(0)=0$)
$X(\pi)=0$
$Y'(0)=0$

Θέτω, $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$ και $X(0)=X(\pi)=0$ $\Bigg] \Rightarrow$ $\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ &X(0)=X(\pi)=0 \end{aligned}$ $\Bigg] \Rightarrow \lambda_k=k^2, \ 0<x<\pi$.

$\Rightarrow X_k(x)=\sin kx$

και $\begin{aligned} &Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \\ &Y'(0)=0, \quad 0<y<l \end{aligned}$ $\Bigg] \Rightarrow$ $\begin{aligned} &Y_k''(y)-k^2 Y_k(y)=0 \\ &Y'(0)=0 \end{aligned}$ $\Bigg] \Rightarrow$

$$Y_k(y)=c_1e^{ky}+c_2e^{-ky} \Rightarrow Y_k(y)=c\,(e^{ky}+e^{-ky}$$

$$Y_k'(y)=kc_1e^{ky}-kc_2e^{-ky}$$

κ $Y_k'(0)=0 \Leftrightarrow k(c_1-c_2)=0 \Rightarrow c_1=c_2$.

Επομένως, $u_k(x,y) = \sin(kx)\,(e^{ky} + e^{-ky})$.

Η γενική λύση είναι:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)(e^{ky} + e^{-ky})}$$

Όμως έχω, $u(x,l) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{kl} + e^{-kl}) \sin kx$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k (e^{kl} + e^{-kl})}_{\bar{c}_k} \qquad \left(\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{km} \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(mx) f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \bar{c}_m$$

$$\Rightarrow \bar{c}_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(mx) f(x)\,dx$$

Οπότε, $c_k = \dfrac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}{e^{kl} + e^{-kl}}$.

Επομένως,

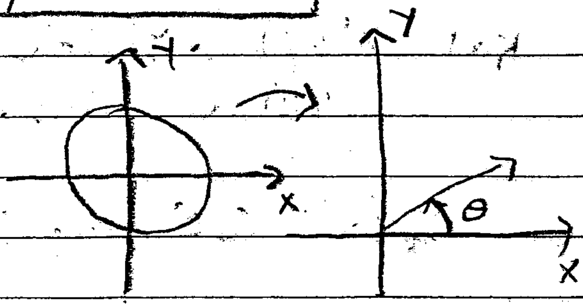
$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}{e^{kl} + e^{-kl}} (e^{ky} + e^{-ky}) \sin kx$$

• $\boxed{\text{Πρόβλημα}}$: Να βρεθεί η αρμονική συνάρτηση:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = f(x,y), & x^2+y^2=1 \end{array}}$$

Λύση:

Θα κάνω αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.



$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{d\rho}{dx} = \dfrac{x}{\rho}$ και

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{y}{\rho}$$

$$u(x,y) = U(\rho,\theta)$$

$$u_x = \frac{dU}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dU}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow (1+\tan^2\theta)\theta_x = -\frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\theta_x = -\frac{y}{x^2}$$

Έχω, $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\rho^2}$ κ' $\frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{\rho^2}$

Οπότε, $u_x = U_\rho \frac{x}{\rho} - U_\theta \frac{y}{\rho^2}$

$$u_{xx} = U_\rho\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right) + \frac{x}{\rho}\left[U_{\rho\rho}\frac{x}{\rho} - U_{\rho\theta}\frac{y}{\rho^2}\right] +$$

$$2U_\theta \frac{yx}{\rho^4} - \frac{y}{\rho^2}\left[U_{\theta\rho}\frac{x}{\rho} - U_{\theta\theta}\frac{y}{\rho^2}\right]$$

$$u_y = U_\rho \frac{\partial\rho}{dy} + U_\theta \frac{d\theta}{dy} = U_\rho \frac{y}{\rho} + \frac{x}{\rho^2}U_\theta$$

$$u_{yy} = U_\rho\left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right) + \frac{y}{\rho}\left[U_{\rho\rho}\frac{y}{\rho} + U_{\rho\theta}\frac{x}{\rho^2}\right] -$$

$$\frac{xy}{\rho^4}U_\theta + \frac{x}{\rho^2}\left[U_{\theta\rho}\frac{y}{\rho} + U_{\theta\theta}\frac{x}{\rho^2}\right]$$

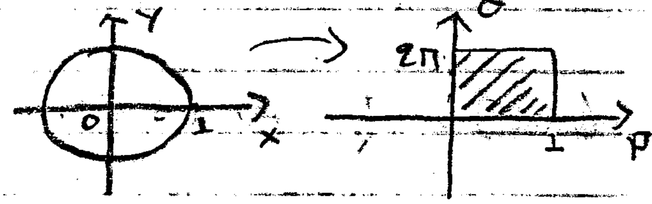
Άρα, $u_{xx} + u_{yy} = 0 \iff$

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta} = 0$$ $\leftarrow$ Λαπλασιανή σε πολικές συντ/νες. ☒

• **Λύση** του προβλήματος: $\boxed{\begin{array}{l} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ x^2+y^2<1 \\ u(x,y)=f(x,y),\ x^2+y^2=1 \end{array}}$

Κάνω χρήση πολικών:

$u(x,y)=U(\rho,\theta)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$



Καταλήγω, $U_{\rho\rho}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho}U_{\rho}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta}(\rho,\theta)=0$, $\rho\in(0,1)$, $\theta\in(0,2\pi)$

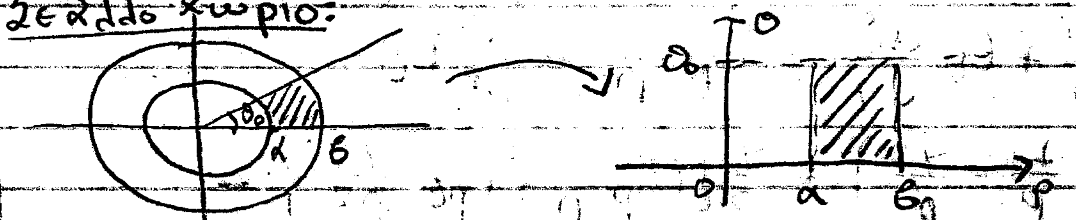
κ $U(1,\theta)=g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$, $0\le\theta\le\pi$

Ψάχνω λύσεις στην μορφή:

$U(\rho,\theta)=A(\rho)B(\theta)$

κ $B(0)=B(2\pi)$
$B'(0)=B'(2\pi)$ $\quad\left[\ \underset{\text{περιοδ. συναρτ.}}{B(\theta)=B(\theta+2\pi)}\ \right]$

Σε άλλο χωρίο:



$0<\theta<\theta_0$
$\alpha<\rho<\beta$

$U(\rho,\theta_0)$, $\alpha<\rho<\beta$	$U(\rho,0)$, $\alpha<\rho<\beta$
$U(\alpha,\theta)$, $0<\theta<\theta_0$	$U(\beta,\theta)$, $0<\theta<\theta_0$

Καταλήγω στην Δ.Ε:

$$A''(\rho)B(\theta)+\frac{1}{\rho}A'(\rho)B(\theta)+\frac{1}{\rho^2}A(\rho)B''(\theta)=0$$

$$\Rightarrow \frac{A''(\rho)}{A(\rho)}+\frac{1}{\rho}\frac{A'(\rho)}{A(\rho)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho^2\frac{A''(\rho)}{A(\rho)}+\rho\frac{A'(\rho)}{A(\rho)}}_{\text{συνάρτηση του } \rho}+\underbrace{\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}}_{\text{συναρτ. του } \theta}=0$$

Τότε, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\dfrac{B''(\theta)}{B(\theta)} = -\lambda$, $0<\theta<2\pi$

$B(0) = B(2\pi)$
$B'(0) = B'(2\pi)$

Άρα, έχω:
$$p^2 A''(p) + p A'(p) - \lambda A(p) = 0, \quad 0<p<1$$

και
$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0, \quad 0<\theta<2\pi$$
$$B(0) = B(2\pi)$$
$$B'(0) = B'(2\pi)$$

<u>Ιδιοτιμές</u> $\longrightarrow$ <u>Ιδιοσυναρτήσεις</u>

$\lambda_0 = 0$: 1

$\lambda_k = k^2$: $\sin(k\theta)$, $\cos(k\theta)$, $k\in\mathbb{N}$

(i) <u>Για $\lambda_0 = 0$</u> : $p^2 A''(p) + pA'(p) = 0$

$\Longrightarrow pA''(p) + A'(p) = 0 \Rightarrow (pA'(p))' = 0$

$\Longrightarrow pA'(p) = c \Rightarrow A'(p) = \dfrac{c}{p}$

Άρα, $A(p) = c_1 \log p + c_2$

Θα πάρω $c_1 = 0$ επειδή η $\log p$ (όταν $p \to 0^+$) είναι μη φραγμένη κ απειρίζεται.

Άρα, $A(p) = 1$

(ii) <u>Για $\lambda = k^2$</u> : $\boxed{p^2 A_k''(p) + pA_k'(p) - k^2 A_k(p) = 0}$

<u>Διαφορική εξίσωση Euler</u>

Ψάχνω λύσεις : $A(p) = p^m$

$A'(p) = m p^{m-1}$

$A''(p) = m(m-1)p^{m-2}$

κ παίρνω:

$(p^m)' = m p^{m-1} \Rightarrow$
$p(p^m)' = m p^m$
κ $(p^m)'' = m(m-1)p^{m-2} \Rightarrow$
$p^2 (p^m)'' = m(m-1)p^m$

$m(m-1)p^m + mp^m - k^2 p^m = 0$

$\Rightarrow m(m-1) + m - k^2 = 0 \Rightarrow m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m = k \to p^k$
ή
$m = -k \to p^{-k}$

Η λύση, ρ^{-k}, απορρίπτεται διότι είναι αφραχτη στο 0.

$k^2 \longrightarrow \rho^k(\alpha_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$

Άρα,

$$U(\rho,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k(\alpha_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad \text{κ}$$

$$U(1,\theta) = g(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Δηλαδή, $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) = g(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$$

(τα ολοκλ. στα cos, sin είναι μηδέν)

$$\Rightarrow \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_k\int_0^{2\pi}\cos k\theta \cos m\theta\, d\theta$$
$$+ b_k\int_0^{2\pi}\cos m\theta \sin k\theta\, d\theta\Big) = \int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx)$ Σ.Ε. Dirichlet

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kx)$ Σ.Ε. Neumann

κ τα δύο $\to$ περιοδικές συναρτ.

$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$, $k=1,2,\dots$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$, $k=0,1,\dots$

Γενικά:

$\int_0^{\pi}\sin m\theta \cos k\theta\, d\theta = 0$, $m,k\in\mathbb{N}$

$\int_0^{\pi}\sin m\theta \sin k\theta\, d\theta = \delta_{m,k}\cdot\pi$, αν $m=k$.

Αν $m\neq k$, το ολοκλ. είναι μηδέν

Όταν, $\boxed{k=m}$:

$$\alpha_m\int_0^{2\pi}\cos^2(m\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow \alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$$\text{κ } b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(m\theta)d\theta, \ m\in\mathbb{N}.$$

$\cos(\theta\pm\phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

$\Downarrow$

$\cos\theta\cos\phi = \frac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$

• $\boxed{\text{Άσκηση}}$: Δίνεται το Π.Α.Σ.Τ.:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & u_t = u_{xx}\ ,\ 0<x<1\ ,\ t\geq 0 \\ \text{Σ.Σ. Diriclet}: & u(1,t)=0\ ,\ t>0 \\ \text{Σ.Σ. Robbin}: & u_x(0,t)+u(0,t)=0\ ,\ t>0 \end{array}}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Fourier για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης του προβλήματος. Προς τούτο, αποδείξτε αρχικά ότι οι θετικές ιδιοτιμές λ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} \quad (*)$$

Στη συνέχεια, αποδείξτε γραφικά (ή αλλιώς) ότι η εξίσωση $(*)$ έχει αριθμήσιμο το πλήθος λύσεις, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ με $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k = +\infty$ (με αύξοντα τρόπο, δηλ. $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$).

Επίσης, αποδείξτε ότι κ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ϕ_k, δίνονται από τον τύπο: $\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-1))$, $k=1,2,\dots$

Στη συνέχεια, εξετάστε αν έχει αρνητικές ιδιοτιμές κ πόσες.

Τελικά, εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος.

Λύση:

Ψάχνουμε λύσεις: $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$u(1,t)=0 \Rightarrow X(1)T(t)=0 \Leftrightarrow X(1)=0$$

$$u_x(0,t)+u(0,t)=0 \Leftrightarrow X'(0)T(t)+X(0)T(t)=0 \Rightarrow (X'(0)+X(0))T(t)=0$$

$$\Rightarrow X'(0)+X(0)=0$$

Άρα, $X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Leftrightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} \xRightarrow{\exists \lambda\in\mathbb{R}} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Άρα έχω τα Π.Α.Τ.: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ και $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$

$$X'(0)+X(0)=0$$
$$X(1)=0$$

Θα λύσω αρχικά το:
$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$X'(0)+X(0)=0$$
$$X(1)=0$$

με την μέθοδο του Fourier.

(I) $d>0$: $p^2+d=0 \Rightarrow p^2=-d=di^2$

$\Rightarrow p=\sqrt{d}\,i$ ή $p=-\sqrt{d}\,i$

$\downarrow$ $\cos\sqrt{d}x$ $\quad\quad$ $\downarrow$ $\sin\sqrt{d}x$

Οπότε, $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x)=c_1\cos(\sqrt{d}x)+c_2\sin(\sqrt{d}x)$

Όμως, $X(1)=0 \Leftrightarrow c_1\cos(\sqrt{d})+c_2\sin(\sqrt{d})=0$ και

$X'(0)+X(0)=0 \Leftrightarrow -c_1\sqrt{d}\sin(\sqrt{d}\cdot 0)+c_2\sqrt{d}\cos(\sqrt{d}\cdot 0)=0$

και $c_1\cos(\sqrt{d}\cdot 0)+c_2\sin(\sqrt{d}\cdot 0)=0$

Άρα, $c_2\sqrt{d}+c_1=0$

και $c_1\cos(\sqrt{d})+c_2\sin(\sqrt{d})=0$ $\Bigg] \Rightarrow$ ~~$c_1=c_2\sqrt{d}$~~ $-c_2\sqrt{d}\cos\sqrt{d}+c_2\sin(\sqrt{d})=0$

$\Rightarrow c_1=-c_2\sqrt{d}$

$c_2(\sin\sqrt{d}-\sqrt{d}\cos\sqrt{d})=0$

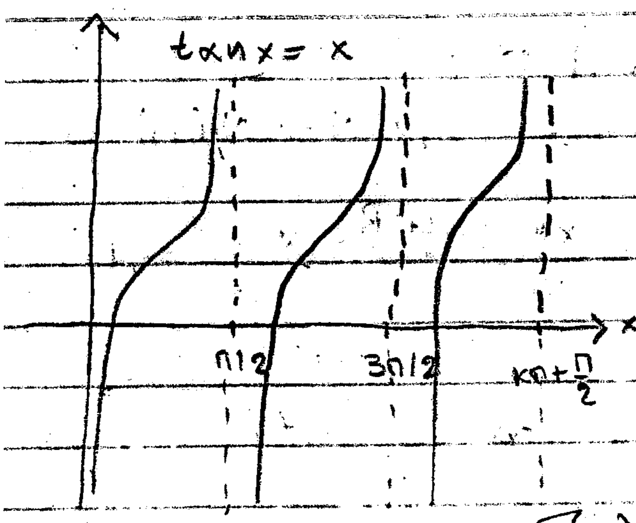
$c_2\neq 0$ $\Bigg] \Rightarrow \sin(\sqrt{d})-\sqrt{d}\cos\sqrt{d}=0$

$\Rightarrow \tan\sqrt{d}=\sqrt{d}$

Ισχυριζόμαστε ότι το d είναι τ.ω. $\cos(\sqrt{d})\neq 0$, γιατί αν $\cos(\sqrt{d})=0 \Rightarrow$ $\sin(\sqrt{d})=0$, αδύνατο!

$$\boxed{\begin{aligned} e^{px} &= e^{\sqrt{d}ix} \\ &= \cos\sqrt{d}x+i\sin\sqrt{d}x \end{aligned}}$$

Άρα $\tan(\sqrt{d})=\sqrt{d}$



$\lim_{k\to+\infty}\frac{X_k}{k\pi+\frac{\pi}{2}}=1 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty}\frac{\sqrt{d_k}}{(k+\frac{1}{2})\pi}=1$

$\tan\sqrt{d_k}=\sqrt{d_k}$

$\left(\begin{aligned}\sin A\cos B-\sin B\cos A= \\ \sin(A-B)\end{aligned}\right)$

Οπότε, $X_k(x)=c_2(\sin(\sqrt{d_k}x)-\sqrt{d_k}\cos(\sqrt{d_k}x))$

$=c_2\left(\sin(\sqrt{d_k}x)-\frac{\sin\sqrt{d_k}}{\cos\sqrt{d_k}}\cos(\sqrt{d_k}x)\right)$

$=\frac{c_2}{\cos(\sqrt{d_k})}\left[\sin(\sqrt{d_k}x)\cos\sqrt{d_k}-\sin\sqrt{d_k}\cos(\sqrt{d_k}x)\right]$

$=\frac{c_2}{\cos\sqrt{d_k}}\sin(\sqrt{d_k}(x-1))=\frac{c_2}{\cos\sqrt{d_k}}\sin(\sqrt{d_k}x-\sqrt{d_k})$

$X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=c_1x+c_2$

$X(1)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2$

Άρα, $X(x)=c_1(x-1)$

$\lambda=0 \Rightarrow X_0(x)=x-1.$

(II) $\lambda<0$: $p^2+\lambda=0 \Rightarrow p=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \exists c_1,c_2\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

κ $X(1)=0 \Leftrightarrow c_1e^{\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}}=0$

Οπότε,

$X(x)=\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

κ $X'(0)+X(0)=0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1-c_2)+c_1+c_2=0$ $\Big] \Rightarrow$

κ $X'(0)=\sqrt{-\lambda}(c_1-c_2)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(\sqrt{-\lambda}+1)c_1+(1-\sqrt{-\lambda})c_2=0\\ e^{2\sqrt{-\lambda}}c_1+c_2=0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}c_2=-e^{2\sqrt{-\lambda}}c_1\\ c_1[\sqrt{-\lambda}+1-e^{2\sqrt{-\lambda}}(1-\sqrt{-\lambda})]=0\end{array}$

$\Rightarrow \begin{array}{l}c_2=-e^{2\sqrt{-\lambda}}c_1\\ 1+\sqrt{-\lambda}-e^{2\sqrt{-\lambda}}(1-\sqrt{-\lambda})=0\end{array}$

Θέτω $\sqrt{-\lambda}=x>0$

Άρα, $1+x-(1-x)e^{2x}=0$ (1)

Παρατηρώ ότι το $x=1$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης. Οπότε, η (1) γίνεται: $\frac{1+x}{1-x}=e^{2x} \Leftrightarrow \frac{1+1+x-1}{1-x}=e^{2x} \Leftrightarrow$

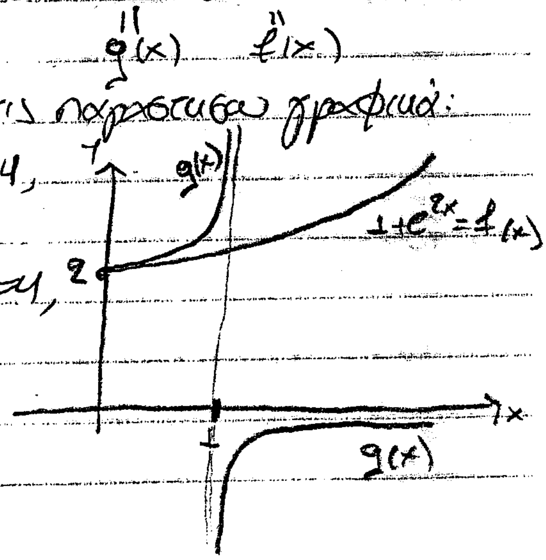
$\frac{2}{1-x}-1=e^{2x} \Leftrightarrow \frac{2}{1-x}=1+e^{2x} \Leftrightarrow 2=(1-x)(1+e^{2x})$

$g(x) \quad f(x)$

Θέλω να βρω τις κλίσεις των f κ g για να τις παραστήσω γραφικά:

$f'(x)=2e^{2x}$ κ $f'(0)=2$, $f''(x)=4e^{2x}$ κ $f''(0)=4$,
$f'''(0)=8$

$g'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$, $g'(0)=2$, $g''(x)=\frac{4}{(1-x)^3}$, $g''(0)=4$,
$g'''(0)=12$



Βρήκα ότι κάτω από τον xx' δεν έχουν κοινές λύσεις, θα το αποδείξω παρακάτω:

Για $x<1$: $H:[0,1)\to\mathbb{R}$: $H(x)=2-(1-x)(1+e^{2x})$

$$=2-(1-x)-(1-x)e^{2x}$$

$$=1+x-(1-x)e^{2x}$$

$H'(x)=1+e^{2x}-2(1-x)e^{2x}$

$H''(x)=4e^{2x}-4(1-x)e^{2x}=4e^{2x}(1-(1-x))=4xe^{2x}>0,\ 0<x<1$

Επειδή $H'\nearrow$ έχω, $0=H'(0)\le H'(x)\le H'(1)$, $0<x<1$.

$\Longrightarrow H\nearrow \Rightarrow H(x)>H(0)=0$, $0<x<1$.

Άρα, το πρόβλημα έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές.

$\lambda_0=0 \longrightarrow X_0(x)=x-1$

$\lambda_k \longrightarrow \phi_k(x)=\sin(\sqrt{\lambda_k}(x-1))$

Έχω κ το πρόβλημα: $\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda \Rightarrow T(t)=e^{-\lambda t}$

$\lambda_0=0 \longrightarrow u_0(x,t)=x-1$

$\lambda_k>0 \longrightarrow u_k(x,t)=e^{-\lambda_k t}\sin(\sqrt{\lambda_k}(x-1))$.

Οπότε, η γενική λύση είναι:

$$u(x,t)=c_0(x-1)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\lambda_k t}\sin(\sqrt{\lambda_k}(x-1))$$

- $\boxed{\text{Εξίσωση Poisson}}$ (Αρμονικές συναρτήσεις - Ελλειπτικού Τύπου)

$$\boxed{\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}&=0 \quad , x^2+y^2<1 \\ u(x,y)&=f(x,y) \quad , x^2+y^2=1 \end{aligned}}$$

Μετασχηματισμός σε πολικές:
$u(x,y)=v(r,\theta)$

Καταλήγω στην δ.ε: $v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta}=0$

Ψάχνω λύσεις στην μορφή: $v(r,\theta)=A(r)B(\theta)$

Οπότε,
$$r^2\frac{A''(r)}{A(r)}+r\frac{A'(r)}{A(r)}+\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}=0 \Rightarrow$$

$$-\left(r^2\frac{A''(r)}{A(r)}+r\frac{A'(r)}{A(r)}\right)=\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}=-\lambda \quad , \begin{aligned} 0&<r<1 \\ 0&<\theta\leq 2\pi \end{aligned}$$

Έχω περιοδική συνάρτηση, άρα: $B(0)=B(2\pi)$
$B'(0)=B'(2\pi)$

$\lambda_0=0 \longrightarrow 1$
$\lambda_k=k^2 \longrightarrow \sin k\theta, \cos k\theta, \ k=1,2,\dots$

$\lambda_0=0$: $rA''(r)+A'(r)=0 \Leftrightarrow (rA'(r))'=0$
$\Rightarrow rA'(r)=c_1 \Rightarrow A(r)=c_1\ln r+c_2$

Η $\ln r$ είναι αφράχτη συνάρτηση γι'αυτό κ πρέπει $c_1=0$

Άρα, $A(r)=1$ (επιλέγω $c_2=1$)

Και έχω, $r^2A''(r)+rA'(r)-k^2A(r)=0$ (εξίσωση του Euler)

Δύο ανεξάρτητες λύσεις: r^k , r^{-k} ← απορρίπτεται, διότι $0<r<1$.

Άρα, $\lambda_k=k^2 \longrightarrow r^k\sin k\theta, \ r^k\cos k\theta$.

Οπότε, η γενική λύση είναι:

$$\boxed{U(r,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k r^k\cos k\theta+b_k r^k\sin k\theta\right)}$$

$$\begin{cases} f(x,y)=\phi(\theta), & x^2+y^2=1 \\ f(\cos\theta,\sin\theta)=\phi(\theta) \end{cases}$$

$$U(1,\theta)=\phi(\theta)\Leftrightarrow\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)=\phi(\theta)$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\cos k\theta\,d\theta,\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\sin k\theta\,d\theta,\quad k=1,2$$

Οπότε,

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)d\theta+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\cos kt\,dt\;r^k\cos k\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\sin kt\;r^k\sin k\theta\right)$$

$$=\frac{r^k}{\pi}\left[\left(\int_0^{2\pi}\phi(t)\cos kt\,dt\right)\cos k\theta+\int_0^{2\pi}\left(\phi(t)\sin kt\,dt\right)\sin k\theta\right]$$

$$=\frac{r^k}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\left(\cos kt\cos k\theta+\sin kt\sin k\theta\right)dt$$

$$=\frac{r^k}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\cos(k(t-\theta))dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)r^k\cos(k(t-\theta))dt$$

$$\boxed{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}c_k,\quad \begin{aligned} s_1&=c_1\\ s_2&=c_1+c_2\\ &\vdots \end{aligned}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}s_n=A$$

- $\boxed{\text{Στατικές Συναρτήσεις}}$ (Ελλειπτικού τύπου)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & , x^2+y^2<1 \\ u = f & , x^2+y^2=1 \end{array}}$$

Μετασχηματισμός σε πολικές:

$$u(x,y) = v(r,\theta) \Longleftrightarrow v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

$$0<r<1, \ 0\le\theta\le 2\pi$$

κ $v(1,\theta) = g(\theta)$

Ψάχνω τις λύσεις στην μορφή: $v(r,\theta) = A(r)B(\theta)$

$$\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = -\lambda$$

$$B(0) = B(2\pi)$$

$$B'(0) = B'(2\pi)$$

$$\lambda_0 = 0 \longrightarrow B_0(\theta) = 1$$

$$\lambda_k = k^2 \longrightarrow \sin k\theta, \cos k\theta, \ k=1,2,\dots$$

Καταλήγω στην γενική λύση:

$$v(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\alpha_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos k\theta \, d\theta, \ k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin k\theta \, d\theta, \ k=1,2,\dots$$

$$\alpha_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos k(t-\theta)\, d\theta$$

Άρα, $v(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} g(t)\cos k(t-\theta)\, d\theta$

$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$

- <u>Σημειακή σύγκλιση</u>: $\forall t \in [0,1]$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο ανν $\forall t \in [0,1]$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ συγκλίνει κ μάλιστα $\lim_{n \to +\infty} S_n(t) = f(t) \underset{\forall \varepsilon > 0}{\Longleftrightarrow} |S_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ $\quad f_k \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

- <u>Ομοιόμορφη σύγκλιση</u>:
Το δ δεν εξαρτάται από το n_0 αλλά μόνο από το ε (ισχυρότερη σύγκλιση)

Αν $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $\forall k = 1, 2, \ldots$ κ $f_k \rightrightarrows f$ τότε f συνεχής (αντίστοιχα ολοκλ/μη) κ ισχύει

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_k(t)\,dt = \int_0^1 \lim f_k(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$

- <u>Σύγκλιση κατά L^2 μέση</u>:

$$L^2[0,1] := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 f^2(x)\,dx < +\infty \}$$

$f_k \to f$ κατά L^2 ανν $\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 (f_k - f)^2\,dt = 0$

$$S_N(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r^k}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos k(t-\theta)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\,dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_0^{2\pi} g(t) r^k \cos k(t-\theta)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \underbrace{\Big[1 + 2 \sum_{k=1}^{N} r^k \cos k(t-\theta) \Big]}_{\text{"} h_N(r,\theta)} dt$$

$$\boxed{\frac{(\alpha^{\nu} + \alpha^{\nu-1}\beta + \alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \beta^{\nu})(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha^{\nu+1} - \beta^{\nu+1}}{\alpha - \beta}}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x^k = x + x^2 + \dots + x^N = x(1 + x + \dots + x^{N-1})$$
$$= x\frac{1-x^N}{1-x}, \quad x \neq 1$$

για $x=1$: $\sum_{k=1}^{N} x^k = N$

$e^{i\pi} = 1$ Τύπος Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\sin k\theta$

Τύπος De Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$\cos k\theta = \frac{1}{2}\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right)$$

Άρα, έχω : $1 + 2\sum_{k=1}^{N} r^k \cos(k\omega) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right)$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} r^k e^{ik\omega} + \sum_{k=1}^{N} r^k e^{-ik\theta}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\omega})^k + \sum_{k=1}^{N} (re^{-i\omega})^k$$

$$= 1 + re^{i\omega}\frac{1-(re^{i\omega})^N}{1-re^{i\omega}} + re^{-i\omega}\frac{1-(re^{-i\omega})^k}{1-re^{-i\omega}}$$

$$= \frac{(1-re^{i\omega})(1-re^{-i\omega}) + (re^{i\omega} - (re^{i\omega})^{N+1})(1-re^{i\omega})}{(1-re^{i\omega})(1-re^{-i\omega})}$$
$$+ \frac{(re^{-i\omega} - (re^{-i\omega})^{N+1})(1-re^{i\omega})}{(1-re^{i\omega})(1-re^{-i\omega})}$$

(και $(1-re^{i\omega})(1-re^{-i\omega}) = 1 - 2r\cos\omega + r^2$, διότι

$1 - r\cos\omega - ir\sin\omega$

$(1-r\cos\omega)^2 + r^2\sin^2\omega = 1 + r^2\cos^2\omega - 2r\cos\omega + r^2\sin^2\omega$
$= 1 - 2r\cos\omega + r^2$)

$$= \frac{1 - 2r\cos\omega + r^2 + re^{i\omega} - r^2 - r^{N+1}e^{i(N+1)\omega} + r^{N+2}e^{iN\omega}}{1 - 2r\cos\omega + r^2} +$$

$$+\ \frac{re^{-i\omega}-r^2-r^{N+1}e^{-i(N+1)\omega}+r^{N+1}e^{-iN\omega}}{1-2r\cos\omega+r^2}$$

$$=\frac{1-2r\cos\omega+r^2+2r\cos\omega-2r^2-2r^{N+1}\cos(N+1)\omega+2r^{N+2}\cos N\omega}{1-2r\cos\omega+r^2}$$

$$=\frac{1-r^2-2r^{N+1}\cos(N+1)\omega+2r^{N+2}\cos N\omega}{1-2r\cos\omega+r^2}$$

$$=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}+\frac{2r^{N+1}(-\cos(N+1)\omega+r\cos N\omega)}{1-2r\cos\omega+r^2},$$

όπου $\omega=t-\theta$, $r<1$

κ $\lim\limits_{N\to+\infty} r^{N+1}=0$

Οπότε, το $\dfrac{2r^{N+1}(-\cos(N+1)\omega+r\cos N\omega)}{1-2r\cos\omega+r^2}\to 0$

αφού το $r^{N+1}\to 0$ κ το άλλο είναι φραγμένο.

Τότε, $\lim\limits_{N\to+\infty} h_N(r,\omega)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}$ ομοιομόρφα ως προς το $\omega\in[0,2\pi]$ $\forall r<1$

$$\Rightarrow \exists \lim S_N(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\lim_{N\to+\infty}h_N(r,t-\theta)\,dt$$

$$=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(t)}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,d\theta$$

$$U(r,\theta)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(t)}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt,\quad \theta\in[0,2\pi),\ 0\le r<1$$

Άρα, $u(x,y)=(1-x^2-y^2)\displaystyle\int_{|\bar{x}|=1}\frac{f(\bar{x})}{|x-\bar{x}|^2}\,dS(\bar{x})$

Πυρήνας του Dirichlet:

$$K(r,\theta,t) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos(\theta-t)+r^2)} \qquad \int_0^{2\pi} K(r,\theta,t)\,dt = 1$$