ΛΥΣΕΙΣ

1)

α) $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx =$$

Θέτουμε $y = 1+2e^x \Rightarrow dy = 2e^x dx$

$x=0 \longrightarrow y=3$

$x=1 \longrightarrow y=1+2e$

$$= \int_3^{1+2e} \frac{1}{y}\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}(\ln y)\Big|_3^{1+2e} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+2e) - \ln 3\right).$$

β) $$\int_0^1 \frac{1-x}{x^2-5x+6}\,dx$$

Έχουμε $\dfrac{1-x}{x^2-5x+6} = \dfrac{1-x}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$

Οπότε πρέπει $1-x = A(x-3)+B(x-2) \Leftrightarrow$

$-x+1 = (A+B)x - 3A - 2B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+2(A+B)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

και επομένως

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x^2-5x+6}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right]dx = \int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x-3}$$

$$= (\ln|x-2|)\Big|_0^1 - 2(\ln|x-3|)\Big|_0^1 = (\ln 1 - \ln 2) - 2(\ln 2 - \ln 3)$$

$$= -3\ln 2 + 2\ln 3 = \ln\frac{9}{8}.$$

γ) $\int_0^1 x^2 \sin x \, dx = \int_0^1 x^2 (-\cos x)' dx = (-x^2 \cos x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x(-\cos x) dx$

$= -\cos 1 + 2\int_0^1 x (\sin x)' dx$

$= -\cos 1 + 2\left((x \sin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x \, dx \right)$

$= -\cos 1 + 2\left(\sin 1 + (\cos x)\Big|_0^1 \right)$

$= -\cos 1 + 2\sin 1 + 2\cos 1 - 2$

$= \cos 1 + 2\sin 1 - 2.$

2) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^3+3n^2+5}$

Θα χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης:

" Έστω οι $a_n > 0$, $\beta_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοια ώστε

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n} = \ell > 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει. "

Παίρνουμε $a_n = \frac{n^2+1}{2n^3+3n^2+5}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$, τότε

$\frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\frac{n^2+1}{2n^3+3n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \frac{n(n^2+1)}{2n^3+3n^2+5} = \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right)}$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{1}{2}$.

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε θα αποκλίνει και η αρχική σειρά.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ συγκλίνει επίσης. Τότε όμως

με χρήση του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης
(Αν $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ συγκλίνει επίσης.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Αρχικά αν θεωρούμε $0 < a_n = \frac{n}{n^2+1} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

καθώς επίσης $a_{n+1}-a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)-n\left[(n+1)^2+1\right]}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)}$

$$= \frac{\cancel{n^3}+n+n^2+1-\cancel{n^3}-2n^2-2n}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)}$$

$$= \frac{-n^2-n+1}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)} \le \frac{-n^2}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)} < 0, \forall n \in$$

πληρούται η προϋπόθεση για

οπότε από το κριτήριο Leibniz
(Αν $a_n \downarrow$, $\lim a_n = 0 \Rightarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει)

και έτσι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ συγκλίνει.

(Δ)

3) α) Για $y>0$, θεωρούμε τη συνάρτηση
$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=x^4-4xy+3y^{4/3}$, $x\geq 0$
που είναι πολυωνυμική και άρα παραγωγίσιμη. Μάλιστα

$$f'(x)=4x^3-4y=4(x^3-y),$$

και επειδή $x^3-y>0 \Leftrightarrow x^3>y \Leftrightarrow x>y^{1/3}$
ενώ $x^3-y<0 \Leftrightarrow 0\leq x<y^{1/3}$
προκύπτει ότι η $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>y^{1/3}$, ενώ $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0\leq x<y^{1/3}$
Οπότε η f είναι φθίνουσα στο $[0,y^{1/3}]$ και αύξουσα στο $[y^{1/3},+\infty)$. Επομένως $f(x)\geq f(y^{1/3})$, $\forall x\geq 0$
Όμως $f(y^{1/3})=y^{4/3}-4y^{1/3}y+3y^{4/3}=0$, και άρα

$$f(x)=x^4-4xy+3y^{4/3}\geq 0 \quad ,\forall x\geq 0 \quad \Rightarrow 4xy\leq x^4+3y^{4/3},\ \forall x\geq 0.$$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor
(Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (a,β), τότε $\exists\ \xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$$f(\beta)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(\beta-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(\beta-a)^2 \Big).$$

Τότε για $a=0$, $\beta=x$, $0<x<1$, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Taylor και επομένως $\exists\ \xi(=\xi_x)\in(0,x)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

$$=3x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

$$\Rightarrow |f(x)-3x|=\frac{|f''(\xi)|}{2}x^2\leq\frac{4}{2}x^2=2x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2x^2 \leq f(x)-3x \leq 2x^2 \iff$$
$$3x-2x^2 \leq f(x) \leq 3x+2x^2, \quad \forall x \in (0,1).$$

4) (a)

Θα χρησιμοποιούσουμε το γεγονός ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

καθώς επίσης αν $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

τότε $\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$

a) $\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}{1+\frac{1}{n+2}}$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}{1+\frac{1}{n+2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)}$$

$$= \frac{e}{1} = 1$$

αφού η $(n+2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

β) $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}$

και επειδή η $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} \underset{(*)}{=} \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3}$$

$$= e^{1/3}.$$

(*) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής, οπότε αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

τότε και η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ επίσης συγκλίνει και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

γ) $$\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n+1} = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{3n-1+1}{3n-1}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n}\right]^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1+1}\right]^{1/3}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{4/3}}, \quad n\in\mathbb{N}$$

και επειδή η $(3n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ και οι συναρτήσεις $f(x)=x^{1/3}$, $g(x)=x^{4/3}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχείς προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{4/3}}$$

$$= \frac{1}{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\left(\lim\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)\right)^{4/3}}$$

$$= \frac{1}{e^{1/3}\cdot 1} = e^{-1/3}.$$

(β) Θα αποδείξουμε ότι αν $x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} n^2|x|^n = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα τύπου Bernoulli, (προκύπτει από το διώνυμο του Νεύτωνα) Αν $a>0$ και $\mathbb{N}\ni n\geq 3$, τότε

$$(1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$$

$$> \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3. \quad (**)$$

Αρχικά αν $x=0$, τότε $n^2x^n=0$, οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot 0 = 0$.
Έστω ότι $x\neq 0$, $|x|<1$. Θέτουμε

$$1+a=\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow a=\frac{1-|x|}{|x|}>0,$$

Για $n\geq 3$, από την ανισότητα (**) παίρνουμε

$$\frac{1}{|x|^n} = (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{1-|x|}{|x|}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$|x|^n \leq \frac{6}{n(n-1)(n-2)}\cdot\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$n^2|x|^n \leq \frac{6n}{(n-1)(n-2)}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^3 \leq \frac{12}{n-2}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^3$$

$\frac{n}{n-1}\leq 2 \Leftrightarrow n\leq 2n-2 \Leftrightarrow n\geq 2$ ✓

8)

και επομένως

$$-\frac{12}{n-2}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^3 \leq n^2x^n \leq \frac{12}{n-2}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^3, \quad n \geq 3$$

και με εφαρμογή του κριτηρίου ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\lim_{n\to\infty} n^2x^n = 0$

αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-2} = 0$.

<u>Διαφορετική λύση</u>

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει

για $|x| < R = 1$, και επομένως η ακολουθία n^2x^n είναι μηδενική ακολουθία αν $|x| < R = 1$.

$\boxed{\cdot}$

Η για $x \neq 0$ να εφαρμοστεί κατάλληλα το κριτήριο του λόγου για την απόδειξη σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.