ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης
Τηλ.: +30 2810 393800, +30 2810 393807, +30 2810 393868, Fax: +30 2810 393881, +30 2810 393893

Τετάρτη 2 Μαΐου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόοδος

Θέμα 1. α) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = u^2(x,t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = -\frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = u^2(x,t), \ x \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R},$$

$$u(x,x/2) = \frac{x}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R},$$

δεν έχει ομαλή λύση.

Θέμα 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$u_{tt}(x,t) + 2u_{xt}(x,t) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \ x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R},$$

όπου $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

Θέμα 3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \ x > 0, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \ x > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \ t > 0.$$

(Η λύση να εκφραστεί σαν ένα ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0, +\infty)$ κατάλληλης συνάρτησης).

Θέμα 4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi,$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \ 0 < y < \pi,$$

$$u_y(x,0) = 0, \ 0 < x < \pi,$$

$$u(x,\pi) = \sin x + \sin 3x, \ 0 < x < \pi.$$

Θέμα 5. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_{tt}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \; 0 < x < 1, \; t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x), \; 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \; 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= h(t), \; t > 0, \\ u_x(1,t) &= g(t), \; t > 0, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Θέμα 6. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$u_{xx}(x,t) - 2\sin x \, u_{xt}(x,t) - \cos^2 x \, u_{tt}(x,t) - \cos x \, u_t(x,t) = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \; x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \; x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Θεωρείστε γνωστό ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο (x_0, t_0) είναι οι

$$t - \cos x - x = t_0 - \cos x_0 - x_0,$$

$$t - \cos x + x = t_0 - \cos x_0 + x_0.$$

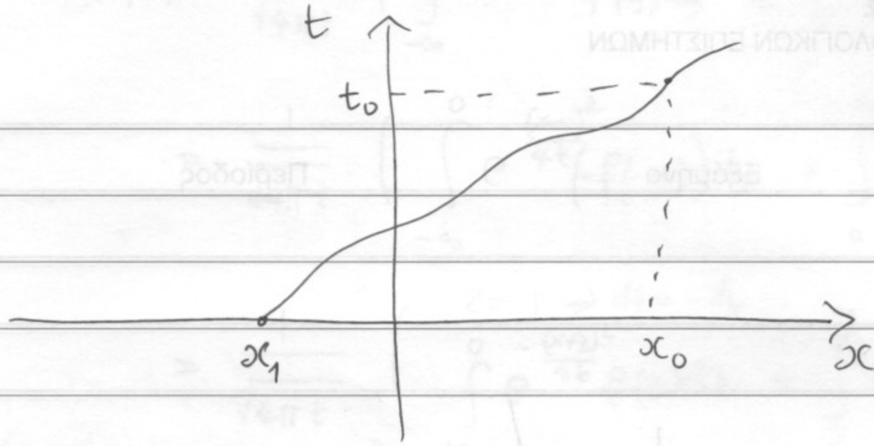
Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομαλές.

<u>Να λυθούν ακριβώς 5 θέματα.</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

1/

1 α) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των Χαρακτηριστικών



Οπότε αφού

$$\frac{d}{ds}\, u\left(x(s), t(s)\right) = u_x\, \dot{x} + u_t\, \dot{t}$$

Επιλέγουμε την χαρακτηριστική καμπύλη, ώστε

$$\dot{x}(s) = 2 \quad , \quad x(0) = x_1$$
$$\dot{t}(s) = 1 \quad , \quad t(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = 2s + x_1$$
$$t(s) = s$$

Οπότε τότε η Δ.Ε. γράφεται, αν θέσουμε $f(s) = u(x(s), t(s))$

$$f'(s) = f^2(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{f(s)}\right) = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(s + \frac{1}{f(s)}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad s + \frac{1}{f(s)} = \frac{1}{f(0)}.$$

και άρα

$$s + \frac{1}{u(x(s), t(s))} = \frac{1}{u(x_1, 0)} = -\left(1 + x_1^2\right).$$

Αν $\bar{s}$ είναι η τιμή της παραμέτρου ώστε

$$\left(x(\bar{s}), t(\bar{s})\right) = (x_0, t_0)$$

θα έχουμε $\quad \bar{s} + \dfrac{1}{u(x_0,t_0)} = -(1+x_1^2)$

Επίσης

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2\bar{s} + x_1 \\ t_0 &= \bar{s} \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{aligned} x_1 &= x_0 - 2t_0 \\ \bar{s} &= t_0 \end{aligned}\right.$$

Οπότε $\quad t_0 + \dfrac{1}{u(x_0,t_0)} = -\left(1+(x_0-2t_0)^2\right) \Leftrightarrow$

$$-\left(t_0 + 1 + (x_0-2t_0)^2\right) = \frac{1}{u(x_0,t_0)}$$

Όμως $t_0 \geq 0$, οπότε προκύπτει τελικά ότι

$$u(x_0,t_0) = -\frac{1}{1+t_0+(x_0-2t_0)^2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 \geq 0.$$

Η λύση ορίζεται $\forall\, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω πως το πρόβλημα έχει ομαλή λύση. Τότε με παραγώγιση της

$$u\left(x, \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\left(u\left(x,\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$u_x\left(x,\frac{x}{2}\right) + u_t\left(x,\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{d}{dx}\frac{x}{2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_t\left(x,\frac{x}{2}\right) + 2u_x\left(x,\frac{x}{2}\right) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Όμως επιλέγοντας $t = \dfrac{x}{2}$, θα έπρεπε να έχουμε

$$u_t\left(x,\frac{x}{2}\right) + 2u_x\left(x,\frac{x}{2}\right) = u^2\left(x,\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

3) $$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2, \quad \forall x\in\mathbb{R} \iff$$

$$2-2x^2 = x^2 \iff 2-x^2 = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

το οποίο <u>δεν</u> αληθεύει παρά μόνο για $x=\pm\sqrt{2}$

οπότε καταλήξαμε σε άτοπο και επομένως το πρόβλημα <u>ΔΕΝ</u> έχει ομαλή λύση.

---

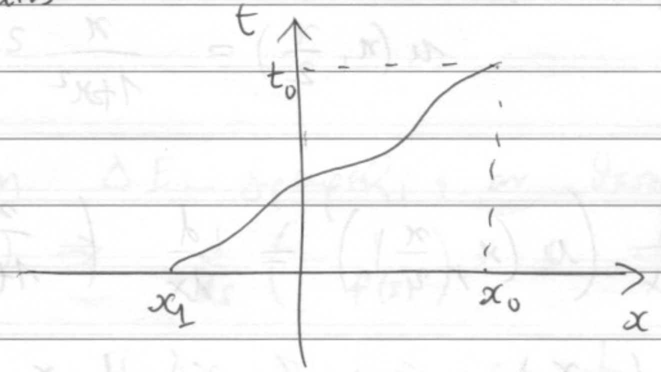
2) Παρατηρούμε αρχικά ότι η Δ.Ε. γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t(x,t) + 2u_x(x,t)\right) = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

Οπότε θα υπάρχει συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = h(x), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

και θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών του <u>1ου</u> θέματος



$$\begin{aligned} x(s) &= 2s + x_1 \\ t(s) &= s \end{aligned}, \quad s\geq 0$$

με

$$\left.\begin{aligned} x(\bar{s}) &= x_0 \\ t(\bar{s}) &= t_0 \end{aligned}\right| \iff \left|\begin{aligned} x_1 &= x_0 - 2t_0 \\ \bar{s} &= t_0 \end{aligned}\right.$$

Επίσης $\frac{d}{ds}\, u(2s+x_1, s) = h(2s+x_1) \Rightarrow$

$$u(2s+x_1,s) - u(x_1,0) = \int_0^s h(2\xi+x_1)\,d\xi \iff$$

$$u(2s+x_1,s) - u(x_1,0) = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{2s+x_1} h(\tau)\,d\tau \qquad \tau = 2\xi + x_1 \Rightarrow d\tau = 2d\xi$$

Για $s=\bar{s}$, προκύπτει:

$$u(x_0,t_0) - u(x_1,0) = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{2\bar{s}+x_1} h(\tau)\,d\tau$$

$$\iff \quad u(x_0,t_0) - f(x_1) = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{2\bar{s}+x_1} h(\tau)\,d\tau$$

όμως $\bar{s} = t_0$ & $x_1 = x_0 - 2t_0$

Οπότε έχουμε

$$u(x_0,t_0) - f(x_0-2t_0) = \frac{1}{2}\int_{x_0-2t_0}^{x_0} h(\tau)\,d\tau$$

Άρα $\quad u(x,t) = f(x-2t) + \frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x} h(\tau)\,d\tau, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0.$

$$\Rightarrow \quad u_t(x,t) = -2f'(x-2t) + \frac{1}{2}(-2)(-1)\,h(x-2t)$$

$$= -2f'(x-2t) + h(x-2t)$$

που για $t=0$ δίνει ότι

$$g(x) = -2f'(x) + h(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

Οπότε: $\quad h(x) = g(x) + 2f'(x), \quad x\in\mathbb{R}.$

5) Οπότε $u(x,t) = f(x-2t) + \frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x} \left[g(\tau) + 2f'(\tau) \right] d\tau$

$$= f(x-2t) + \int_{x-2t}^{x} f'(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x} g(\tau)\,d\tau$$

$$= f(x) + \frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x} g(\tau)\,d\tau, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0.$$

(Εναλλακτικά, με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

η $\xi = x-2t$

$\eta = x$

$u(x,t) = v(\xi,\eta)$

προκύπτει ότι:

$$u_t = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -2\,v_\xi$$

$$u_{tt} = 4\,v_{\xi\xi}$$

$$u_{tx} = -2\left(v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= -2\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\right)$$

και η Δ.Ε. γράφεται:

$$4\,v_{\xi\xi} - 4\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\right) = 0 \Leftrightarrow v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$$

Οπότε $\exists\ F, G:\ v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$, δηλ.

$$u(x,t) = F(x-2t) + G(x), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

Για $t=0 \Rightarrow$

$$f(x) = F(x) + G(x), \quad x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

με παραγώγιση ως προς t

$$u_t(x,t) = -2F'(x-2t)$$

$\Rightarrow$ $$g(x) = -2F'(x)$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}:$ $$F(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x g(\tau)d\tau + c \quad (2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Από (1), (2) προκύπτει $F(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x g(\tau)d\tau + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(\tau)d\tau - c$$

και τελικά $$u(x,t) = F(x-2t) + G(x)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{x-2t} g(\tau)d\tau + c + f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(\tau) - c$$

$$= f(x) + \frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x} g(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$$

---

3) Θα κάνουμε περιττή επέκταση της f, δηλ. θεωρούμε

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x<0 \end{cases}$$

και λύνουμε (απαραίτητη προϋπόθεση $f(0)=0$). το πρόβλημα

$$v_t = v_{xx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$$
$$v(x,0) = \bar{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\bar{f}(y)dy$$

Για $x>0$, έχουμε

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\bar{f}(y)\,dy+\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\bar{f}(y)\,dy\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\left(-f(-y)\right)dy+\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)\,dy\right)$$

$z=-y \Rightarrow dz=-dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(x+z)^2}{4t}}f(z)\,dz+\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)\,dy\right)$$

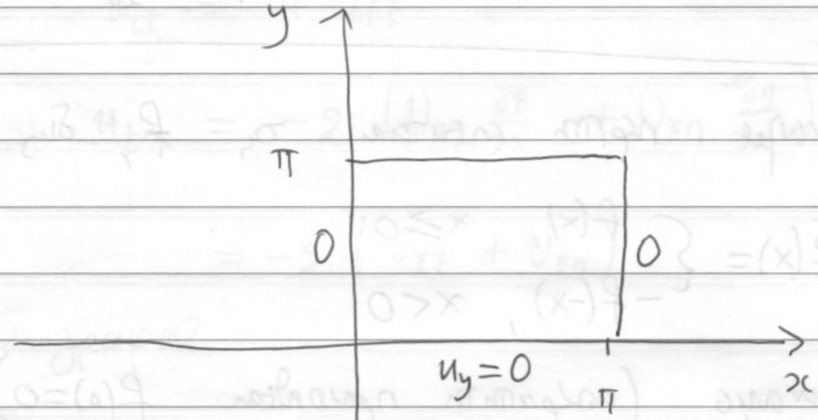
$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right]f(y)\,dy$$

και επομένως, η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{0}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right]f(y)\,dy,\quad x>0,\ t>0.$$

---

4)



Θα βρούμε αρχικά τη γενική λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0\qquad 0<y<\pi$$
$$u_y(x,0)=0\qquad 0<x<\pi.$$

Προς τούτο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Fourier

8) Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y),$$

οπότε θα ισχύει:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \;;$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

Οπότε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<\pi.$$

όπως επίσης

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0<y<\pi.$$

Επειδή $u(0,y)=0 \Leftrightarrow X(0)Y(y)=0, \quad 0<y<\pi$

οπότε ~~έχουμε~~ προκύπτουν τα συστήματα

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<\pi \\ &X(0) = X(\pi) = 0 \end{aligned}$$

&

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{aligned} &Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0<y<\pi \\ &Y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα (Ι) το έχουμε μελετήσει. Ιδιοτιμές έχει ιδιοτιμές $\lambda = k^2$, $k=1,2,\dots$ και ιδιοσυναρτήσεις $X_k(x) = \sin kx, \quad k=1,2,\dots$ (αντίστοιχα).

και τότε το σύστημα (II) γίνεται

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0, \quad 0 < y < \pi$$

$$Y'(0) = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \rho = \pm k$, οπότε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$Y(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}, \quad 0 < y < \pi.$$

$$\rightarrow \quad Y'(y) = k\left(c_1 e^{ky} - c_2 e^{-ky}\right).$$

$$Y'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2$$

Οπότε

$$Y_k(y) = e^{ky} - e^{-ky}$$

και η γενική λύση που προκύπτει είναι

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \left(e^{ky} - e^{-ky}\right)$$

όπου οι συντελεστές c_k είναι υπό προσδιορισμό.

Θέλουμε όμως $u(x,\pi) = \sin x + \sin 3x$, $0 < x < \pi$

οπότε πρέπει

$$\sin x + \sin 3x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{k\pi} - e^{-k\pi}\right) \sin kx, \quad 0 < x < \pi$$

και λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$

προκύπτει ότι πρέπει

$$c_k\left(e^{k\pi} - e^{-k\pi}\right) = 0, \quad k \neq 1,3 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_k = 0, \quad k \neq 1,3$$

και $c_1\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = 1 \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$

$$c_3\left(e^{3\pi} - e^{-3\pi}\right) = 1 \Leftrightarrow c_3 = \frac{1}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}.$$

10) Έτσι τελικά, η λύση του προβλήματος είναι:

$$u(x,y) = \sin x \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} + \sin 3x \frac{e^{3y} - e^{-3y}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}, \quad 0<x<\pi, \ 0<y<\pi.$$

---

5) Έστω u_1, u_2 δύο διαφορετικές λύσεις, τότε η

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad 0<x<1, \ t>0$$

λύνει το σύστημα:

$$w_{tt}(x,t) - w_{xxtt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \quad 0<x<1, \ t>0$$
$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \qquad 0<x<1$$
$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε με $w_t(x,t)$, και ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$, οπότε παίρνουμε:

$$\int_0^1 w_t(x,t)\left[w_{tt}(x,t) - w_{xxtt}(x,t) - w_{xx}(x,t)\right]dx = 0$$

Όμως $\displaystyle\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx\right)$

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xxtt}(x,t)\,dx = \int_0^1 w_t(x,t)\, w_{ttxx}(x,t)\,dx$$
$$= -\int_0^1 w_{tx}(x,t)\, w_{txt}(x,t)\,dx + (w_t w_{ttx})\Big|_0^1$$
$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 w_{tx}^2(x,t)\,dx\right) + (w_t w_{ttx})\Big|_0^1.$$

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx = -\int_0^1 w_{tx}(x,t)\, w_x(x,t)\,dx + (w_t w_x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx\right) + (w_t w_x)\Big|_0^1 .$$

Επίσης επειδή $w_x(0,t) \Rightarrow w_t(0,t)\,w_x(0,t) = 0$

&

$w_{xtt}(0,t) = 0 \Rightarrow w_t(0,t)\,w_{xtt}(0,t) = 0$

Προφανώς ισχύει ότι $w_t(1,t)\,w_x(1,t) = 0$ &

$w_t(0,t)\,w_{xtt}(1,t) = 0$

οπότε τα συνοριακά κομμάτια στα προηγούμενα ολοκληρώματα είναι 0, και έτσι παίρνουμε τελικά ότι ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_{tx}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dt\right] = 0$$

Οπότε

$$\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \int_0^1 w_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 w_x^2(x,t)dx =$$

$$\int_0^1 w_t^2(x,0)dx + \int_0^1 w_{tx}^2(x,0)dx + \int_0^1 w_x^2(x,0)dx .$$

Όμως αφού $w_t(x,0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 w_t^2(x,0)dx = 0$

$\Downarrow$

$w_{tx}(x,0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 w_{tx}^2(x,0)dx = 0$

$w(x,0) = 0 \Rightarrow w_x(x,0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 w_x^2(x,0)dx = 0$

και επομένως έχουμε:

$$\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \int_0^1 w_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 w_x^2(x,t)dx = 0$$

12) Οπότε προκύπτει $\omega_t(x,t)\equiv 0 \Longrightarrow$

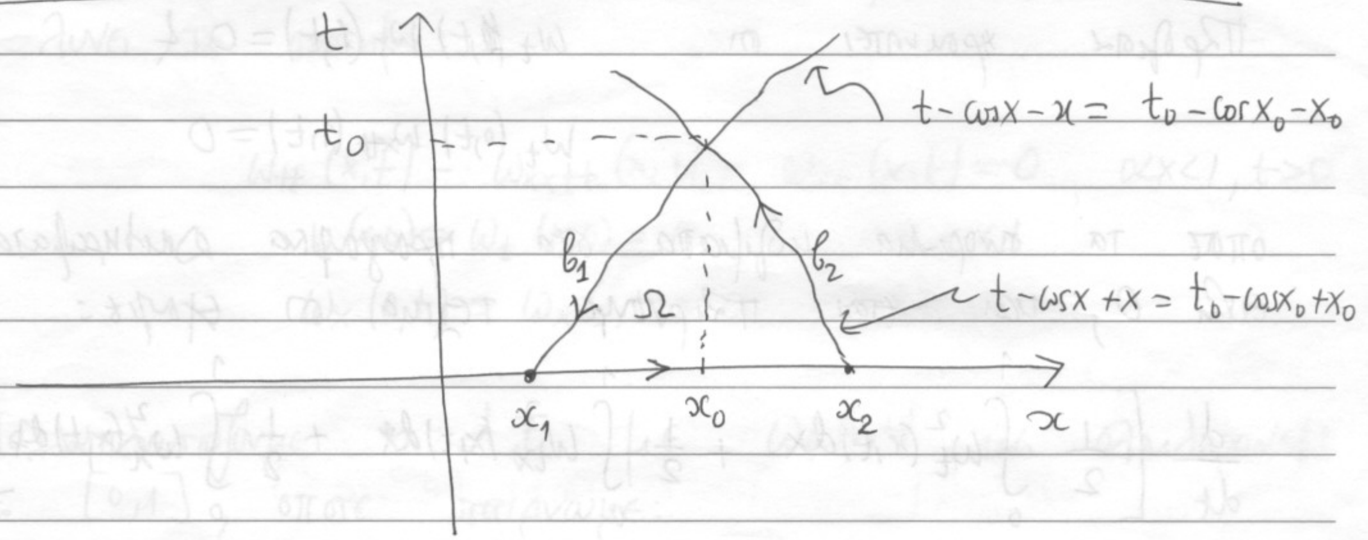
$w(x,t)=w(x,0)$ $\quad 0\le x<1$

$\Longrightarrow w(x,t)\equiv 0 \quad 0<x<1,\ t>0$

Άρα $w(x,0)=0$

αντίφαση αφού $w\not\equiv 0$

b)



Στην χαρακτηριστική καμπύλη $t-\cos x-x=t_0-\cos x_0-x_0$ (C_1)

έχουμε $dt=(1-\sin x)dx$, δηλ. $\dfrac{dt}{dx}=1-\sin x\ge 0$

ενώ στην $t-\cos x+x=t_0-\cos x_0+x_0$ (C_2)

$$\frac{dt}{dx}=-(1+\sin x)\le 0$$

Ειδικότερα η (C_1), (C_2) είναι όπως στο σχήμα, οπότε το x_1 λύνει: $x+\cos x=-t_0+x_0+\cos x_0$ και το x_2 λύνει τη $x-\cos x=t_0+x_0-\cos x_0$ όπως στο σχήμα.

~~Θεωρούμε~~ Έστω u_1,u_2 δύο διαφορετικές λύσεις του προβλήματος, τότε η $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_{xx}(x,t)-2\sin x\, w_{xt}(x,t)-\cos^2 x\, w_{tt}(x,t)-\cos x\, w_t(x,t)=0$$

$$w(x,0)=0 \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$w_t(x,0)=0$$

Ολοκληρώνουμε τη Δ.Ε στο Ω και παίρνουμε:

$$\iint_{\Omega} \left[\omega_{xx} - 2\sin x \, \omega_{xt} - \cos^2 x \, \omega_{tt} - \cos x \, \omega_t \right] dx\,dt = 0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη ταυτότητα του Green

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx\,dt = \int_{\partial\Omega} \left(Q\,dt + P\,dx \right)$$

$$= \int_{b_1 \cup b_2 \cup b_3} \left(Q\,dt + P\,dx \right)$$

Ειδικότερα επιλέγοντας $Q(x,t) = \omega_x(x,t) - 2\sin x \, \omega_t(x,t)$

έχουμε $\frac{\partial Q}{\partial x} = \omega_{xx} - 2\sin x \, \omega_{tx} - 2\cos x \, \omega_t$

$P(x,t) = \cos^2 x \, \omega_t(x,t) - \cos x \, \omega(x,t) \Longrightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial t} = \cos^2 x \, \omega_{tt}(x,t) - \cos x \, \omega_t(x,t)$

Οπότε τελικά $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = \omega_{xx} - 2\sin x \, \omega_{tx} - 2\cos x \, \omega_t - \cos^2 x \, \omega_{tt} + \cos x \, \omega_t$

$= \omega_{xx} - 2\sin x \, \omega_{tx} - \cos^2 x \, \omega_{tt} - \cos x \, \omega_t$

και επομένως:

$$\int_{\partial\Omega} \left[Q\,dt + P\,dx \right] = 0 \Leftrightarrow \int_{b_1} + \int_{b_2} + \int_{b_3} = 0.$$

Στο b_1 έχουμε: $t - \cos x - x = t_0 - \cos x_0 - x_0 \Longrightarrow dt = (1-\sin x)dx$

οπότε $Q\,dt + P\,dx = (\omega_x - 2\sin x \, \omega_t)dt = \omega_x dt - 2\sin x \, \omega_t dt$

$+ (\cos^2 x \, \omega_t - \cos x \, \omega)dx \quad + \cos^2 x \, \omega_t dx - \cos x \, \omega \, dx$

14) $= (1-\sin x)\,\omega_x\,dx - 2\sin x\;\omega_t\,dt + \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,\omega_t\,dt - \cos x\;\omega\,dx$

$= (1-\sin x)\,\omega_x\,dx - \cos x\,\omega\,dx + \left(\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x} - 2\sin x\right)\omega_t\,dt$

$= (1-\sin x)\,\omega_x\,dx - \cos x\;\omega\,dx + \dfrac{\cos^2 x - 2\sin x + 2\sin^2 x}{1-\sin x}\,\omega_t\,dt$

$= (1-\sin x)\,\omega_x\,dx - \cos x\;\omega\,dx + (1-\sin x)\,\omega_t\,dt$

$= (1-\sin x)\,d\omega - \cos x\;\omega\,dx = d\big((1-\sin x)\,\omega\big).$

Έτσι

$$\int_{b_1}(Q\,dt + P\,dx) = \int_{b_1} d\big((1-\sin x)\,\omega\big) =$$

$$= \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w(x_1,0)}} - (1-\sin x_0)\,w(x_0,t_0).$$

Παρόμοια στην (b_2) έχουμε: $dt = -(1+\sin x)\,dx$

Οπότε $Q\,dt + P\,dx = (\omega_x - 2\sin x\,\omega_t)\,dt + (\cos^2 x\,\omega_t - \cos x\,\omega)\,dx$

$= \omega_x\,dt - 2\sin x\;\omega_t\,dt + \cos^2 x\,\omega_t\,dx - \cos x\,\omega\,dx$

$= -\omega_x\,(1+\sin x)\,dx - 2\sin x\;\omega_t\,dt - \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,\omega_t\,dt$
$\quad - \cos x\;\omega\,dx$

$= -(1+\sin x)\,\omega_x\,dx - \left(2\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}\right)\omega_t\,dt$
$\quad - \cos x\;\;\omega\,dx$

$= -(1+\sin x)\,(\omega_x\,dx + \omega_t\,dt) - \cos x\,\omega\,dx$

$= -(1+\sin x)\,d\omega - \cos x\;\;w\,dx$

$= -d\big((1+\sin x)\,w\big)$

και επομένως $\displaystyle\int_{b_2}(Q\,dt+P\,dx) = -\int_{b_2} d\big((1+\sin x)\,\omega\big) = -(1+\sin x_0)\,\omega(x_0,t_0) + 0$

$\displaystyle\int_{b_3}(Q\,dt+P\,dx) = 0$ και συνολικά προκύπτει ότι $-2\,w(x_0,t_0) = 0 \Rightarrow w(x,t) \equiv 0$ ΑΝΤΙΦΑΣΗ