ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 14 Απριλίου 2016

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο 9

1). Με μεφορά και στροφή του συστήματος συντεταγμένων να φέρετε την επιφάνεια

$$y - yz = xz,$$

στην κανονική της μορφή. Για τι είδους επιφάνεια πρόκειται;

2). Με μεφορά και στροφή του συστήματος συντεταγμένων να φέρετε την επιφάνεια

$$xy - y + yz = xz,$$

στην κανονική της μορφή. Για τι είδους επιφάνεια πρόκειται;

3). Με μεφορά και στροφή του συστήματος συντεταγμένων να φέρετε την επιφάνεια

$$4x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 4xy + 4yz + 12x + 12z + 18 = 0,$$

στην κανονική της μορφή. Για τι είδους επιφάνεια πρόκειται;

4). Δίνεται το ελλειπτικό παραβολοειδές ($\alpha > 0$)

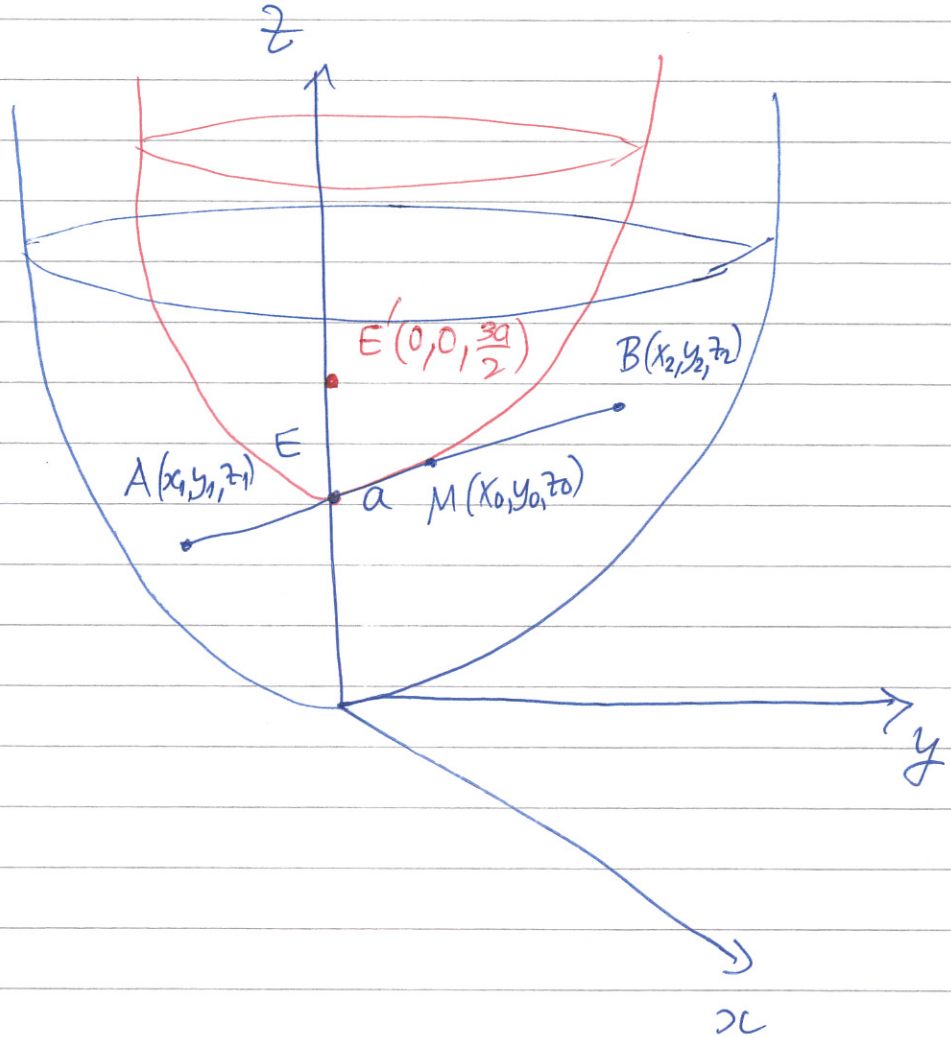
$$x^2 + y^2 = 4\alpha z.$$

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο σημεία του ελλειπτικού παραβολοειδούς) που διέρχονται από την εστία $E(0, 0, \alpha)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Φυλλάδιο 9

Λύση Άσκησης 4



Έστω $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ δυο σημεία του ελλειπτικού παραβολοειδούς, οπότε θα έχουμε

$$4az_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad (1)$$
$$4az_2 = x_2^2 + y_2^2 \quad (2)$$

Επειδή θέλουμε η χορδή AB να διέρχεται από την εστία $E(0,0,a)$ θα πρέπει να υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ (γιατί;) ώστε $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} \Leftrightarrow (0,0,a)-(x_1,y_1,z_1) = \lambda(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \Leftrightarrow$

$$-x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \quad (3)$$
$$-y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \quad (4)$$
$$a - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \quad (5).$$

Το σημείο που θέλουμε να περιγράψουμε είναι το μέσο
$M(x_0, y_0, z_0)$ οπότε

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \; y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}, \; z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$$

και επιπλέα προκύπτει ότι:

$$4x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$4y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$$

Επομένως

$$4(x_0^2+y_0^2) = (x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2)$$

$$\overset{(1),(2)}{=} 4az_1 + 4az_2 + 2(x_1x_2+y_1y_2)$$

δηλ

$$4(x_0^2+y_0^2) = 8az_0 + 2(x_1x_2+y_1y_2). \quad (6)$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το $x_1x_2 + y_1y_2$.

Αν αφαιρέσουμε (1), (2) προκύπτει επίσης

$$4a(z_2 - z_1) = (x_2-x_1)(x_2+x_1) + (y_2-y_1)(y_2+y_1) \Leftrightarrow$$

$$4a\lambda(z_2-z_1) = \lambda(x_2-x_1)(x_2+x_1) + \lambda(y_2-y_1)(y_2+y_1) \Rightarrow$$

$$\overset{(3),(4),(5)}{} \; 4a(a-z_1) = -x_1(x_2+x_1) - y_1(y_2+y_1) \Leftrightarrow$$

$$4a^2 - 4az_1 = -\cancel{x_1^2 - y_1^2} - (x_1x_2 + y_1y_2) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = -4a^2 \quad (7)$$

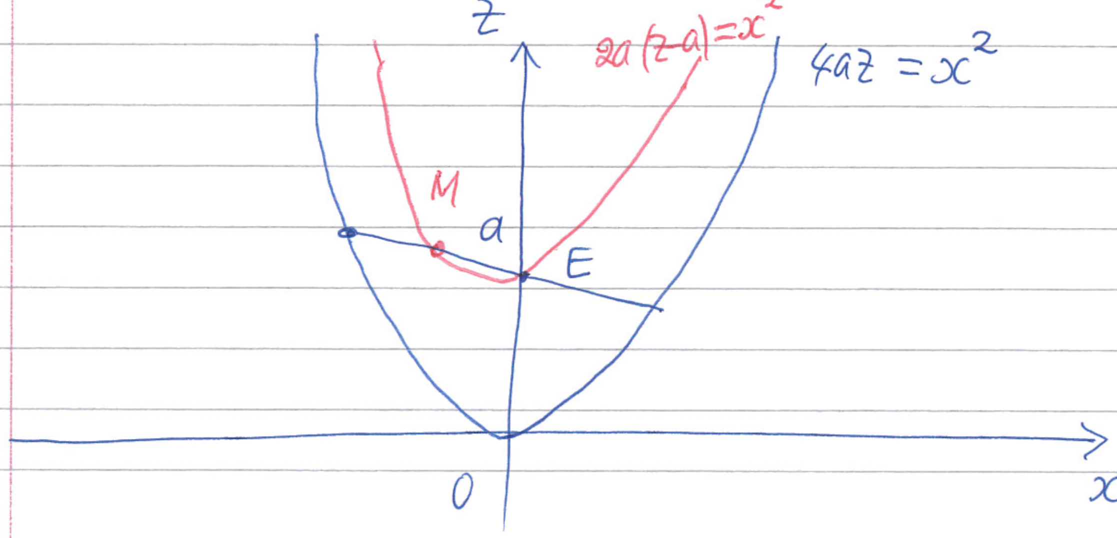
Τελικα η (6), λογω της (7) γινεται:

$$4(x_0^2 + y_0^2) = 8az_0 - 8a^2 \Longleftrightarrow$$

$$2a(z_0 - a) = x_0^2 + y_0^2 .$$

Δηλαδη ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες με κορυφη την εστια $E(0,0,a)$ και εστια το $E'(0,0,\frac{3a}{2})$.

Μπορουμε να αποδειξουμε οτι καθε σημειο του ελλειπτικου παραβολοειδους ειναι σημειο του γεωμετρικου τοπου. Επειδη ειναι μια επιφανεια εκ περιστροφης γυρω απο τον αξονα Oz (το ιδιο ειναι και το αρχικο ελλειπτικο παραβολοειδες) ειναι αρκετο αν επιλεξουμε $y_0 = 0$ (δηλ. πανω στο επιπεδο xOz) και τα σημεια της αρχικης επιφανειας να ειναι στο επιπεδο xOz επισης. Δηλ. εχουμε



Έστω δηλ. το σημείο $M(x_0, 0, z_0)$ της

$$2a(z_0-a) = x_0^2 \Leftrightarrow z_0 = a + \frac{x_0^2}{2a} \quad (8)$$

οπότε $$M\left(x_0, 0, a+\frac{x_0^2}{2a}\right).$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα E, M (και είναι στο επίπεδο xOz) είναι η

$$z - z_0 = \lambda(x-x_0) \quad \text{όπου } \lambda:$$

$$a - z_0 = -\lambda x_0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{a-z_0}{x_0}$$

δηλ. $$z - z_0 = -\frac{(a-z_0)}{x_0}(x-x_0)$$

Λόγω της (8), $$a - z_0 = -\frac{x_0^2}{2a}$$

επομένως $$z - \left(a+\frac{x_0^2}{2a}\right) = \frac{x_0}{2a}(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$z = a + \frac{x_0 x}{2a} \quad (9).$$

Η ευθεία αυτή τέμνει την παραβολή

$$4az = x^2$$

στα σημεία $A(x_1, 0, z_1)$, $B(x_2, 0, z_2)$ που λύνουν το σύστημα

$$z = a + \frac{x_0 x}{2a}$$

$$x^2 - 2x_0 x - 4a^2 = 0$$

Από τις σχέσεις του Vieta, οι λύσεις x_1, x_2 ικανοποιούν

$$x_1 + x_2 = 2x_0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = x_0$$

$$x_1 x_2 = -4a^2$$

Από την (9), παίρνουμε

$$\frac{z_1+z_2}{2} = a + \frac{x_0(x_1+x_2)}{4a}$$

$$= a + \frac{2x_0^2}{4a} = a + \frac{x_0^2}{2a}$$

Προκύπτει δηλ., ότι το $M(x_0, 0, z_0)$

είναι το μέσο των $A(x_1, 0, z_1)$, $B(x_2, 0, z_2)$, δηλ.
είναι το μέσο χορδής.