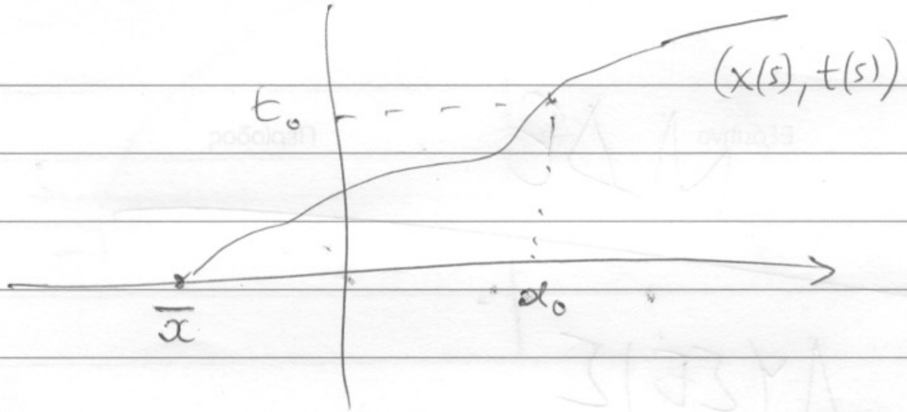
1) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

1



$$\dot{x}(s) = 1 \quad , \quad x(0) = \bar{x} \quad , \quad x(\bar{s}) = x_0$$

$$\dot{t}(s) = 1 \quad , \quad t(0) = 0 \quad , \quad t(\bar{s}) = t_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(s) = s + \bar{x} \quad , \quad s > 0$$
$$t(s) = s$$

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \cdot \dot{x} + u_t \dot{t} = u_x + u_t$$

$$= \frac{2x(s)}{1+(x-t)^2} u^2(x(s), t(s)) \, .$$

Οπότε αν θέσουμε $u(x(s), t(s)) = f(s)$, τότε

$$f'(s) = \frac{2(s+\bar{x})}{1+\bar{x}^2} f^2(s) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f'(s)}{f^2(s)} = \frac{2(s+\bar{x})}{1+\bar{x}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{f(s)} - \frac{(s+\bar{x})^2}{1+\bar{x}^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{f(s)} - \frac{(s+\bar{x})^2}{1+\bar{x}^2} = -\frac{1}{f(0)} - \frac{\bar{x}^2}{1+\bar{x}^2}, \quad s>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(s)} + \frac{(s+\bar{x})^2}{1+\bar{x}^2} = 1 + \frac{\bar{x}^2}{1+\bar{x}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(s)} = 1 + \frac{\bar{x}^2}{1+\bar{x}^2} - \frac{(s+\bar{x})^2}{1+\bar{x}^2}$$

$$= \frac{1+2\bar{x}^2 - (s+\bar{x})^2}{1+\bar{x}^2} = \frac{1+\bar{x}^2 - s^2 - 2\bar{x}s}{1+\bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1+\bar{x}^2}{1+\bar{x}^2 - s^2 - 2\bar{x}s}$$

Για $s=\bar{s}$: $\begin{array}{l} x(\bar{s}) = \bar{s}+\bar{x} = x_0 \\ t(\bar{s}) = \bar{s} = t_0 \end{array} \Bigg| \Leftrightarrow \Bigg| \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 - t_0 \\ \bar{s} = t_0 \end{array}$

$$u(x_0,t_0) = \frac{1+(x_0-t_0)^2}{1+(x_0-t_0)^2 - t_0^2 - 2(x_0-t_0)t_0}$$

$$= \frac{1+(x_0-t_0)^2}{1+x_0^2 - 2x_0t_0 + \cancel{t_0^2} - \cancel{t_0^2} - 2t_0x_0 + 2t_0^2}$$

3) Οπότε $u(x,t)=\dfrac{1+x^2-2xt+t^2}{1+x^2-4xt+2t^2}$

Η λύση ορίζεται για $t <$ της μικρότερης θετικής ρίζας του παρονομαστή.

$$2t^2-4xt+1+x^2=0$$

$$\Delta = 16x^2-8(1+x^2)=8x^2-8=8(x^2-1).$$

Οπότε για $-1<x<1$, ορίζεται $\forall\, t>0$, ενώ για $|x|\geq 1$,

$$\rho_{1,2}=\frac{4x\pm 2\sqrt{2(x^2-1)}}{4}=x\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{2}}.$$

και οι 2 ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για $x\leq -1$ είναι και οι δύο αρνητικές, οπότε ~~τότε~~ πάλι η λύση ορίζεται $\forall\, t\geq 0$ $(x\leq -1)$.

Ενώ για $x\geq 1$, η λύση ορίζεται για

$$0\leq t\leq x-\sqrt{\frac{x^2-1}{2}}.$$

---

(2) Αν θεωρήσουμε $u(x,t)=\frac{1}{2}t^2+\sin x+cx+w(x,t)$

Τότε $u_t=t+w_t$, $u_{tt}=1+w_{tt}$

$$u_x=\cos x+w_x+c$$

$$u_{xx}=-\sin x+w_{xx}$$

Οπότε η w λύνει την Δ.Ε.

$$1 + w_{tt} - \left(-\sin x + w_{xx}\right) = 1 + \sin x$$

$$\Longleftrightarrow \quad w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Οι ~~Συνοριακές~~ Αρχικές συνθήκες είναι:

$$u(x,0) = \sin x \Leftrightarrow \sin x + cx + w(x,0) = \sin x \Leftrightarrow$$

$$w(x,0) = -cx \quad 0 < x < 1$$

$$u_t(x,0) = 0 \Leftrightarrow w_t(x,0) = 0.$$

Οι ~~Αρχικές~~ Συνοριακές συνθήκες είναι:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}t^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + w(0,t) = \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow$$

$$w(0,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(1,t) = \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}t^2} + \sin 1 + c + w(1,t) = \cancel{\frac{1}{2}t^2} \Leftrightarrow$$

$$w(1,t) = -(c + \sin 1)$$

Επιλέγουμε $c = -\sin 1$:

οπότε $w(1,t) = 0, \quad t > 0.$

Η w επομένως λύνει το πρόβλημα:

5)

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0$$

$$w(x,0) = (\sin 1)x \quad , 0<x<1$$

$$w_t(x,0) = 0 \quad 0<x<1$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0.$$

Η λυση ~~δηλαδη~~ γενικη των συνοριακων προβληματα

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0$$

ειδη

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi t + \beta_k \sin k\pi t) \cdot \sin(k\pi x)$$

δηλαδη

$$w_t = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k\pi \sin k\pi t + k\pi \beta_k \cos(k\pi t)) \sin(k\pi x)$$

για για $t=0$

$$w_t(x,0) = 0 \Rightarrow \pi \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \sin(k\pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_k = 0, \quad k=1,2,\ldots$$

και τελικα

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\pi t) \sin(k\pi x)$$

δηλαδη πρεπει:

$$(\sin 1)\, x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x).$$

Οπότε οι συντελεστές Fourier θα δίνονται από

$$a_m = 2\sin 1 \int_0^1 x \sin(m\pi x)\, dx \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$= 2\sin 1 \int_0^1 x \left(-\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\right)' dx$$

$$= 2\sin 1 \cdot \left[\left(-\frac{x\cos(m\pi x)}{m\pi}\right)\Big|_0^1 + \cancel{\int_0^1 \frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\, dx}^{\,0}\right]$$

$$= \frac{2\sin 1}{m\pi}\left[-\cos(m\pi)\right] = \frac{2\sin 1}{m\pi}\left(-(-1)^m\right)$$

$$= (-1)^{m-1}\, \frac{2\sin 1}{m\pi}.$$

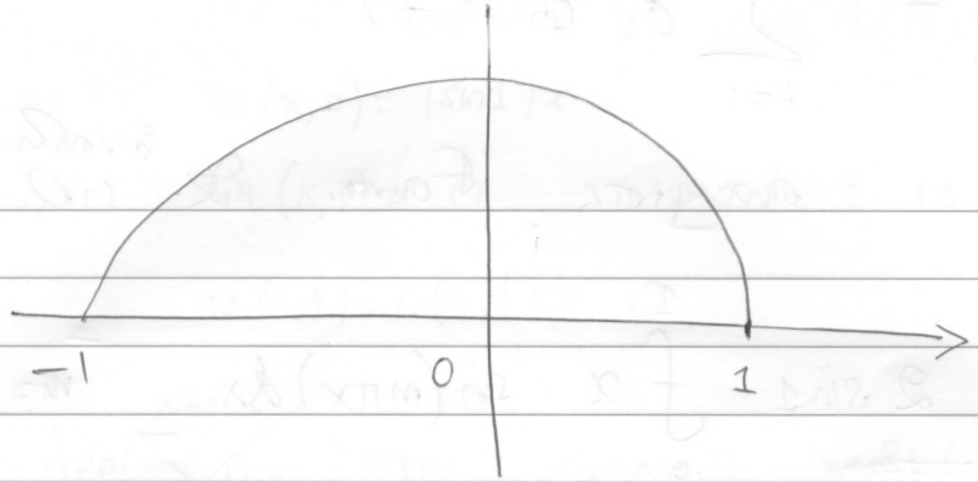
Και τελικά

$$w(x,t) = \frac{2\sin 1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cos(k\pi t)\sin(k\pi x)$$

Άρα

$$u(x,t) = \frac{1}{2}t^2 + \sin x - \sin 1\, x + \frac{2\sin 1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(k\pi t)\sin(k\pi x).$$

3



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

$$u(x,y) = v(r,\theta) :$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 \quad , 0<r<1, \ 0<\theta<\pi$$

$$v(r,0) = v(r,\pi) = 0 \quad , \quad 0<r<1$$

$$v(1,\theta) = -2\sin^3\theta \quad , \quad 0<\theta<\pi .$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \Rightarrow$$

$$-2\sin^3\theta = -\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta .$$

οπότε $\quad \overline{v(1,\theta) = -\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta ,} \quad 0<\theta<\pi .$

8) Με τη μέθοδο του Fourier, ψάχνουμε για λύση στη μορφή:

$$v(r,\theta) = A(r)\,B(\theta)$$

$$v(r,0) = 0 \Leftrightarrow A(r)\,B(0)$$

$$\Longrightarrow B(0) = 0$$

Αντίστοιχα $v(r,\pi) = 0 \Longrightarrow B(\pi) = 0$

Επίσης η Δ.Ε. γράφεται:

$$A''(r)\,B(\theta) + \frac{1}{r}A'(r)\,B(\theta) + \frac{1}{r^2}A(r)\,B''(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2A''(r) + rA'(r)}{A(r)} + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = 0$$

$\Longrightarrow \exists \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$B''(\theta) + \lambda\,B(\theta) = 0 \qquad 0<\theta<\pi$$
$$B(0) = B(\pi) = 0$$

&

$$r^2A''(r) + rA'(r) - \lambda\,A(r) = 0, \quad 0<r<T.$$

Οι ιδιοτιμές του πρώτου προβλήματος είναι

$$\lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

με ιδιοσυναρτήσεις $B_k(\theta) = \sin k\theta$

$$r^2 A'' + r\,A'(r) - k^2 A(r) = 0$$

ψαχνουμε για λυση στη μορφη

$$A(r) = r^{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\mu-1) r^{\mu} + \mu\, r^{\mu} - k^2 r^{\mu} = 0 \iff$$

$$\mu = \pm k$$

$$\Rightarrow \quad r^{k}, \quad r^{-k} \text{ αφραυτη στο } 0$$

$$\Rightarrow \quad A(r) = r^{k}$$

η γενική λυση εχει τη μορφη:

$$v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, r^{k} \sin k\theta \,.$$

αρχικη $\quad v(1,\theta) = -\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta$

$$-\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta$$

$$a_k = 0, \quad k \neq 1, 3$$

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}$$

10)

Δηλ. Επομένως

$$v(r,\theta) = -\frac{3}{2} r \sin\theta + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\theta \qquad 0<r<1, \quad 0<\theta<\pi .$$

---

④ Ψάχνουμε για λύση και μορφή

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\Rightarrow (*) \quad X(x)T''(t) - X''(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \qquad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$\Rightarrow X(x)T''(t) - X''(x)\left(T'(t)+T(t)\right) = 0 .$$

Διακρίνουμε τη περίπτωση $T'(t)+T(t)=0 \Rightarrow T(t) = ce^{-t}$

$$\Rightarrow cX(x)e^{-t} = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \quad \text{απορρίπτεται}$$

$\Rightarrow (*)$ γίνεται:

$$\frac{T''(t)}{T'(t)+T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

Οπότε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\quad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad 0<x<\pi$

& $\quad T''(t) + \lambda\left(T'(t)+T(t)\right) = 0, \quad t>0 .$

Όμως $u(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0$

$u(\pi,t)=0 \Rightarrow X(\pi)=0$

Το Π.Σ.Τ.

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad 0<x<\pi$$

$$X(0)=X(\pi)=0$$

έχει ιδιοτιμές $\lambda_k=k^2$, ιδιοσυναρτήσεις $X_k(x)=\sin kx$

$k\in\mathbb{N}$.

Για το πρόβλημα:

$$T''(t)+k^2T'(t)+k^2T(t)=0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\rho^2+k^2\rho+k^2=0$$

$$\Delta=k^4-4k^2=k^2(k^2-4).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) $k=1$, $\Rightarrow \Delta=-3$, $\rho=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$$T(t)=c_1e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

12)

β) $k=2 \Rightarrow \rho=-2$ διπλή ρίζα.

$$\Rightarrow T(t) = (c_1+c_2 t)e^{-2t}.$$

γ) $k \geq 3$

$$\rho = \frac{-k^2 \pm k\sqrt{k^2-4}}{2}$$

$$T(t) = c_1 e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-k^2-k\sqrt{k^2-4}}{2}t}$$

και η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$u(x,t) = a_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\sin x + \beta_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\sin x$$

$$+ (a_2+\beta_2 t)e^{-2t}\sin(2x)$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty}\left(a_k e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + \beta_k e^{\frac{-k^2-k\sqrt{k^2-4}}{2}t}\right)\sin kx$$

---

5) Έστω ότι το πρόβλημα έχει 2 διαφορετικές λύσεις u_1, u_2. Θέτουμε $w = u_1 - u_2$.

Τότε η w ικανοποιεί το σύστημα:

$$w_{tt} - 2\, w_{xx} = 0, \quad 0<x<1, \ t>0$$

$$w(x,0) = 0, \quad 0<x<1$$

$$w_t(x,0) = 0, \quad 0<x<1$$

$$w(0,t) = 0, \quad t>0$$

$$w_x(1,t) + w_t(1,t) = 0, \quad t>0$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε με w_t και ολοκληρώνουμε στο $(0,1)$ οπότε:

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t)\,dx - 2\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx = 0.$$

Όμως $\displaystyle\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx$

&

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx = \int_0^1 w_t\,(w_x)_x\,dx$$

$$= (w_t\, w_x)\Big|_0^1 - \int_0^1 w_{tx}(x,t)\, w_x(x,t)\,dx$$

$$= w_t(1,t)\, w_x(1,t) - w_t(0,t)\cdot w_x(0,t) - \int_0^1 w_x\, w_{xt}\,dx.$$

14/ Όμως επειδή $\omega(0,t)=0 \Rightarrow \omega_t(0,t)=0$

επίσης $\omega_x(1,t)+\omega_t(1,t)=0 \Rightarrow \omega_x(1,t)=-\omega_t(1,t)$.

Οπότε:

$$\int_0^1 \omega_t\,\omega_{xx}\,dx = -\,\omega_t^2(1,t) - \int_0^1 \omega_x\,\omega_{xt}\,dx$$

$$= -\,\omega_t^2(1,t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \omega_x^2(x,t)\,dx\right)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \omega_t^2(x,t)\,dx\right) + 2\,\omega_t^2(1,t) + \frac{d}{dt}\int_0^1 \omega_x^2(x,t)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\left(\omega_t^2(x,t)+2\,\omega_x^2(x,t)\right)dx\right] = -2\omega_t^2(1,t) \le 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1\left(\omega_t^2(x,t)+2\,\omega_x^2(x,t)\right)dx \le \frac{1}{2}\int_0^1\left(\omega_t^2(x,0)+2\,\omega_x^2(x,0)\right)dx.$$

15/

Όμως αφού $w(x,0)=0$, $0<x<1$

$$\Longrightarrow \quad w_x(x,0)=0$$

και αφού $w_t(x,0)=0$, $0<x<1$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^1 \left(w_t^2(x,0) + 2\, w_x^2(x,0)\right) dx = 0$$

& Τελικά έχουμε

$$\int_0^1 \left(w_t^2(x,t) + 2\, w_x^2(x,t)\right) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad w_t(x,t)\equiv 0, \quad w_x(x,t)\equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$w(x,t)\equiv w(x,0)\equiv 0 \qquad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

---

(6) Θα εργαστούμε με ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ. Έστω λοιπόν υποθέτουμε ότι $\min\limits_{x^2+y^2\le 1} u(x,y) \neq \min\limits_{x^2+y^2=1} u(x,y)$

Οπότε θα πρέπει (αφού $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \supseteq \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$)

να ισχύει $\min\limits_{x^2+y^2 \leq 1} u(x,y) < \min\limits_{x^2+y^2=1} u(x,y)$.

θα ανάγουμε το πρόβλημα στη γνωστή Laplacian.

Για αυτό θέτουμε

$$u(x,y) = v(x,Y) \quad , \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\, y$$

Τότε η v λύνει το πρόβλημα

$$v_{xx}(x,Y) + v_{YY}(x,Y) + e^{v(x,Y)} = 0 \quad x^2+2Y^2 \leq 1$$

Επίσης $\min\limits_{x^2+2Y^2 \leq 1} v(x,Y) < \min\limits_{x^2+2Y^2=1} v(x,Y)$

Προφανώς ότι η v έχει εσωτερικό (τοπικό) ελάχιστο, και επομένως αν (x_1, Y_1) ένα τέτοιο σημείο έχουμε

$$\nabla v(x_1, Y_1) = 0$$

$$\text{Hessian } v(x_1, Y_1) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta v(x_1, Y_1) \geq 0$$

17/ Όμως $e^{v(x_1, y_1)} > 0$

$$\Rightarrow u_{xx}(x_1, y_1) + v_{yy}(x_1, y_1) + e^{v(x_1, y_1)} > 0$$

ΑΤΟΠΟ,