Τρίτη 15 Μαΐου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 8

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, \pi) \\ 1, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σειρά *Fourier* της f.
(β) Με χρήση του πρώτου ερωτήματος βρείτε το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots.$$

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x - \pi, \quad x \in [0, 2\pi).$$

(α) Να βρεθεί η σειρά *Fourier* της f.
(β) Με χρήση της ταυτότητας του *Parseval* βρείτε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(γ) Χωρίς τη χρήση της ταυτότητας του *Parseval* βρείτε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

3). Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση της οποίας η σειρά *Fourier* αυτής είναι

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Βρείτε τη σειρά *Fourier* της f'' (με χρήση τών συντελεστών της σειράς *Fourier* της f).

4). Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Με χρήση της ταυτότητας του *Parseval* αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx \le \int_0^{2\pi} (f'(x))^2\, dx.$$

Υπενθύμιση Για

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Η ανισότητα *Bessel* είναι

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

ενώ η ταυτότητα *Parseval*

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Τρίτη 22 Μαΐου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 15:00 της Τρίτης 22 Μαΐου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!