Πέμπτη 5 Απριλίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 7

1).Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) \;+\; u_{yy}(x,y) \;=\; 0, \;\; x^2+y^2>1,$$

$$u \;=\; 1+3\sin^3\theta, \;\; 0\le\theta<2\pi,$$

u φραγμένη.

2). Δίνεται το πρόβλημα

$$u_{xx}(x,y) \;+\; u_{yy}(x,y) \;=\; 0, \;\; x\in(0,\pi), \;\; y>0,$$

$$u(x,0) \;=\; 0, \quad x\in[0,\pi],$$

$$u_x(0,y) \;=\; u(\pi,y) \;=\; 0, \;\; y\ge 0.$$

Βρείτε μία θετική λύση του προβλήματος.

3). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_x(x,t) \;-\; xu_t(x,t) \;=\; 0, \;\; x\in\mathbb{R}, \; t>0.$$

Ποιά είναι η λύση αν επιπρόσθετα ισχύει

$$u(x,0) \;=\; f(x), \;\; x\in\mathbb{R}?$$

4). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) \;=\; 0, \;\; 0<x<\pi, \; t>0,$$

$$u_x(0,t) \;=\; u_x(\pi,t) \;=\; \frac{u(\pi,t)-u(0,t)}{\pi}, \;\; t>0.$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι οι θετικές ιδιοτιμές λ κάποιου κατάλληλου προβλήματος ιδιοτιμών ικανοποιούν την εξίσωση

$$2(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)) \;-\; \sqrt{\lambda}\pi\;\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \;=\; 0.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι οι θετικές ιδιοτιμές είναι αριθμήσιμες και τις οποίες αριθμούμε ώστε

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots.$$

Βρείτε τις λ_{2k-1}, $\;k=1,2,\cdots$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι οι αρνητικές ιδιοτιμές λ σχετίζονται με την εξίσωση (το $\sqrt{-\lambda}\pi$ είναι θετική ρίζα)

$$2 \;+\; x \;+(x-2)e^x \;=\; 0.$$

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k.

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 26 Απριλίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 26 Απριλίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!