1)

Θ1 α) $u_t(x,t) = x^2e^t+1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(x^2e^t+t\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[u(x,t) - x^2e^t - t\right] = 0$

$\Rightarrow \exists \; f(x):$

$u(x,t) - x^2e^t - t = f(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x,t) = f(x) + x^2e^t + t \quad , \quad x,t\in\mathbb{R}.$

Όμως $u_x(x,t) = 2xe^t + 2xe^{x^2} \Rightarrow$

$f'(x) + 2xe^t = 2xe^t + 2xe^{x^2} \Rightarrow$

$f'(x) = 2xe^{x^2} = \left(e^{x^2}\right)' \Rightarrow$

$\exists c\in\mathbb{R}$

$f(x) = e^{x^2} + c.$

Οπότε $u(x,t) = e^{x^2} + x^2e^t + t + c, \quad x,t\in\mathbb{R}$

β) Έστω πως έχει λύση (δηλ. $u\in C^{1,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$)

τότε όπως προηγουμένως άρα $\exists f\in C^1(\mathbb{R})$ ώστε

$u_t(x,t) = x^2e^t + t \Rightarrow$

$$u(x,t) = f(x) + x^2 e^t + t, \quad x,t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow u_x(x,t) = f'(x) + 2x e^t$$

Όμως πρέπει ταυτόχρονα

$$u_x(x,t) = x e^t + 2x e^{x^2}$$

Άρα πρέπει

$$f'(x) + 2x e^t = x e^t + 2x e^{x^2}$$

$$\Rightarrow x e^t = 2x e^{x^2} - f'(x)$$

Για $x \neq 0$, π.χ. $x > 0$

$$e^t = 2e^{x^2} - \frac{f'(x)}{x}, \quad \forall x > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Αδύνατον (Συνάρτηση μη σταθερή της μεταβλητής $t \in \mathbb{R}$, και με συνάρτηση της μεταβλητής x)

Θ2

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) - u^2(x,t) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

$$u(x,0) = -e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Ειδικότερα θα προσδιορίσουμε χαρακτηριστική καμπύλη $(x(s), t(s))$,

3)

Επιβεβαιώνουμε μια και

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) =$$

$$= u_x(x(s), t(s))\, x'(s) + u_t(x(s), t(s))\, t'(s)$$

$$x'(s) = 1 \quad , \quad s > 0$$
$$t'(s) = 1 \quad , \quad s > 0$$

και $x(0) = x_0$
$t(0) = 0$

Η λύση είναι $x(s) = s + x_0, \quad s \geq 0$
$t(s) = s \quad , \quad s \geq 0.$

Τότε θέτω $\sigma(s) = u(x(s), t(s))$
ικανοποιεί:

$$\sigma'(s) = u_x x' + u_t t' = u^2(x(s), t(s)) = \sigma^2(s)$$
$$s > 0$$

με $\sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = -e^{x_0} \neq 0$

Οπότε τουλάχιστον για αρκετά μικρό s (από τη συνέχεια της σ, $\sigma(s) \neq 0$) οπότε

$$\frac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = 1, \quad \text{ΑΣ} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right) = \frac{d}{ds} s \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sigma(s)}+s\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma(s)}+s=\frac{1}{\sigma(0)}+0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma(s)}+s=-e^{-x_0} \Rightarrow \frac{1}{\sigma(s)}=-\left(s+e^{-x_0}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(s)=-\frac{1}{s+e^{-x_0}}, \quad s\geq 0.$$

Η λύση ορίζεται $\forall\, s \geq 0$.

Έστω τώρα (x,t), $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ αυθαίρετο σημείο και $\bar{s}>0$, η τιμή της παραμέτρου s ώστε

$$\left|\begin{array}{l} x(\bar{s})=x \\ t(\bar{s})=t \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \bar{s}+x_0=x \\ \bar{s}=t \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \bar{s}=t \\ x_0=x-t \end{array}$$

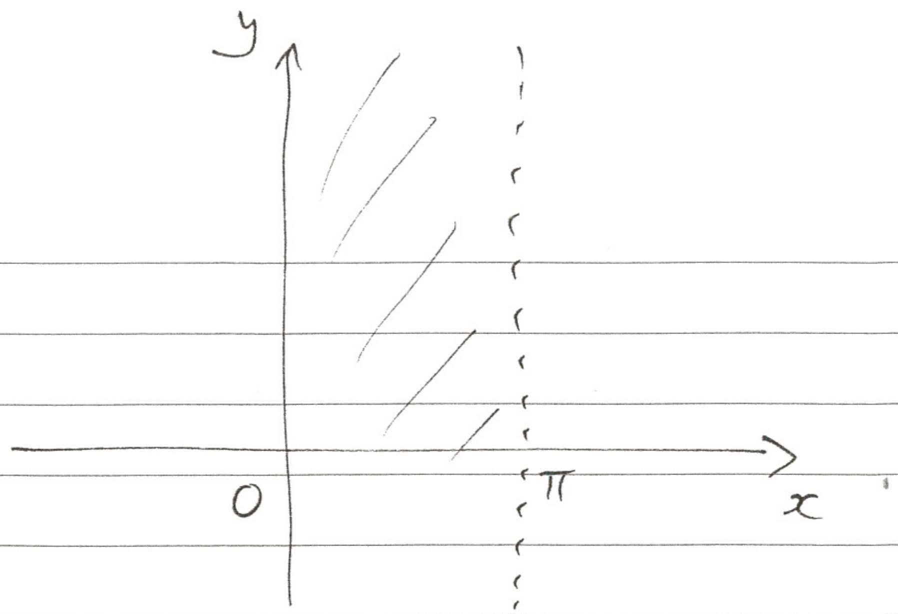
Τότε η $u(x,t)=u(x(\bar{s}),t(\bar{s}))=\sigma(\bar{s})=-\dfrac{1}{\bar{s}+e^{-x_0}}$

$$=-\frac{1}{t+e^{-(x-t)}}=-\frac{1}{t+e^{t-x}}, \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$$

είναι η λύση του προβλήματος.

5)

Θ3



Ψάχνουμε με τη μέθοδο του Fourier λύσεις στη μορφή

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y), \quad 0<x<\pi, \; y>0$$

Για να ικανοποιούν

$$u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)=0$$
$$u(\pi,y)=0 \Rightarrow X(\pi)=0$$

και για να λύνει την διαφορική εξίσωση

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow$$

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \quad 0<x<\pi, \; y>0$$

Οπότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(\mathrm{I}) \quad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad 0 < x < \pi$$
$$X(0) = X(\pi) = 0$$

&

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda, \quad y > 0$$

Επομένως από το (I) έχουμε το σύστημα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi$$
$$X(0) = X(\pi) = 0$$

Το πρόβλημα έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_n = n^2 \qquad n \in \mathbb{N}$$

και ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x) = \sin(nx), \quad 0 < x < \pi$.

Αντίστοιχα για το (II)

$$Y''(y) - n^2 Y(y) = 0, \quad y > 0$$

Η λύση είναι $Y_n(y) = c_1 e^{ny} + c_2 e^{-ny}, \quad y > 0$

7) Για να είναι η λύση φραγμένη, πρέπει $c_1=0$

(διαφορετικά δεν είναι φραγμένη αφού $\lim_{y\to+\infty} e^{ny} = +\infty$), $n\in\mathbb{N}$

Οπότε η λύση στην ιδιοτιμή $\lambda_n = n^2$, $n\in\mathbb{N}$ είναι $u_n(x,y) = \sin(nx)\, e^{-ny}$

Η Γενική λύση παίρνει την μορφή

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)\, e^{-ny}, \quad 0<x<\pi,\ y\geq 0.$$

Η συνθήκη της λύσης δίνει

$$u(x,0) = 3\sin x + 4\sin^3 x$$

Όμως επειδή $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\Rightarrow 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

Οπότε $u(x,0) = 6\sin x - \sin 3x$.

και επομένως πρέπει

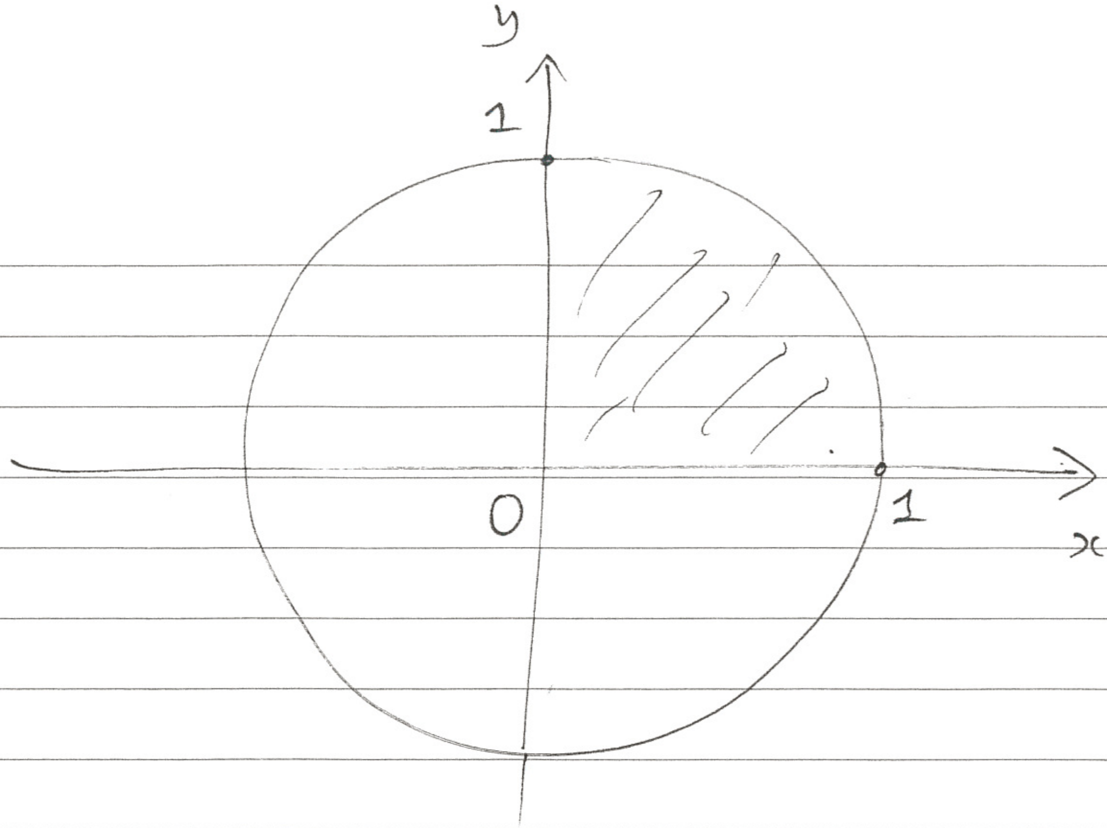
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = 6\sin x - \sin 3x$$

Από το μονοσήμαντο των σειρών Fourier, προκύπτει $c_1 = 6$, $c_3 = -1$ & $c_k = 0$, $k\neq 1,3$.

Οπότε τελικά η λύση είναι $u(x,y) = 6\sin x\, e^{-y} - \sin 3x \cdot e^{-3y}$

$0<x<\pi$, $y>0$

8)



Γράφουμε τη εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Οπότε οι συνοριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή:

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \Rightarrow v(r,0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

$$u_x(x,y) = v_r \frac{\partial r}{\partial x} + v_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 0<x^2+y^2<1$$

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x} \Rightarrow (1+\tan^2\vartheta)\,\vartheta_x = -\frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\vartheta_x = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow$$

$$\vartheta_x = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Οπότε

$$u_x(\cancel{0},y)=0 \Leftrightarrow$$

$$U_r\left(r,\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}(0,y) + U_\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0,y)=0$$

$$\Leftrightarrow U_r\left(r,\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0 + U_\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad U_\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad 0<r<1.$$

Σε πολικές συντεταγμένες η Δ.Ε. γράφεται

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \Leftrightarrow$$

$$U_{rr}(r,\vartheta)+\frac{1}{r}U_r(r,\vartheta)+\frac{1}{r^2}U_{\vartheta\vartheta}(r,\vartheta)=0$$

$$0<r<1,\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}.$$

10)

Ψάχνουμε για λύση στη μορφή

$$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

Τότε $u(r,0)=0 \Rightarrow \Theta(0)=0$

$$u_\theta(r,\tfrac{\pi}{2})=0 \Rightarrow \Theta'(\tfrac{\pi}{2})=0$$

και παίρνουμε

$$R''(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Theta''(\theta) =$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \qquad \begin{matrix} 0<r<1 \\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Οπότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

(I)
$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$
$$\Theta(0)=0, \quad \Theta'(\tfrac{\pi}{2})=0$$

&

(II)
$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = \lambda, \quad 0<r<1.$$

Από το (I) έχουμε ιδιοτιμές $\lambda_n = (2n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$\Theta_n(\theta) = \sin((2n-1)\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

$n \in \mathbb{N}$.

(II) $r^2 R''(r) + r R'(r) - (2n-1)^2 R(r) = 0$, $0 < r < 1$

είναι Δ. Εξίσωση Euler. Ψάχνουμε για λύση στη μορφή: $R(r) = r^{\mu} \Rightarrow$

$R'(r) = \mu r^{\mu-1}$

$R''(r) = \mu(\mu-1) r^{\mu-2}$, $0 < r < 1$

οπότε ισχύει

$$\mu(\mu-1) + \mu - (2n-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \pm (2n-1), \quad n \in \mathbb{N}$$

Γενική λύση ~~R(r) = c_1~~

$$R(r) = c_1 r^{2n-1} + c_2 r^{-(2n-1)}$$

Για να είναι φραγμένη, επιλέγουμε $c_2 = 0$

Άρα $U_n(r, \theta) = r^{2n-1} \sin((2n-1)\theta)$.

12)

τότε η γενική λύση είναι

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \sin\left((2n-1)\theta\right)$$

Όμως πρέπει επίσης

$$u(x,y) = y + 9yx^2 - 3y^3, \quad \text{για } 0<x<1, \ 0<y<1 \text{ και } x^2+y^2=1$$

τότε επειδή για $r=1$ έχουμε

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin\theta$$

έχουμε

$$v(1,\theta) = u(x,y) = \sin\theta + 9\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^3\theta$$

$$= \sin\theta + 9\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right) - 3\sin^3\theta$$

$$= 10\sin\theta - 12\sin^3\theta$$

$$= 10\sin\theta - 3\left[3\sin\theta - \sin 3\theta\right]$$

$$= \sin\theta + 3\sin 3\theta.$$

Επομένως $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 0, n \geq 3$

Οπότε η λύση είναι

$$v(r,\theta) = r\sin\theta + 3r^3\sin(3\theta)$$

$$= r\sin\theta + 3r^3[3\sin\theta - 4\sin^3\theta]$$

$$= r\sin\theta + 9r^3\sin\theta - 12(r\sin\theta)^3.$$

Τελικά η λύση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$u(x,y) = v(r,\theta) = y + 9(x^2+y^2)y - 12y^3$$

$$= y + 9x^2y - 3y^3, \quad 0 < x, y < 1$$

$$x^2+y^2 < 1.$$

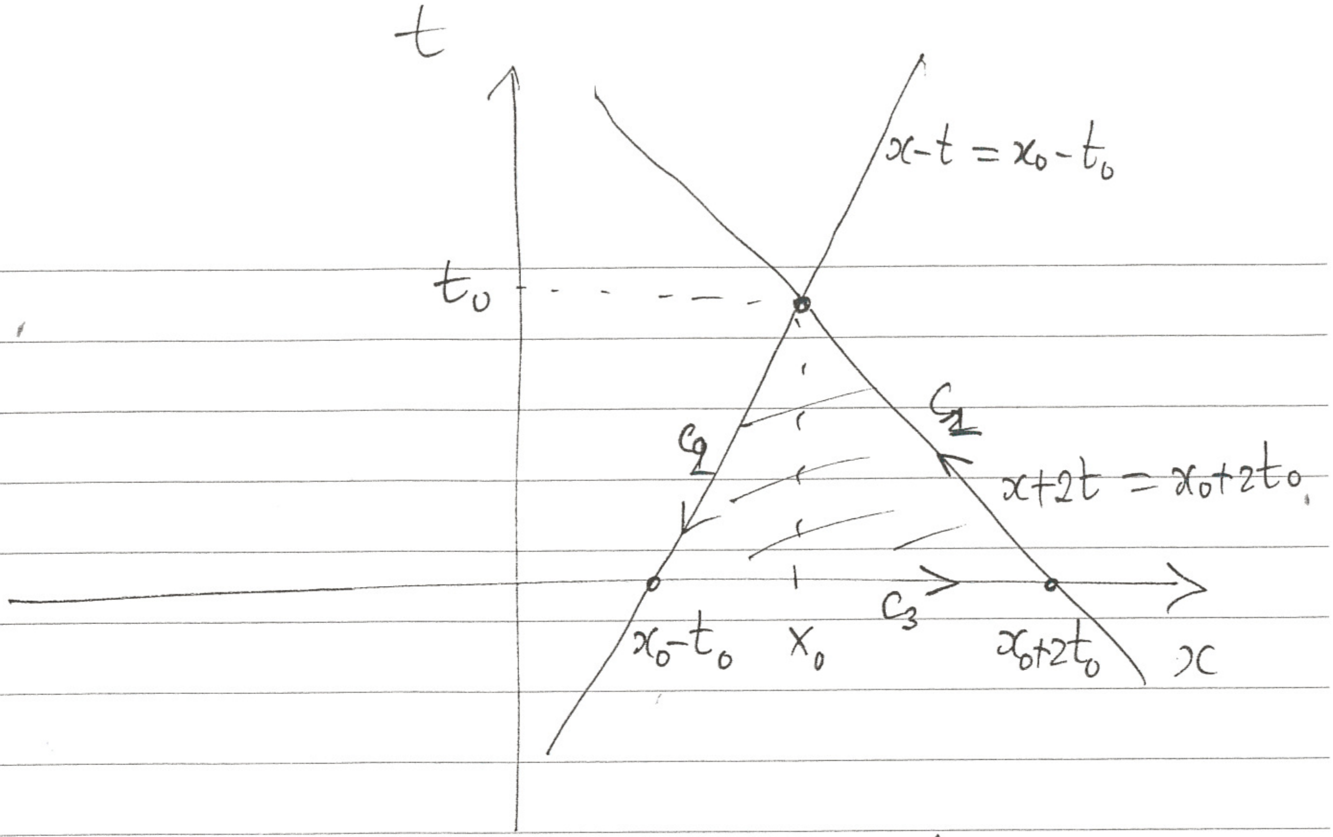
Θ5 Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι

$$x - t = x_0 - t_0$$

&

$$x + 2t = x_0 - 2t_0$$

14)



Με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης στο χωρίο Ω (όπως στο σχήμα) παίρνουμε

$$\iint_{\Omega} \left[u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) - 2u_{xx}(x,t) \right) dx\,dt =$$

$$\iint_{\Omega} f(x,t)\,dx\,dt$$

Θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας του Green

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right] dx\,dt = \oint_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dt)$$

15)

Επιλέγουμε $Q(x,t) = -u_t(x,t) - 2u_x(x,t)$

$P(x,t) = -u_t(x,t)$

οπότε

$$\iint_{\Omega} \left[u_{tt} - u_{xt} - 2u_{xx} \right] dx\,dt =$$

$$= \oint_{\partial\Omega} \left[-u_t\,dx - (u_t + 2u_x)\,dt \right]. \quad (1)$$

Όμως $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$C_1: \quad x + 2t = x_0 + 2t_0 \Rightarrow dx + 2dt = 0$

$$\int_{C_1} \left[-u_t\,dx - (u_t + 2u_x)\,dt \right] =$$

$$du = u_x\,dx + u_t\,dt$$

$$= \int_{C_1} \left[u_t\,2dt - u_t\,dt + u_x\,dx \right]$$

$$= \int_{C_1} \left[du \right] = u(x_0, t_0) - u(x_0 + 2t_0, 0).$$

Αντίστοιχα C_2: $x-t=x_0-t_0 \Rightarrow dx=dt$

$$\int_{C_2}\left[-u_t\,dx-(u_t+2u_x)\,dt\right]$$

$$=\int_{C_2}\left[-u_t\,dt-u_t\,dt-2u_x\,dx\right]$$

$$=\int_{C_2}\left[-2\,du\right]=-2u(x_0-t_0,0)+2u(x_0,t_0)$$

C_3: $t=0$

$$\int_{C_3}\left[-u_t\,dx-(u_t+2u_x)\,dt\right]=\int_{C_3}-\underbrace{u_t(x,0)}_{=0}\,dx$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$u(x_0,t_0)-u(x_0+2t_0,0)-2u(x_0-t_0,0)+2u(x_0,t_0)$$

$$=\iint_{\Omega}f(x,t)\,dx\,dt \Rightarrow$$

17)

$$\Omega = C(x_0, t_0)$$

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{3} \iint_{C(x_0,t_0)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{t_0} \int_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} f(x,t)\,dx\,dt$$

Θ6 Έστω πως το πρόβλημα έχει 2 διαφορετικές λύσεις u_1, u_2, τότε η

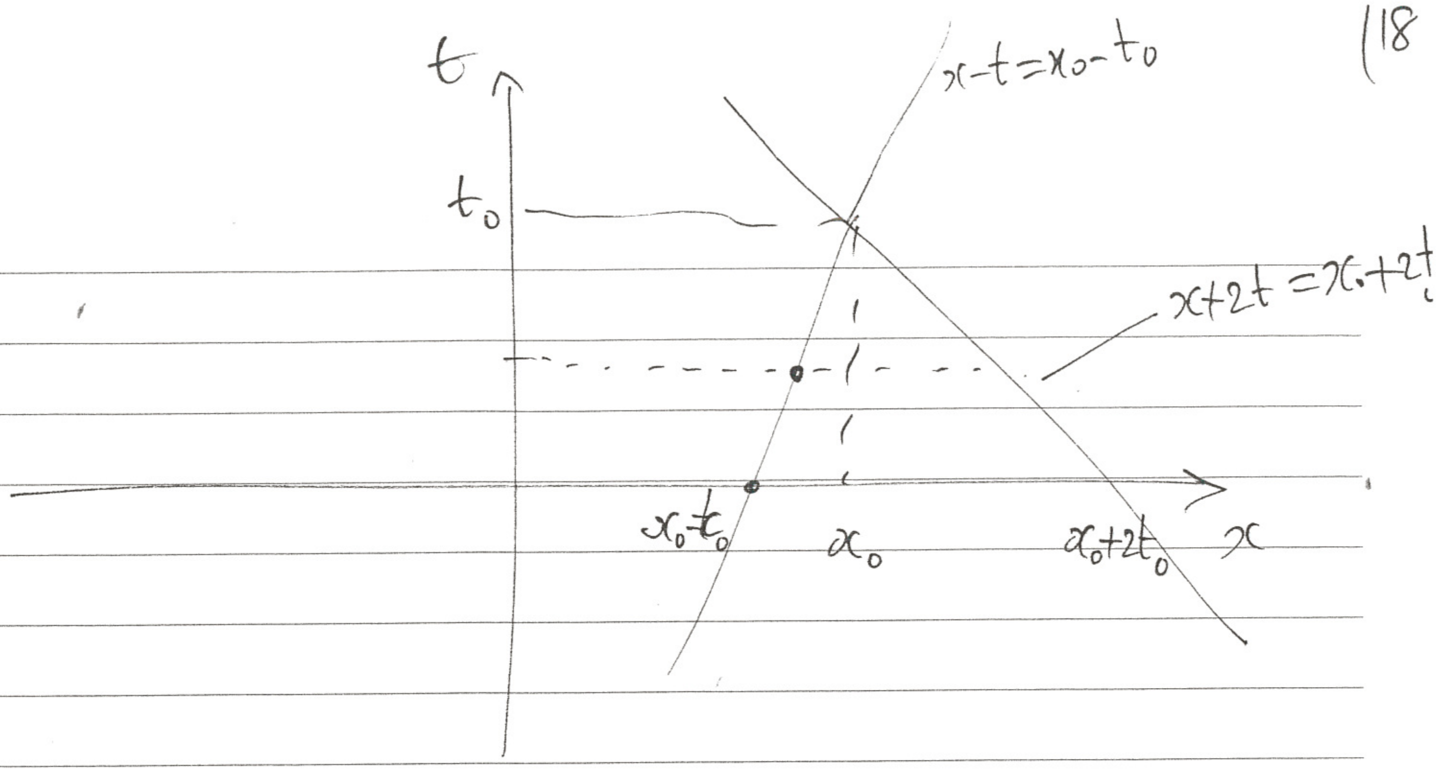
$$u = u_1 - u_2 \text{ λύνει το}$$

πρόβλημα

$$u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Όπως και προηγουμένως αν (x_0,t_0) αυθαίρετο σημείο, ο χαρακτηριστικός [illegible] είναι



Για $0<t<t_0$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\sigma(t) = \int_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} \left(\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t) \right) dx$$

Τότε

$$\sigma'(t) = \int_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} \left[u_t\, u_{tt} + 2 u_x\, u_{xt} \right] dx$$

$$+ \left(\frac{1}{2} u_t^2(-2t+x_0+2t_0, t) + u_x^2(-2t+x_0+2t_0, t) \right)(-2)$$

$$- \left(\frac{1}{2} u_t^2(t+x_0-t_0, t) + u_x^2(t+x_0-t_0, t) \right)$$

$$= \int_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} \left[u_t \left(u_{tt} - 2u_{xx} \right) \right] dx$$

19)

$$+(2 u_x u_t)\Big|_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} - 2\left(\frac{1}{2}u_t^2 + u_x^2\right)\Big|^{-2t+x_0-2t_0}$$

$$-\left(\frac{1}{2}u_t^2 + u_x^2\right)\Big|_{t+x_0-t_0}$$

$$= \int_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0} u_t u_{xt} \, dx + 2(u_x u_t)\Big|_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0}$$

$$-\left(u_t^2 + 2u_x^2\right)\Big|^{-2t+x_0-2t_0}$$

$$-\left(\frac{1}{2}u_t^2 + u_x^2\right)\Big|_{t+x_0-t_0}$$

$$= \left(\frac{1}{2}u_t^2\right)\Big|_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0-2t_0} + 2(u_x u_t)\Big|_{t+x_0-t_0}^{-2t+x_0+2t_0}$$

$$-\left(u_t^2 + 2u_x^2\right)\Big|^{-2t+x_0-2t_0}$$

$$-\left(\frac{1}{2}u_t^2 + u_x^2\right)\Big|_{t+x_0-t_0}$$

$$=$$

$$= -\frac{1}{2}u_t^2(-2t+x_0-2t_0, t) + 2(u_x u_t)\Big|^{-2t+x_0+2t_0},$$

$$- 2u_x^2\Big|^{-2t+x_0+2t_0}$$

$$- u_t^2(t+x_0-t_0, t) - u_x^2(t+x_0-t_0)$$

$$- 2(u_x u_t)\Big|_{t+x_0-t_0}$$

$$=$$

$$-\left(u_t + u_x\Big|_{t+x_0-t_0}\right)^2$$

$$-2\left(u_x - \frac{1}{2}u_t\right)^2\Big|_{-2t+x_0+2t_0}$$

$\leq 0.$, $\alpha\, t < t_0$

Για $t = 0$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t_0) = 0$

$\Rightarrow \sigma(t) \equiv 0 \Rightarrow u_t = 0 \Rightarrow u \equiv 0$