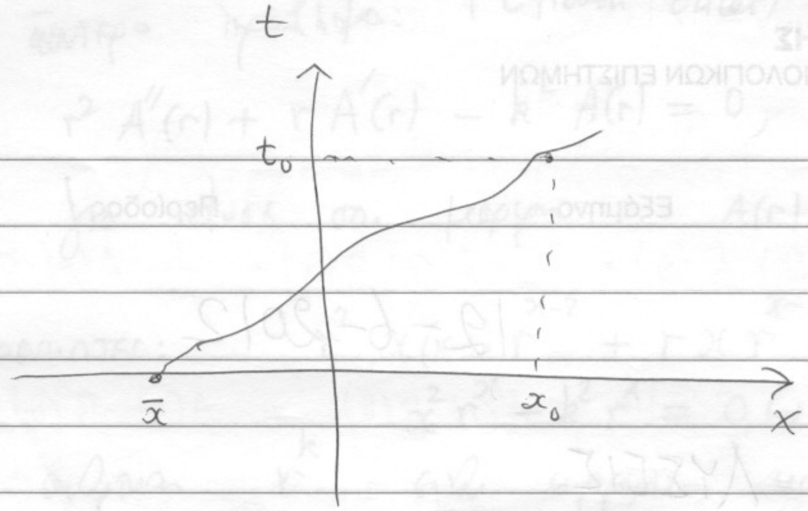
1) 1) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών



Δηλ. Έστω $(x(s), t(s))$ η χαρακτηριστική καμπύλη που για $s=0$ βρίσκεται στον άξονα των αρχικών δεδομένων και για $s=\bar{s}$ διέρχεται από το σημείο (x_0, t_0). Τότε θα έχουμε

$$x'(s) = 1, \quad s>0$$
$$x(0) = \bar{x}$$

$$t'(s) = 1$$
$$t(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = \bar{x} + s, \quad t(s) = s$$

όμως $x(\bar{s}) = x_0 \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{s} = x_0$, $t(\bar{s}) = t_0 \Leftrightarrow \bar{s} = t_0$ $\Big|$ $\bar{s} = t_0 \Rightarrow \bar{x} = x_0 - t_0$

Τότε άρα $x(s) = x_0 - t_0 + s$, $t(s) = s$.

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$$
$$= x(s)\, u(x(s), t(s))$$

$\sigma(s) = u(x(s), t(s))$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\sigma(s) = (x_0 - t_0 + s)\,\sigma(s) \Rightarrow \frac{\frac{d}{ds}\sigma(s)}{\sigma(s)} = x_0 - t_0 + s$$

Οπότε $\dfrac{\sigma(s)}{\sigma(0)} = e^{\frac{1}{2}(x_0-t_0+s)^2 - \frac{1}{2}(x_0-t_0)^2} \Leftrightarrow$

$$u(x(s), t(s)) = u(x_0 - t_0, 0)\, e^{\frac{1}{2}(x_0-t_0+s)^2 - \frac{1}{2}(x_0-t_0)^2}$$

$$u(x(s),t(s)) = f(x_0-t_0)\, e^{\frac{1}{2}(x_0-t_0+s)^2-\frac{1}{2}(x_0-t_0)^2}$$

$s=\bar{s}$

$$u(x_0,t_0) = f(x_0-t_0)\, e^{t_0 x_0 - \frac{t_0^2}{2}}$$

$$u(x,t) = f(x-t)\, e^{tx-\frac{t^2}{2}}$$

2) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, μιας και

$$\Delta = 9-8 = 1 > 0.$$

Για να βρούμε μια μετασχηματισμό κανονικής μορφής $\xi = \alpha x+\beta t$, $\eta = \gamma x+\delta t$ ώστε αν $u(x,t) = U(\xi,\eta)$, τότε η εξίσωση στο κανονικό σύστημα να ικανοποιεί $U_{\xi\eta} = 0$

Πράγματι έχουμε $u_x = U_\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial\eta}{\partial x} = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta$

$$u_{xx} = \alpha\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \gamma\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$= \alpha\left(\alpha U_{\xi\xi} + \gamma U_{\xi\eta}\right) + \gamma\left(\alpha U_{\eta\xi} + \gamma U_{\eta\eta}\right)$$

$$= \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$$

$$u_{xt} = \alpha\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) + \gamma\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$$

$$= \alpha\left(\beta U_{\xi\xi} + \delta U_{\xi\eta}\right) + \gamma\left(\beta U_{\eta\xi} + \delta U_{\eta\eta}\right)$$

$$= \alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta+\beta\gamma) U_{\eta\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta}$$

$$u_t = U_\xi\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_\eta\frac{\partial\eta}{\partial t} = \beta U_\xi + \delta U_\eta$$

$$u_{tt} = \beta\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) + \delta\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$$

$$= \beta\left(\beta U_{\xi\xi} + \delta U_{\xi\eta}\right) + \delta\left(\beta U_{\eta\xi} + \delta U_{\eta\eta}\right)$$

$$= \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}.$$

Οπότε:

$$\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta} + 3\left(\alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta+\beta\gamma) U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta}\right)$$
$$+ 2\left(\alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}\right) = 0 \iff$$

3) (1) $(\beta^2+3\alpha\beta+2\alpha^2)\,U_{\xi\xi} + \left(2\beta\delta+3(\alpha\delta+\beta\gamma)+4\alpha\gamma\right)U_{\xi\eta} + (\delta^2+3\gamma\delta+2\gamma^2)\,U_{\eta\eta}=0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $t^2+3t+2=0$ έχει ρίζες

$$t_1=-2\ ,\quad t_2=-1$$

Οπότε επιλέγουμε $\frac{\beta}{\alpha}=-2$ και $\frac{\delta}{\gamma}=-1 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$, $\delta=-\gamma$.

δηλ. $\xi=x-2t\ ,\quad \eta=x-t$

και τότε η (1) γράφεται: $-U_{\xi\eta}=0$

και επομένως $\exists\ F, G$ ώστε

$$U(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta) \Leftrightarrow$$
$$u(x,t)=F(x-2t)+G(x-t).$$

Θα προσδιορίσουμε τις F, G από τις αρχικές συνθήκες.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} F(x)+G(x)=f(x) \\ -2F'(x)-G'(x)=g(x) \end{array}\right. \quad x\in\mathbb{R}.$$

οπότε $\exists\ c\in\mathbb{R}$ ώστε

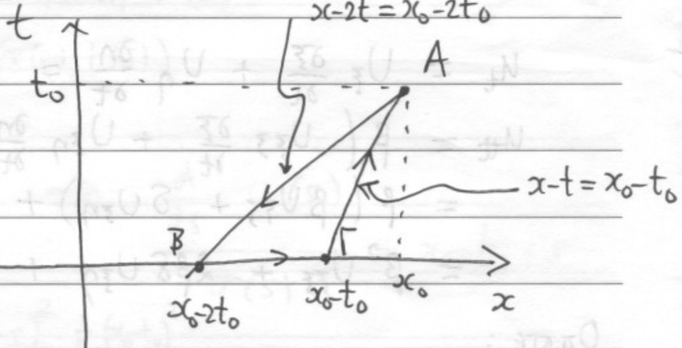
$$\left.\begin{array}{l} F(x)+G(x)=f(x), \quad x\in\mathbb{R} \\ 2F(x)+G(x)=-\int_0^x g(s)ds+c \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} F(x)=-f(x)-\int_0^x g(s)ds+c \\ G(x)=2f(x)+\int_0^x g(s)ds-c \end{array}\right. \quad x\in\mathbb{R}$$

και τελικά

$$u(x,t)=-f(x-2t)-\int_0^{x-2t} g(s)ds+c+2f(x-t)+\int_0^{x-t} g(s)ds-c$$

$$=2f(x-t)-f(x-2t)+\int_{x-2t}^{x-t} g(s)ds\ ,\quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$$

3). Όπως είδαμε στο θέμα 2ο οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι $x-2t$, $x-t$ οπότε αυτές που διέρχονται από το (x_0,t_0) τα δύο ~~είναι~~ όπως στο σχήμα.



Θα ολοκληρώσουμε στο τρίγωνο ΑΒΓ ~~που~~ που ορίζουν οι δύο χαρακτηριστικές

χαρακτηριστικές $x-2t=x_0-2t_0$, $x-t=x_0-t_0$ και ο άξονας $t=0$.

Οπότε παίρνουμε

$$\iint_\Delta \left(u_{tt}(x,t)+3u_{xt}(x,t)+2u_{xx}(x,t)\right)dx\,dt=\iint_\Delta f(x,t)\,dx\,dt$$

$$\Leftrightarrow \iint_\Delta \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t+u_x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2u_t+2u_x\right)\right]dx\,dt=\iint_\Delta f(x,t)\,dx\,dt.$$

Θα εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Green

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)dx\,dt=\oint_{\partial\Omega}\left(Q\,dt+P\,dx\right)$$

με $Q=2u_t+2u_x$ και $P=-u_t-u_x$.

Οπότε
$$\iint_\Delta \left[u_{tt}+3u_{xt}+2u_{xx}\right]dx\,dt=\oint_{\partial\Delta}\left[2(u_t+u_x)dt-(u_t+u_x)dx\right]$$

Όμως:
$$\int_{\vec{\Gamma A}}\left[2(u_t+u_x)dt-(u_t+u_x)dx\right]=\int_{\vec{\Gamma A}}du=u(x_0,t_0)-\overset{0}{u(x_0-t_0,0)}$$
$$=u(x_0,t_0).$$

στο ΓΑ: $x-t=x_0-t_0 \Rightarrow dx=dt$, &
$$du=u_x\,dx+u_t\,dt$$
$$\Rightarrow 2(u_t+u_x)dt-(u_t+u_x)dx=2(u_t+u_x)dt-(u_t+u_x)dt$$
$$=(u_t+u_x)dt$$
$$=u_t\,dt+u_x\,dt$$
$$=u_t\,dt+u_x\,dx=du.$$

5) Παρόμοια: στο AB. $x-2t = x_0-2t_0 \Rightarrow dx = 2dt$, οπότε

$$2(u_t+u_x)dt - (u_t+u_x)dx = 0.$$

και έτσι

$$\int_{AB}\left[2(u_t+u_x)dt - (u_t+u_x)dx\right] = 0$$

Παρόμοια στο ΓΑ είναι μηδέν οπότε τελικά έχουμε:

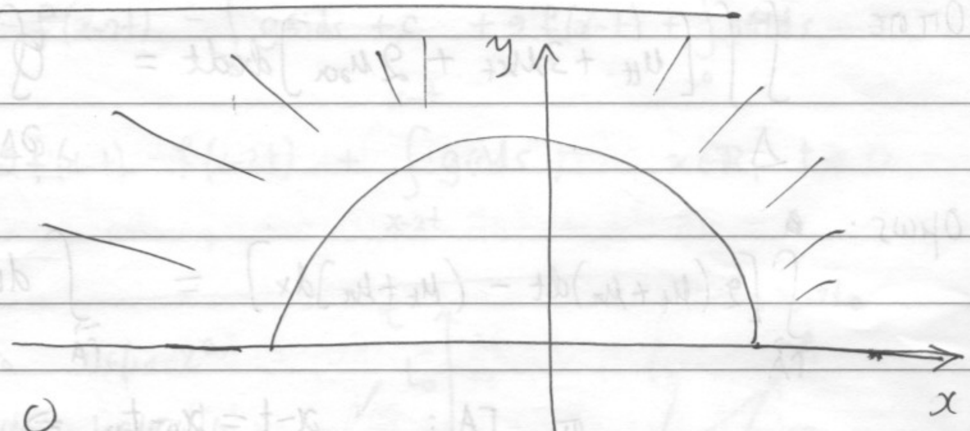
$$+u(x_0,t_0) = \iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt$$

$\Rightarrow$

$$u(x_0,t_0) = +\iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= +\int_0^{t_0}\int_{x_0-2(t_0-t)}^{x_0-(t_0-t)} f(x,t)\,dx\,dt.$$

4)



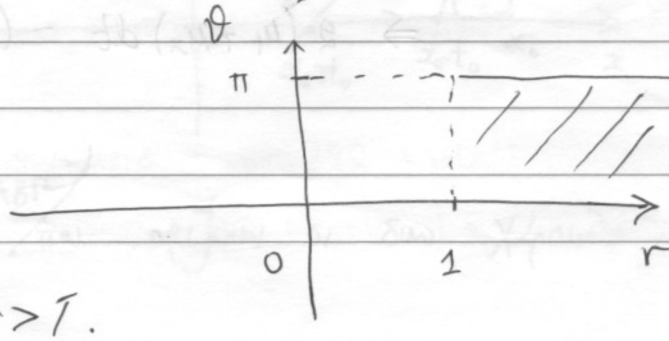
$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$u(x,y)=v(r,\vartheta)$$

$$\Updownarrow$$

$$v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta}=0$$

με $v(r,0)=0=v(r,\pi)$, $r>1$.



Ψαχνουμε για λυσης στη μορφη:

$$v(r,\vartheta)=A(r)\,B(\vartheta)$$

Τοτε προκυπτει: οτι πρεπει:

$$A''(r)\,B(\vartheta)+\frac{1}{r}A'(r)\,B(\vartheta)+\frac{1}{r^2}A(r)\,B''(\vartheta)=0$$

$$\Leftrightarrow\ r^2A''(r)\,B(\vartheta)+rA'(r)\,B(\vartheta)+A(r)\,B''(\vartheta)=0$$

$$\frac{\left(r^2A''(r)+rA'(r)\right)}{A(r)}+\frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)}=0.$$

Οποτε $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}:\quad \dfrac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)}=-\lambda,\qquad \vartheta\in(0,\pi)$

&

$$\frac{r^2A''+rA'}{A}-\lambda=0,\quad r>1.$$

Αλλ προκυπτουν αφου

$$v(r,0)=0\Leftrightarrow B(0)=0$$
$$v(r,\pi)=0\Leftrightarrow B(\pi)=0$$

Τα συστηματα:

$$B''(\vartheta)+\lambda\,B(\vartheta)=0,\qquad 0<\vartheta<\pi$$
$$B(0)=B(\pi)=0$$

&

$$r^2A''(r)+rA'(r)-\lambda A(r)=0,\qquad r>1.$$

Το πρωτο προβλημα ιδιοτιμων το εχουμε λυσει πολλες φορες και εχει

7) προκύπτει ιδιοτιμές $\lambda_k = k^2$, ιδιοσυναρτήσεις $B_k(\theta) = \sin k\theta$, $k \in \mathbb{N}$.

Για το δεύτερο πρόβλημα: (Εξίσωση Euler)

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - k^2 A(r) = 0, \quad r>1$$

ψάχνουμε για λύση στη μορφή $A(r) = r^x$

οπότε προκύπτει: $r^2 x(x-1) r^{x-2} + r x r^{x-1} - k^2 r^x = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 r^x - k^2 r^x = 0 \Leftrightarrow x = \pm k$

Όμως η συνάρτηση r^k είναι απεριόριστη καθώς $r \to +\infty$ και απορρίπτεται.

Έτσι λοιπόν η γενική λύση που προκύπτει είναι η

$$v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^{-k} \sin k\theta$$

Επειδή όμως για $r=1$, έχουμε

$$v(1,\theta) = \pi \sin\theta - \sin 2\theta, \quad 0<\theta<\pi$$

θα πρέπει

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta = \pi \sin\theta - \sin 2\theta$$

άρα (λόγω μοναδικότητας των σειρών Fourier)

$$a_1 = \pi, \quad a_2 = -1, \quad \text{και } a_k = 0, \ k \geq 3.$$

Οπότε τελικά η λύση είναι

$$v(r,\theta) = \frac{\pi \sin\theta}{r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \quad r \geq 1, \ 0<\theta<\pi.$$

5) Έστω πως το πρόβλημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις u_1, u_2. Τότε η $\omega(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα:

$$\omega_{tt}(x,t) + \omega_{xxxx}(x,t) = 0, \quad 0<x<1, \ t>0$$

$$\omega(x,0) = 0$$
$$\omega_t(x,0) = 0 \qquad 0<x<1$$

$$\omega(0,t) = \omega(1,t) = 0 \qquad t>0$$
$$\omega_{xx}(0,t) = \omega_{xx}(1,t) = 0, \quad t>0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την Δ.Ε με ω_t και ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ και παίρνουμε:

$$\int_0^1 [\omega_{tt} + \omega_{xxxx}]\,\omega_t \, dx = 0 \qquad (2)$$

Όμως $$\int_0^1 \omega_t\, \omega_{tt}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \omega_t^2(x,t)\,dx\right)$$

Ενώ $$\int_0^1 \omega_{xxxx}(x,t)\,\omega_t(x,t)\,dx = -\int_0^1 \omega_{xxx}(x,t)\,\omega_{tx}(x,t)\,dx + \underbrace{\left(\omega_{xxx}(x,t)\,\omega_t(x,t)\right)\Big|_0^1}_{=0}$$

Όμως $\omega(0,t) = 0 \Rightarrow \omega_t(0,t) = 0$ &
$\omega(1,t) = 0 \Rightarrow \omega_t(1,t) = 0$

Οπότε $$\int_0^1 w_{xxxx}\, w_t\, dx = -\int_0^1 w_{xxx}(x,t)\, w_{tx}(x,t)\,dx$$

$$= \int_0^1 w_{xx}(x,t)\, w_{txx}(x,t)\,dx$$

$$- \left(w_{xx}(x,t)\, w_{tx}(x,t)\right)\Big|_0^1 .$$

Όμως $w_{xx}(1,t) = w_{xx}(0,t) = 0$

Οπότε έχουμε:

$$\int_0^1 w_{xxxx}(x,t)\, w_t(x,t)\,dx = \int_0^1 w_{xx}(x,t)\, w_{xxt}(x,t)\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,t)\,dx\right).$$

Έτσι η (2) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,t)\,dx\right] = 0.$$

και επομένως:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,0)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_{xx}^2(x,0)\,dx$$

10) Όμως $w_t(x,0)=0$ επίσης $0<x<1$

$w(x,0)=0 \Rightarrow w_x(x,0)=0 \Rightarrow w_{xx}(x,0)=0$

$0<x<1.$

Οπότε

$$\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \int_0^1 w_{xx}^2(x,t)dx = 0$$

και επειδή πρόκειται για μη αρνητικές ολοκληρώσεις έχουμε

$$\int_0^1 w_t^2(x,t)dx = 0 \Rightarrow w_t(x,t)\equiv 0.$$

Όμως $w(x,0)=0 \xRightarrow{\text{Θεώρημα Μέσης Τιμής}} w(x,t)\equiv w(x,0)=0.$

ΑΤΟΠΟ

b) Έστω πως το πρόβλημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις u_1, u_2, τότε η $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_t(x,t) - w_{xx}(x,t)=0, \quad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$w(0,t)=0, \quad t>0$$

$$w(x,0)=0, \quad 0<x<\pi$$

$$w_x(\pi,t)+a\, w_t(\pi,t)=0, \quad t>0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ με w και ολοκληρώνοντας στο $[0,\pi]$ παίρνουμε:

$$\int_0^{\pi} \left[w(x,t)\, w_t(x,t) - w(x,t)\, w_{xx}(x,t) \right] dx = 0 \iff$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \right) - \int_0^{\pi} w_{xx}(x,t)\, w(x,t)\,dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \right) + \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx - \left(w(x,t)\, w_x(x,t) \right)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \right) + \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx - w(\pi,t)\, w_x(\pi,t) + \underbrace{\cancel{w(0,t)\, w_x(0,t)}}_{0} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \right) + \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx + a\, w(\pi,t)\, w_t(\pi,t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx + \frac{a}{2}\, w^2(\pi,t) \right) + \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx = 0$$

Τότε η μη αρνητική συνάρτηση

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx + \frac{a}{2}\, w^2(\pi,t)$$

Είναι φθίνουσα, αφού $\sigma'(t) = -\int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx \leq 0$

οπότε $\frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx + \frac{a}{2}\, w^2(\pi,t) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,0)\,dx + \frac{a}{2}\, w^2(\pi,0)$.

12) Όμως $\omega(x,0)=0 \quad 0<x<\pi \Rightarrow \omega(x,0)=0 \quad , 0\leq x\leq\pi$

(λόγω συνέχειας της $\overset{\omega}{f}$)

και άρα $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\omega^2(x,t)dx + \frac{a}{2}\omega^2(\pi,t) \leq 0$

$\Rightarrow \quad \omega(x,t)\equiv 0$ ΑΤΟΠΟ.