1 α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

θέτουμε $y = 1+e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

Οπότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_2^{1+e} \frac{dy}{y} = (\ln y)\Big|_2^{1+e} = \ln(1+e) - \ln 2$

$= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

β) $\displaystyle\frac{x^2}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-5x+6 \;+5x-6}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-6}{x^2-5x+6} =$

$\displaystyle= 1 + \frac{5x-6}{(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

Οπότε πρέπει $5x-6 = A(x-3) + B(x-2) \Leftrightarrow$

$5x-6 = (A+B)x - (3A+2B)$

και επομένως πρέπει

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 5 \\ 3A+2B &= 6 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} A &= -4 \\ B &= 9 \end{aligned}\right.$$

και τελικά έχουμε

$$\frac{x^2}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{4}{x-2} + \frac{9}{x-3}.$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-5x+6}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{4}{x-2} + \frac{9}{x-3}\right)dx = 1 - 4\int_0^1 \frac{dx}{x-2} +$

$\displaystyle 9\int_0^1 \frac{dx}{x-3}$. Όμως $\displaystyle\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = \int_2^1 \frac{-dy}{-y} = -\int_1^2 \frac{dy}{y}}_{=-\ln 2}$

$y = 2-x \Rightarrow dy = -dx$

Παρόμοια $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-3} = \int_3^2 \frac{-dz}{-z} = -\int_2^3 \frac{dz}{z} = -\ln\frac{3}{2}$.

$z = 3-x \Rightarrow dz = -dx$

Επομένως
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-5x+6}\,dx = 1 - 4(-\ln 2) + 9(-\ln 3 + \ln 2)$$
$$= 1 + 13\ln 2 - 9\ln 3$$

---

2 α) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ και επειδή οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}$ είναι θετικοί και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+1}{n^2(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1+0+0}{1+0} = 1,$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο
(Αν $a_n, \beta_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n} = \ell > 0$
Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει)

Θα έχουμε ότι η ζητούμενη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, το οποίο και θα αποδείξουμε. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο των ολοκληρωμάτων

Αν $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$, φθίνουσα τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει.

Η επιλογή μας θα είναι η f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\geq 1$, η οποία είναι φθίνουσα αφού $f'(x)=-\frac{2}{x^3}<0$, $x\geq 1$

$A>1$ και

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^A = 1-\frac{1}{A}.$$

και επειδή

$$\lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A}\right)=1,$$

έχουμε την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ (και μάλιστα $=1$) και την συγκλισιμότητα της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

β) Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ και όπως έδειξα προηγουμένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως και

Επιπλέον και απλά

(Αν για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, έχουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης).

Θ3 a) Αν $x \neq 0$ η συνάρτηση $\frac{1-\cos x}{x}$ είναι πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με τον παρονομαστή να μην μηδενίζεται. Οπότε το πηλίκο είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα τότε έχουμε:

$$x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{(1-\cos x)'x - (1-\cos x)x'}{x^2}$$

$$= \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}.$$

Για το $x=0$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0 θα πρέπει να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x} - 0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, μάλιστα

..., $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες (2 φο...

με
$$g'(x) = ημx, \quad h'(x) = 2x$$

Τότε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημ...}{2x}$

έχουμε επίσης απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$.

Όμως επειδή $g''(x) = συνx$, $h''(x) = 2$

και $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g''(x)}{h''(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{συνx}{2} =$

έχουμε ότι

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \text{ και μάλιστα ίσο } \frac{1}{2}$$

και επειδή
$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2}$$

έχουμε
$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{2}.$$

πε $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$ και άρα

$$f'(0) = \frac{1}{2}.$$

3 β) Θεωρουμε τη συναρτηση $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

με τυπο $h(x) = g(x) - \frac{1+x^2}{2}$, $x \geq 1$.

Τοτε η h ειναι συνεχης στο $[1, \infty)$ (σαν διαφορα συνεχων) και παραγωγισιμη στο $(1, +\infty)$, επισης σαν διαφορα παραγωγισιμων, και μαλιστα

$$h'(x) = g'(x) - x \quad , \quad x > 1$$

$$\geq 0 \quad , \quad x > 1$$

Οποτε η h ειναι αυξουσα και αρα

$$h(x) \geq h(1) = 0 \overset{x \geq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$g(x) \geq \frac{1+x^2}{2} \quad , \quad x \geq 1.$$

Για το το αλλο κομματι της ανισοτητας, θεωρουμε τη συναρτηση $H : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με τυπο

$$H(x) = g(x) - \frac{2+x^3}{3} \quad , \quad x \geq 1$$

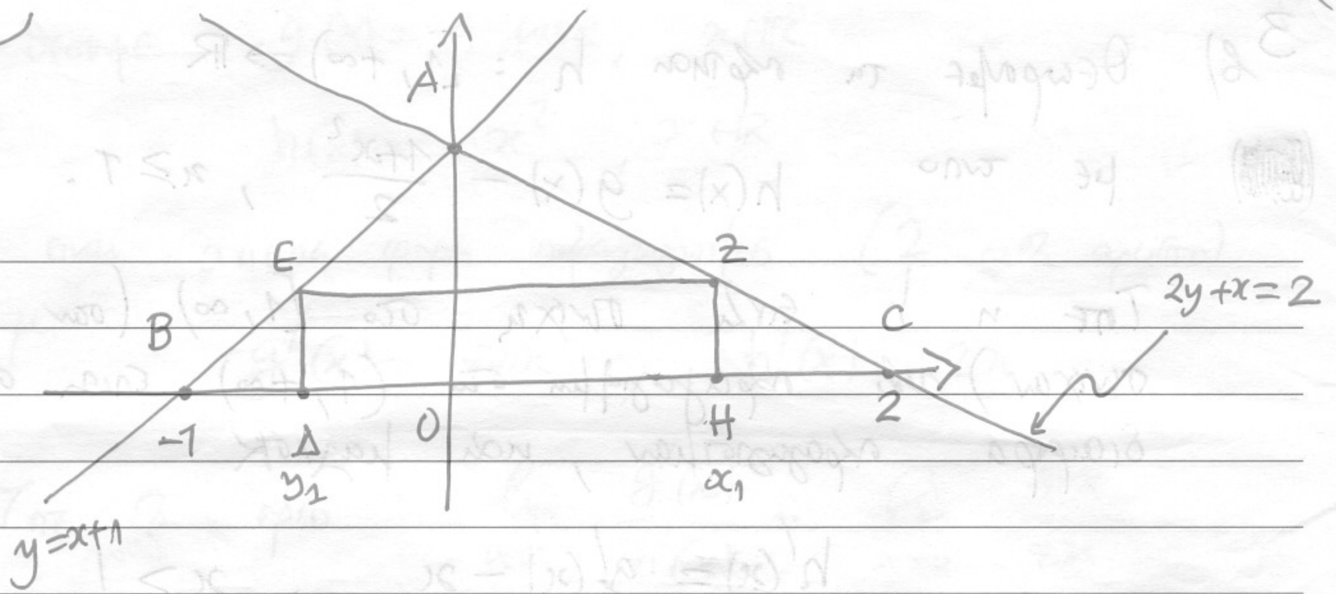
η οποια ειναι επισης συνεχης στο $[1, +\infty)$ και παραγωγισιμη στο $(1, +\infty)$ και μαλιστα

$$H'(x) = g'(x) - x^2 \leq 0 \quad , \quad x > 1$$

ειναι δηλ. φθινουσα και αρα

$$H(x) \leq H(1) = 0 \overset{x \geq 1}{\Longleftrightarrow} g(x) \leq \frac{2+x^3}{3} \quad , \quad x \geq 1.$$

Θ4



Έστω ΔΕΖΗ το εγγεγραμμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως στο σχήμα.
Αν x_1 είναι η τετμημένη της Η, δηλ. $H=(x_1,0)$ τότε οι συντεταγμένες της Ζ θα είναι $Z=\left(x_1, \frac{2-x_1}{2}\right)$.

Παρόμοια αν y_1 είναι η τετμημένη της Δ, $\Delta=(y_1,0)$, τότε $E=(y_1, 1+y_1)$.

Επειδή πρόκειται για παραλληλόγραμμο $|E\Delta|=|ZH|$ και άρα

$$\frac{2-x_1}{2} = 1+y_1 \iff \underline{y_1 = -\frac{x_1}{2}}$$

$$\text{Εμβαδό } (EZH\Delta) = |\Delta H|\cdot|HZ| = (x_1-y_1)\cdot\left(\frac{2-x_1}{2}\right)$$

$$= \left(x_1-\left(-\frac{x_1}{2}\right)\right)\left(\frac{2-x_1}{2}\right) = \frac{3}{4}x_1(2-x_1).$$

$$0<x_1<2$$

Το ζητούμενο επομένως είναι να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{3}{4}x(2-x), \quad 0\le x\le 2.$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα

έχουμε $f'(x) = \frac{3}{4}(2-2x) = \frac{3}{2}(1-x)$, $0 \le x \le 2$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} < 0$$

Οπότε $f'(x) \ge 0$, $0 \le x \le 1 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[0,1]$

$$\Rightarrow f(x) \le f(1) = \frac{3}{4}, \quad x \in [0,1]$$

Παρόμοια $f'(x) \le 0$, $1 \le x \le 2 \Rightarrow f \downarrow$ στο $[1,2]$

$$\Rightarrow f(x) \le f(1) = \frac{3}{4}, \quad 1 \le x \le 2$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$f(x) \le f(1) = \frac{3}{4}, \quad \forall x \in [0,2]$$

και το μέγιστο επιτυγχάνεται για $x=1$.

Επομένως το ζητούμενο ορθογώνιο έχει την κορυφή Η στο σημείο $x=1$ και το εμβαδό του είναι $\frac{3}{4}$.

5) Θα αποδείξουμε αρχικά επαγωγικά ότι

$$(0<)\ a_n \le 2, \quad n \ge 2$$

(από υπόθεση)

Πράγματι για $n=1$, $a_2 \le \frac{2^3}{2} = 1$, ισχύει αφού $a_1 = 2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ

$$a_k \le 1$$

και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει επίσης και για $n=k+1$ δηλ

$$a_{k+1} \le 1.$$

Όμως $$a_{k+1} \le \frac{a_k^3}{8} \le \frac{1^3}{8} < 1.$$

και επομένως το ζητούμενο.

(Είναι αρκετό να αποδειχτεί καλλίτερα ότι $a_n \le 2$, $n \in \mathbb{N}$)

Τότε όμως

$$0 < a_{n+1} \le \frac{a_n^2}{8} \cdot a_n \le \frac{2^2}{8} \cdot a_n = \frac{a_n}{2} < a_n$$

δηλ $0 < a_{n+1} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$

δηλ η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα, οπότε από το θεώρημα η a_n είναι συγκλίνουσα.

Έστω $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow l^3 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^3$

Επειδή η a_{n+1} είναι υπακολουθία της a_n, έχουμε επίσης

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Από την ανισότητα $0 < a_{n+1} \le \frac{a_n^3}{8}$

Έχουμε αρχικά ανισότητα

(Αν a_n, β_n, γ_n συγκλίνουσες &

$$a_n < \beta_n < \gamma_n$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \beta_n \le \lim_{n\to\infty} \gamma_n \;)$$

Οπότε παίρνουμε

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \le \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{8} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \ell \le \frac{\ell^3}{8} \quad (*)$$

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell(8-\ell^2) \le 0 \end{cases}$$

Επίσης αφού $0 < a_n \le 1 \Longrightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 1$

$$\Leftrightarrow 0 \le \ell \le 1$$

οπότε $8-\ell^2 \ge 8-1 = 7 > 0$

Άρα σημαίνει έχουμε

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ell = 0.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Θ6, Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και μάλιστα

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4a}{x^2}$$
$$= \frac{4(x^5-a)}{x^2}, \quad x>0$$

$$f''(x) = 12x^2 + \frac{8a}{x^3} > 0, \quad x>0$$

Οπότε $f'(x) < 0, \quad 0<x<a^{1/5}$

$\Rightarrow f \downarrow$ στο $(0, a^{1/5})$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(a^{1/5}) = a^{4/5} + 4\frac{a}{a^{1/5}} = 5a^{4/5}, \quad x\in(0,a^{1/5})$$

Παρόμοια $f'(x) > 0, \quad x > a^{1/5} \Rightarrow$

$f \uparrow$ στο $(a^{1/5}, +\infty)$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(a^{1/5}) = 5a^{4/5}, \quad x \geq a^{1/5}$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση

$$f(x) \geq f(a^{1/5}) = 5a^{4/5}, \quad x>0.$$

και η ελάχιστη τιμή της f είναι $5a^{4/5}$.

Θ7

α) Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού λέει ότι η $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

με τύπο $F(x)=\int_0^x f(s)\,ds \quad , x\geq 0$

είναι παραγωγίσιμη, αφού η f είναι συνεχής

και μάλιστα $F'(x)=f(x) \quad , \quad x\geq 0.$

Παρατηρούμε τώρα ότι $H(x)=\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt$

$$= \int_{x^2}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{x^3} f(t)\,dt = \int_0^{x^3} f(t)\,dt - \int_0^{x^2} f(t)\,dt$$

$$= F(x^3) - F(x^2), \quad x\geq 0.$$

Οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας η H είναι παραγωγίσιμη σαν διαφορά παραγωγίσιμων και μια και η σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη

$$\left(\frac{d}{dx}\left(g(h(x))\right) = g'(h(x))\,h'(x)\right)$$

Οπότε έχουμε $H'(x)= F'(x^3)(x^3)' - F'(x^2)(x^2)'$

$$= F'(x^3)\,3x^2 - F'(x^2)\,2x$$

$$= 3x^2 f(x^3) - 2x\, f(x^2).$$

β) Παρατηρούμε ότι $\int_0^1 x^3\,dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$,

~~και~~ επειδή η $x \longmapsto x^3$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ με ολοκλήρωμα $\frac{1}{4}$,

αν επιλέξουμε τη διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < \frac{k}{n} = x_k < \dots < x_n = 1\}$

άνω άθροισμα Darboux της f,

Το ~~ολοκλ~~

$$f(x) = x^3$$

$$M_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^3, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

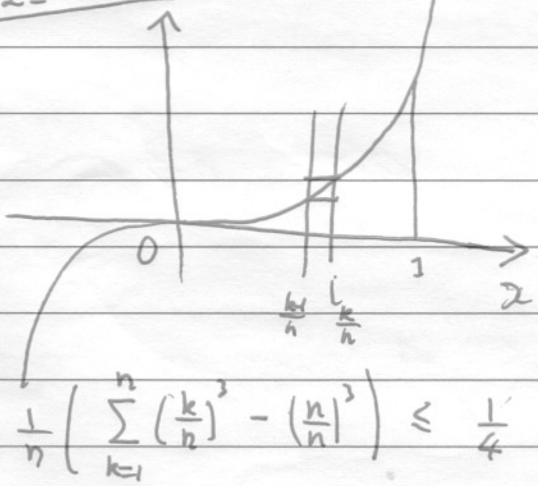
$$\sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 = a_n$$

Όμως αφού προκύπτει για Riemann ολοκληρώσιμη θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{4}, \text{ δηλ.}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

2η λύση



$$\frac{1}{n}\frac{(k-1)^3}{n^3} \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^3\,dx \le \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{0^3}{n^3} + \frac{1^3}{n^3} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right] \le \int_0^n x^3\,dx \le \frac{1}{n}\left[\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{n}{n}\right)^3\right) \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \iff a_n - \frac{1}{n} \le \frac{1}{4} \le a_n$$

$$\iff \frac{1}{4} \le a_n \le \frac{1}{4} + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

και επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}$

από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.