ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \min\left(1, \frac{2}{5}\varepsilon\right)$.

Τότε για $|x-2| < \delta$ θα έχουμε επίσης

$$|x-2| < 1 \iff -1 < x-2 < 1 \iff 1 < x < 3$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \ (*) \quad \& \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{x} < \frac{5}{2}$$

Οπότε

$$\left|\frac{x^2+1}{x} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2(x^2+1)-5x}{2x}\right| = \left|\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{2x}\right| \overset{(*)}{=} |x-2| \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$$

$$< \frac{5}{2}|x-2| < \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \varepsilon$$

αφού επίσης $|x-2| < \frac{2}{5}\varepsilon$.

β) Παρατηρούμε ότι για $x \in [0, \infty) - \{1\}$ έχουμε

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x}+1,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2.$$

Θέμα 2ο

Για $x > 0$, $y > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = 2xy - x\ln x - e^{2y-1}, \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = 2y - \ln x - x\cdot\frac{1}{x} = 2y-1-\ln x.$$

Επειδη $f'(x)>0 \iff 2y-1-\ln x>0 \iff$

$\ln x < 2y-1 \iff e^{\ln x} < e^{2y-1} \iff x < e^{2y-1}$

προκυπτει οτι f ειναι αυξουσα στο διαστημα $(0, e^{2y-1}]$ και φθινουσα στο $[e^{2y-1}, +\infty)$ και επομενως

αν $0<x\le e^{2y-1} \Rightarrow f(x)\le f(e^{2y-1})$ ενω

αν $x \ge e^{2y-1} \Rightarrow f(x) \le f(e^{2y-1})$.

Επομενως παντοτε εχουμε αν $x>0$ $f(x)\le f(e^{2y-1})$. Ομως

$$f(e^{2y-1}) = 2y e^{2y-1} - e^{2y-1}\ln(e^{2y-1}) - e^{2y-1} =$$

$$= 2ye^{2y-1} - (2y-1)e^{2y-1} - e^{2y-1} = 0$$

οποτε αν $x>0$

$f(x) \le f(e^{2y-1}) = 0$, δηλ.

$$2xy - x\ln x - e^{2y-1} \le 0 \iff 2xy \le x\ln x + e^{2y-1}.$$

Θεμα 3ο α) Θα χρησιμοποιησουμε απο τη θεωρια μας

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Εχουμε $\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^n}$

Ομως $\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{1/3}$

και επειδη η ακολουθια $(3n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι υπακολουθια της $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ εχουμε (καθε υπακολουθια συγκλινουσας ακολουθιας συγκλινει στο ιδιο οριο με την αρχικη) και επομένως έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\left[1+\frac{1}{3n-1}\right]^{1/3}}$$

$$= \frac{1}{\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{1/3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{1/3}}$$

$$= \frac{1}{e^{1/3}\cdot 1} = e^{-1/3}.$$

β) Θα αποδείξουμε αρχικά με επαγωγή πως

$$0 < a_n \leq 2, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \quad (*)$$

Πράγματι για $n=1$, $a_1=2$ οπότε η $(*)$ αληθεύει.

Έστω πως η $(*)$ αληθεύει για $n=k\in\mathbb{N}$, δηλ.

$$0 < a_k \leq 2 \quad (1),$$

θα αποδείξουμε πως ισχύει επίσης $0 < a_{k+1} \leq 2$.

Όμως $0 < a_{k+1} \leq \frac{a_k^4}{8}$ (2) και επειδή από (1) έχουμε

$a_k^4 \leq 2^4 \Rightarrow \frac{a_k^4}{8} \leq 2$ (3) και από (2), (3) προκύπτει

$$0 < a_{k+1} \leq \frac{a_k^4}{8} \overset{(3)}{\leq} 2 \Rightarrow 0 < a_{k+1} \leq 2.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η a_n είναι φθίνουσα.

Πράγματι $a_{n+1} - a_n \leq \frac{a_n^4}{8} - a_n = \frac{a_n}{8}\left(a_n^3 - 2^3\right)$

$$= \overset{+}{\frac{a_n}{8}}\overset{-}{(a_n-2)}\underbrace{\left(a_n^2+2a_n+4\right)}_{(a_n+1)^2+3\,>\,0} \leq 0$$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως η a_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη οπότε συγκλίνει, έστω το x. Επειδή

$$0 < a_n \leq 2$$

από ιδιότητα ορίων θα έχουμε

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \quad (4)$$

Επίσης η a_{n+1} είναι υπακολουθία της a_n, οπότε $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$.

Όμως έχουμε επίσης

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n^4}{8} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \leq \frac{(\lim a_n)^4}{8}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{x^4}{8} \Leftrightarrow 8x \leq x^4 \Leftrightarrow x(x^3-2^3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{+} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \quad (5)$$

Από (4), (5) προκύπτει πως είτε $x=2$ είτε $x=0$. Τίθεται το ερώτημα, μπορεί το $x=2$; Για να είναι το όριο 2 (αφού $a_1=2$ και είναι φθίνουσα) θα πρέπει να ισχύει $a_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ που είναι αποδεκτό σενάριο.

Εάν τώρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι η σταθερή ακολουθία $(2)_{n\in\mathbb{N}}$ και άρα $0<a_n\leq 2$, θα

πρέπει να υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a_{n_0} < 2$. Τότε όμως λόγω μονοτονίας θα έχουμε επίσης

$$0 < a_n \leq a_{n_0} < 2 \quad , \quad \forall n \geq n_0$$

και επομένως

$$0 \leq \lim a_n \leq a_{n_0} < 2$$

$$0 \leq x \leq a_{n_0} < 2 \qquad (6)$$

και οι ανισότητες (5), (6) δίνουν τότε ότι $x = 0$.

Θέμα 4° Θεωρούμε αρχικά τη συνάρτηση $f: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = g(x) - \frac{x^3 - 2}{3}$, που είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$. Μάλιστα για $x > 2$

$$f'(x) = g'(x) - x^2 \leq 0$$

και η f είναι φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε για $x \geq 2$ έχουμε

$$f(x) \leq f(2) = g(2) - \frac{2^3 - 2}{3} = 2 - \frac{6}{3} = 0,$$

δηλ. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$g(x) \leq \frac{x^3 - 2}{3}, \quad \forall x \geq 2.$$

Παρόμοια θεωρούμε τη $h: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 2.$

Η h είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$h'(x) = g'(x) - x \geq 0, \quad \forall x > 2$$

οπότε πρόκειται για αύξουσα συνάρτηση στο $[2, +\infty)$ και άρα για $x \geq 2$ $h(x) \geq h(2) = g(2) - \frac{2^2}{2} = 0$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \geq 2.$$