Θ1 α) Παρατηρούμε ότι $1-\frac{1}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}>0$, οπότε από την ανισότητα Bernoulli, παίρνουμε ότι

$$1 \geq \left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n \overset{(\text{Bernoulli})}{\geq} 1-\frac{n}{n^2+1}, \quad n\in\mathbb{N}$$

και επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1-\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=1$$

από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, προκύπτει ότι η ακολουθία $\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n=1$.

Επίσης επειδή $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n=1\neq 0$

έχουμε ότι $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\frac{1}{\lim\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n}=1.$

β) Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $0<a_n\leq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Το οποίο θα αποδείξουμε επαγωγικά. Πράγματι: Για $n=1$ αληθεύει αφού $a_1=1$. Έστω ότι αληθεύει για $n=k\in\mathbb{N}$, δηλ. $0<a_k\leq 1$ και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για $n=k+1$, δηλ. ότι $0<a_{k+1}\leq 1$. Όμως αφού $0<a_k\leq 1\leq\frac{\pi}{2}$ έχουμε από τη γνωστή ανισότητα ($0<\sin x<x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$), ότι $0<\sin a_k<a_k\leq 1$, και επομένως $0<a_{k+1}\leq 1$. Το ζητούμενο.
Επίσης αφού $0<a_k<\frac{\pi}{2}$, έχουμε ότι $0<\sin a_k<a_k \Leftrightarrow 0<a_{k+1}<a_k$, δηλ. η a_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία. Οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα (Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα) έχουμε ότι a_n είναι συγκλίνουσα ακολουθία. Επειδή όμως $0<a_n\leq 1$, έχουμε επίσης $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$ (1)
Επίσης αφού η a_{n+1} είναι υπακολουθία της a_n έχουμε ότι: $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=x$ και επομένως στην αναδρομική σχέση $a_{n+1}=\sin a_n$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)\Rightarrow x=\sin x \quad (2)$$

Από (1),(2) προκύπτει ότι $x=0$, γιατί αν ήταν $0<x\leq 1$, τότε $\sin x<x$ που αντιβαίνει στην (2).

Θ2 α) Θα αποδείξουμε ότι για $a>0$ η f είναι συνεχής στο 0^+, ενώ για
i) $a=0$ <u>δεν</u> είναι.

Όταν $a>0$, παρατηρούμε ότι $0<x$, $|f(x)| = |x|^a \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|^a$

και επειδή $\lim_{x\to 0^+} |x|^a = 0$, έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Για $a=0$, θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$ και

$y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $n\in\mathbb{N}$. ($\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$) Τότε $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi) = 0$,

οπότε $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$, ενώ $f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

οπότε $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$. Συμπεραίνουμε ότι $\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

ii) Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο 0^+, πρέπει

$$\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{a-1}\sin\frac{1}{x}\right).$$

Θα αποδείξουμε, όπως παραπάνω, ότι το όριο υπάρχει αν $a-1>0 \Leftrightarrow a>1$ ενώ <u>δεν</u> υπάρχει αν $a-1\leq 0$.

Πράγματι αν $a>1$, $\lim_{x\to 0^+}\left|x^{a-1}\sin\frac{1}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0^+}|x|^{a-1} = 0$.

Για $0\leq a\leq 1$, θεωρούμε τις παραπάνω ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ και λαμβάνουμε

$x_n^{a-1}\sin\frac{1}{x_n} = x_n^{a-1}\cdot 0 = 0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} x_n^{a-1}\sin\frac{1}{x_n} = 0$

ενώ

$y_n^{a-1}\sin\frac{1}{y_n} = y_n^{a-1}\cdot 1 = \left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{a-1} = \left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{1-a}$

Αν $a=1$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} y_n^{1-1}\sin\frac{1}{y_n} = 1$, ενώ αν $0\leq a<1$

$\lim_{n\to+\infty} y_n^{a-1}\sin\frac{1}{y_n} = +\infty$.

β) Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano (Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(a)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο (a,β)). Για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 1+x+x^2 - \frac{2011}{2+\sin^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$

η οποία είναι συνεχής.

Τη μια ρίζα θα τη βρούμε στο $[-2011, 0)$ και την άλλη στο $(0, 2011)$. Πράγματι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού $f(0) = 1 - \frac{2011}{2} < 0$ και $f(-2011) = 1 - 2011 + (2011)^2 - \frac{2011}{2+\sin^2}$

$\geq 1 + 2011(2011-1) - \frac{2011}{2} = 1 + 2011\left(2011 - \frac{3}{2}\right) > 0.$

Παρόμοια $f(2011) = 1 + 2011 + (2011)^2 - \frac{2011}{2+\sin^2 2011} > 1 + 2011 + (2011)^2 - \frac{2011}{2} > 0.$

Θ3 α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής (σαν πηλίκο συνεχών, με παρονομαστή θετική συνάρτηση) και παραγωγίσιμη για $x>0$. Μάλιστα για $x>0$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{(x^p+1)'(x+1)^p - (x^p+1)\,p\,(x+1)^{p-1}}{(x+1)^{2p}} = \frac{(x^p+1)'(x+1) - p(x^p+1)}{(x+1)^{p+1}}$$

$$= \frac{p x^{p-1}(x+1) - p x^p - p}{(x+1)^{p+1}} = \frac{p(x^{p-1}-1)}{(x+1)^{p+1}}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $p-1>0$. Τότε έχουμε για $x>1 \Rightarrow f'(x)>0$ ενώ

για $0 \leq x < 1$, $f'(x)<0$.

Επομένως για $x \in [0,1]$, έχουμε $f(x) \leq f(0) = 1$

Ενώ στο διάστημα $x \in [1, +\infty)$ η f είναι αύξουσα, οπότε

$$f(x) \leq \lim_{y\to+\infty} f(y) = 1.$$

Επομένως πάντοτε έχουμε

$$f(x) \leq 1 = f(0).$$

και η f παίρνει την μέγιστη τιμή στο 0.

ii) $p=1$, $f(x)=1$, $\forall x \geq 0$ και η μέγιστη τιμή παίρνεται $\forall x \in [0,\infty)$.

iii) $0<p<1$, τότε για $x>1 \Rightarrow x^{p-1} < 1^{p-1} = 1 \Rightarrow f'(x)<0$

και επομένως $f(x) \leq f(1) = 2^{1-p}$, $x \geq 1$.

Για $0<x<1, \Rightarrow x^{p-1} > 1^{p-1} = 1 \Rightarrow f'(x) > 0, \quad x \in (0,1)$.

Οπότε για $0 \leq x \leq 1$, έχουμε $f(x) \leq f(1) = 2^{1-p}$.

Και στις 2 περιπτώσεις έχουμε

$$f(x) \leq f(1) = 2^{1-p}$$

και η μέγιστη τιμή της f παίρνεται στο $x=1$, και είναι 2^{1-p}.

β) Για $x \neq 0$, η f είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων), μάλιστα

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο 0 πρέπει

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Θα βρούμε τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$.

Για το πρώτο, αν θέσουμε $\frac{1}{x} = t$, τότε $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty} t$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to+\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$$

και επειδή $\lim_{t\to+\infty} \frac{t'}{(e^{t^2})'} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$

έχουμε από το Θ. L'Hospital ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

Παρόμοια προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$, οπότε έχουμε $f'(0)=0$.

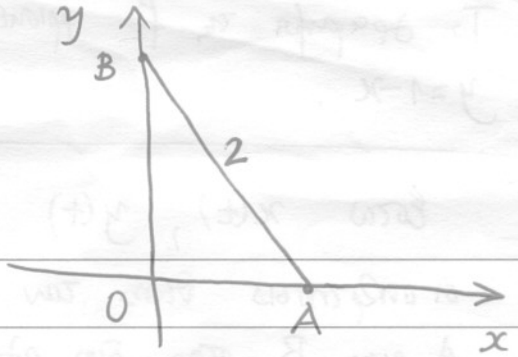
Για να είναι η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0, πρέπει

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$$

$y = \frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{y\to+\infty} (y^2 2e^{-y}) = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y^2}{e^y} = \left(\lim_{y\to+\infty} \frac{4y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{4}{e^y} = 0\right)$$

Θ.4 α) Έστω x η συντεταγμένη του A (απόσταση του A από την αρχή) και y του B.



Τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}.$$

Επομένως το εμβαδό του τριγώνου OAB είναι

$$E=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}, \quad 0\le x\le 2.$$

Στόχος μας είναι η μεγιστοποίηση του εμβαδού ήτοι της συνάρτησης $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$, $0\le x\le 2$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $[0,2)$, μάλιστα δε

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}x^2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{4-x^2-x^2}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(2-x^2)}{2\sqrt{4-x^2}}, \quad x\in[0,2).$$

Οπότε $f'(x)>0$, $x\in[0,\sqrt{2})$, ενώ $f'(x)\le 0$, $x\in(\sqrt{2},2)$.

Επομένως $f(x)\le f(\sqrt{2})$, $x\in[0,2]$, δηλ.

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}=1.$$

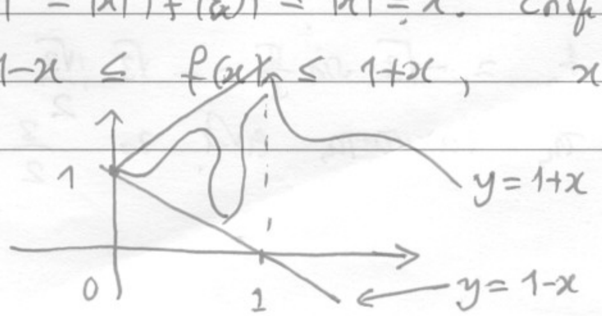
Το μέγιστο εμβαδό είναι 1 (m^2) και υλοποιείται ~~[illegible]~~ όταν το A απέχει από την αρχή απόσταση $\sqrt{2}$ m.

β) Από το Θ. Μέσης Τιμής (Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β), τότε $\exists\, \xi\in(a,\beta)$ ώστε $f(\beta)-f(a)=(\beta-a)f'(\xi)$.) στο $[0,x]\subset[0,1]$ έχουμε την ύπαρξη $\xi_x\in(0,x)$ ώστε

$$f(x)-f(0)=(x-0)f'(\xi_x) \Rightarrow f(x)-1=xf'(\xi_x) \Rightarrow$$

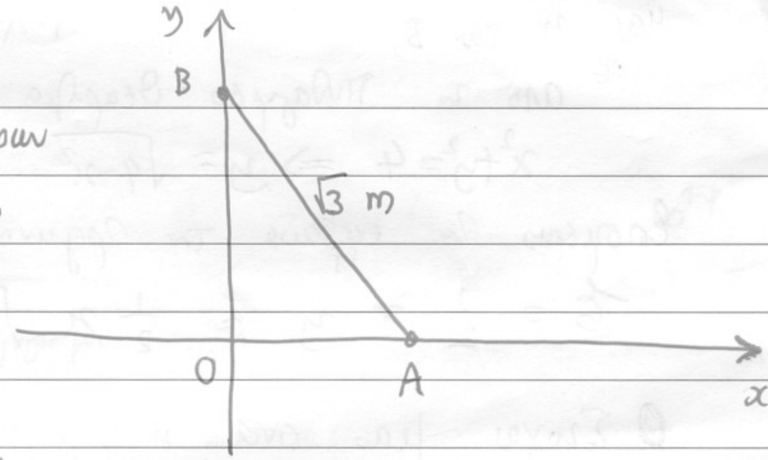
$$|f(x)-1|=|x|\,|f'(\xi_x)|\le|x|=x.$$ Επομένως $-x\le f(x)-1\le x$

δηλ. $1-x\le f(x)\le 1+x$, $x\in[0,1]$.



Το γράφημα της f βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y=1+x$ και $y=1-x$.

Θ.5 Έστω $x(t)$, $y(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των άκρων A και B πάνω στους άξονες αντίστοιχα.



Από το Πυθαγόρειο θ.

$$x^2(t)+y^2(t)=(\sqrt{3})^2=3.$$

Η ταχύτητα του άκρου B, θα είναι επομένως

$$y'(t)=u(t)=\sqrt{3}\cos t$$

οπότε $\quad y'(t)=(\sqrt{3}\sin t)' \Rightarrow (y(t)-\sqrt{3}\sin t)'=0$.

Επομένως προκύπτει για τη σταθερή συνάρτηση, ότι $\exists\, c\in\mathbb{R}$, ώστε

$y(t)-\sqrt{3}\sin t=c,\quad t\geq 0 \Rightarrow y(t)=c+\sqrt{3}\sin t,\quad t\geq 0$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$, το άκρο B βρίσκεται στην αρχή των αξόνων οπότε $y(0)=0$, δηλ. $0=c+0 \Rightarrow c=0$. Άρα

$y(t)=\sqrt{3}\sin t,\quad t\geq 0$.

Επομένως για το άκρο A έχουμε

$$x^2(t)+3\sin^2 t=3 \Rightarrow x^2(t)=3(1-\sin^2 t)=3\cos^2 t$$

$$\Rightarrow x(t)=\sqrt{3}\cos t,\quad t\in[0,\pi].$$

Οπότε η ταχύτητα του άκρου A, $x'(t)$ ικανοποιεί:

$$x'(t)=-\sqrt{3}\sin t,\quad t\in[0,\pi].$$

Όταν το άκρο A βρίσκεται για πρώτη φορά στο σημείο που απέχει απόσταση $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (m), αν t_0 αυτή η χρονική στιγμή θα έχουμε

$$x(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos t_0=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos t_0=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0=\frac{\pi}{3}$$

Άρα

$$x'(t_0)=-\sqrt{3}\sin t_0=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\ \left(\frac{m}{sec}\right)$$

Επομένως το μέτρο της ταχύτητας είναι το $\frac{3}{2}\ \frac{m}{sec}$.