1) α) Έστω ότι οι ευθείες τέμνονται στο (x_0,y_0,z_0). Τότε $\exists\, t,s\in\mathbb{R}$ ώστε

$$(x_0,y_0,z_0) = (1,0,2) + t(1,-1,1) = (-1,0,-1) + s(-1,1,1).$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} 1+t=-1-s \\ -t=s \\ 2+t=-1+s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t=-1+t \\ s=-t \\ 2+t=-1-t \end{array}\right. \Leftrightarrow 2=0 \text{ αδύνατο.}$$

Οι ευθείες δεν είναι παράλληλες γιατί θα έπρεπε

$$(1,-1,1) \,//\, (-1,1,1)$$

που δεν αληθεύει. Οπότε $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι ασύμβατες.

β) Έστω ότι η (ε) τέμνει την (ε_1) στο

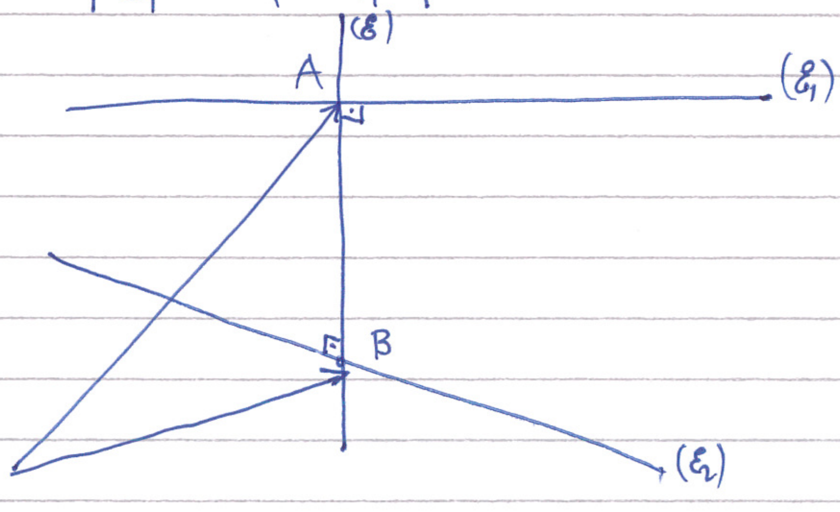
$$(1,0,2) + t_0(1,-1,1).$$

Τότε η εξίσωση της (ε) θα ήταν:

$$(\varepsilon):\quad (x,y,z) = (1,0,2) + t_0(1,-1,1) + t\,(1,-1,1)\times(-1,1,1)$$

$$= \underbrace{(1,0,2) + t_0(1,-1,1)}_{A} - 2t(1,1,0), \quad t\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$



Έστω επίσης $\vec{OB} = (1,0,2) + t_0(1,-1,1) - 2t_1(1,1,0)$

όπου B το σημείο τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.
οπότε πρέπει

$$\vec{OB} = (-1,0,-1) + s(-1,1,1)$$

και άρα

$$\left.\begin{array}{l} 1+t_0-2t_1 = -1-s \\ -t_0-2t_1 = +s \\ 2+t_0 = -1+s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_0+s-2t_1 = -2 \\ t_0+s+2t_1 = 0 \\ t_0-s = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4t_1 = -2 \\ t_0+s = -1 \\ t_0-s = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_0 = -2 \\ s_0 = 1 \end{array}\right. .$$

επομένως η εξίσωση της (ε) είναι:

$$(\varepsilon): \quad (x,y,z) = (1,0,2) - 2(1,-1,1) - 2t(1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= (-1,2,0) - 2t(1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(γ). Η ελάχιστη απόσταση είναι $d = |\vec{AB}| =$

$$= |-(1,1,0)| = \sqrt{2}.$$

(δ) έχουμε $\vec{OB} = (-1,2,0) - (1,1,0) = (-2,1,0)$.

Το επίπεδο των $(\varepsilon_2), (\varepsilon)$ θα έχει κάθετο διάνυσμα

$$(1,1,0) \times (-1,1,1) = (1,-1,2)$$

και διέρχεται από το $(-2,1,0)$, οπότε η εξίσωση του επιπέδου ικανοποιεί:

$$(x+2, y-1, z)\cdot(1,-1,2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - y + 2z = -3.$$

που διέρχεται από τα σημεία τομής των (C_1), (C_2).

2) α) Αν (C) κύκλος, τότε $\exists \; t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ώστε η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$x^2+y^2+2x-3y-1+t\left(x^2+y^2+3x-3y-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+t)(x^2+y^2)+(2+3t)x-3(1+t)y-1-2t=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+\frac{2+3t}{1+t}x-3y-\frac{1+2t}{1+t}=0.$$

(Οι κύκλοι τέμνονται με εξίσωση της ευθείας τομής $x=1$)

β) Οι κύκλοι (C), που διέρχονται από την τομή του (C_3) με την ευθεία (ε_1) θα έχει εξίσωση

$$x^2+y^2+2x-4y-4+\lambda(y-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+(2-\lambda)x-(4-\lambda)y-4=0$$

για κατάλληλη επιλογή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Ο κύκλος C_3 και η ευθεία (ε_1), τέμνονται στα σημεία: με τετμημένες x, $x^2-x-2=0$). $(-1,-1)$, $(2,2)$.

γ) Αν $M=(x,y)$ σημείο που ισαπέχει από τις ευθείες (ε_2), (ε_1) τότε θα έχουμε

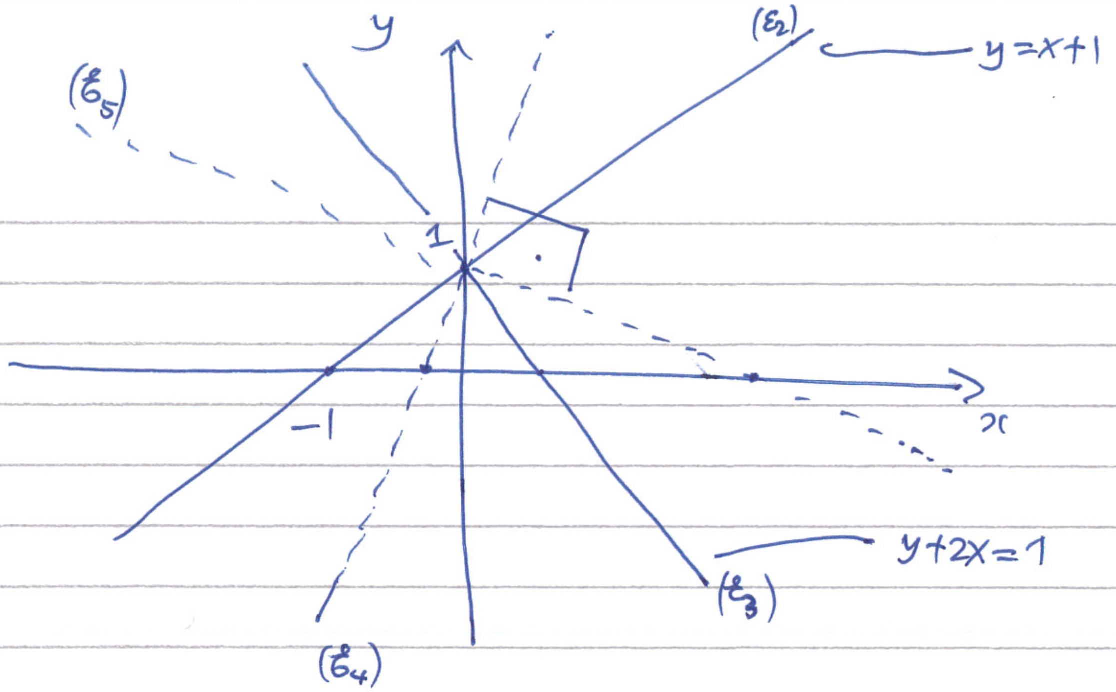
$$d(M,\varepsilon_1)=\frac{|y-x-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|y+2x-1|}{\sqrt{5}}=d(M,\varepsilon_2).$$

Οπότε είτε

$$(\varepsilon_4)\quad \frac{y-x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+2x-1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (\sqrt{5}-\sqrt{2})y-(\sqrt{5}+2\sqrt{2})x=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

είτε

$$(\varepsilon_5)\quad \frac{y-x-1}{\sqrt{2}}=-\frac{y+2x-1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+\sqrt{2})y-(\sqrt{5}-2\sqrt{2})x=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$$



3) $$xy + 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2xy + 4x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (4, 2)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0.$$

Ο πινακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ εχει χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)$.

Αν $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ιδιοδιανυσμα στην ιδιοτιμη 1 τοτε

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = x.$$

οποτε ενα μοναδιαιο ιδιοδιανυσμα ειναι το $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Αντιστοιχα για την ιδιοτιμη -1, θα εχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=-x$$

οπότε το $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα

και επειδή

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

ο πίνακας $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Θέτουμε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x')^2 - (y')^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x'-y') + \frac{2}{\sqrt{2}}(x'+y') + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x')^2 + 2\,\frac{3}{\sqrt{2}}\,x' - (y')^2 - 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,y' + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 = 0$$

$$\frac{\left(x' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 .$$

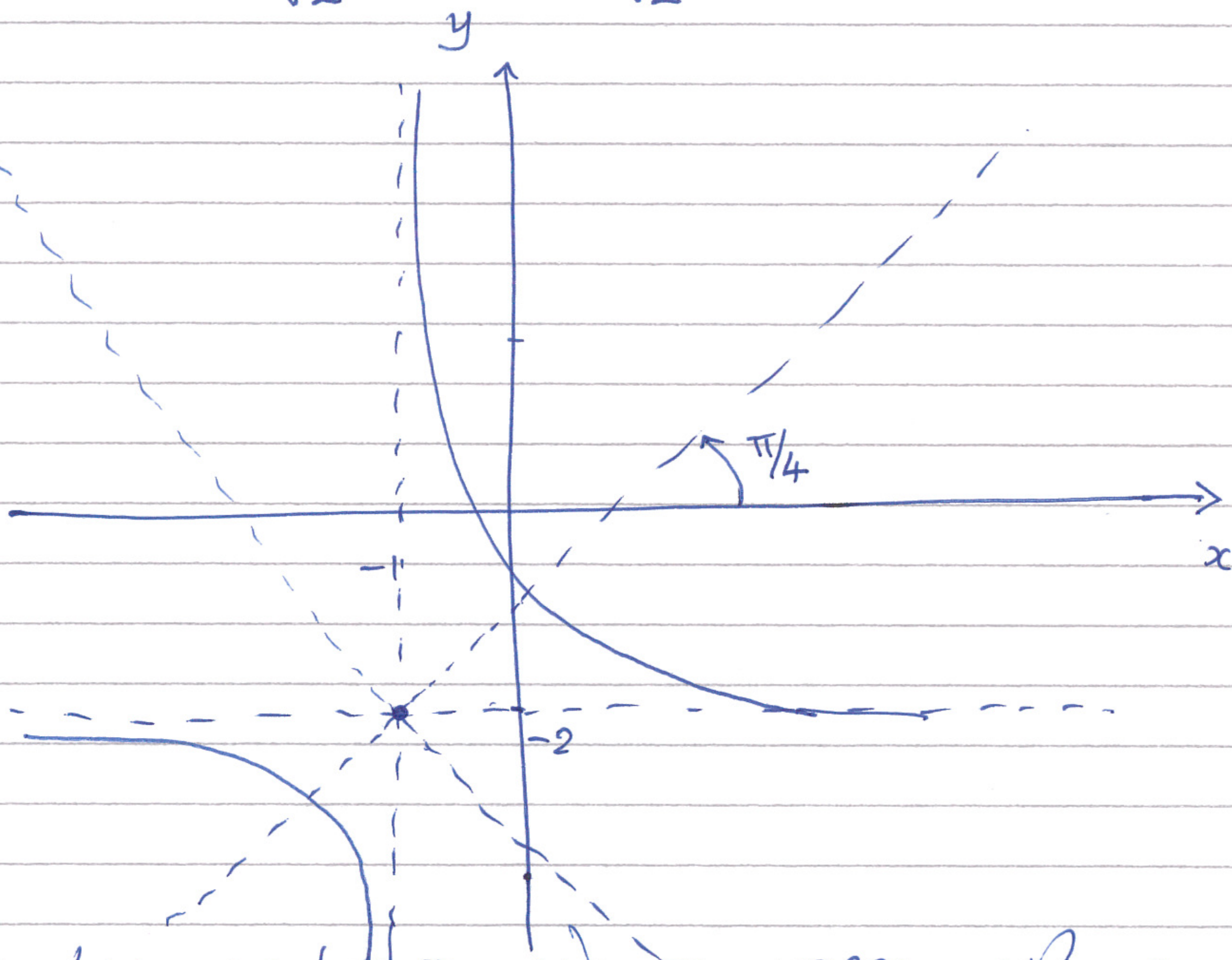
Οπότε προκύπτει μια υπερβολή με κέντρο το σημείο

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$$ και ασύμπτωτους

$$x' + \frac{3}{\sqrt{2}} = y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x' = y' - \sqrt{2}$$

και

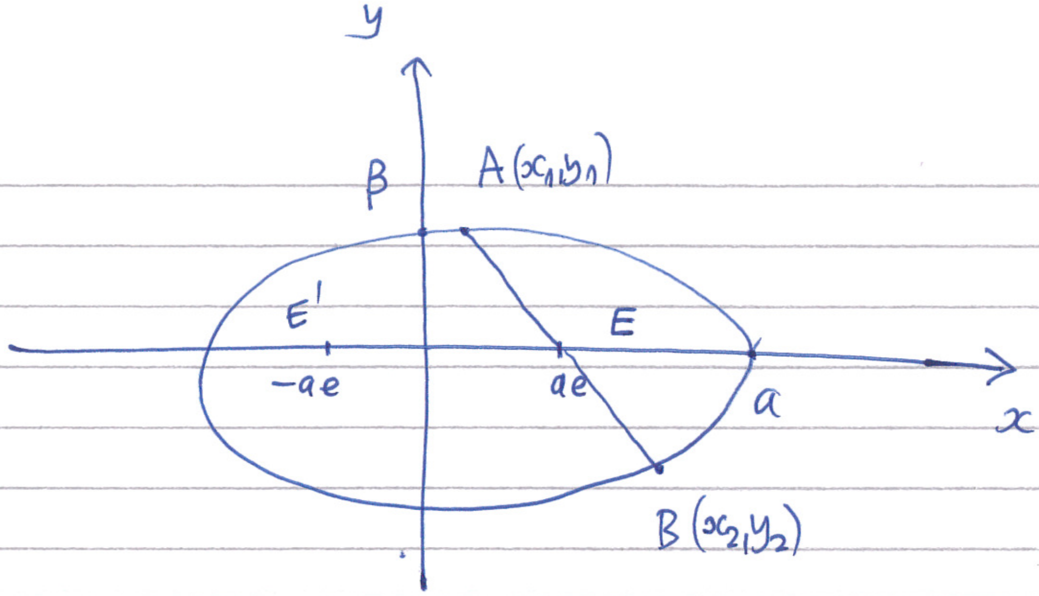
$$x' + \frac{3}{\sqrt{2}} = -y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x' + y' = -2\sqrt{2} .$$



Στο αρχικό σύστημα, το κέντρο της υπερβολής είναι το

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

4)



Έστω A, B δύο σημεία της έλλειψης, οπότε

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{\beta^2} = 1 \qquad (2)$$

Επειδή η χορδή AB, διέρχεται από την εστία E θα υπάρχει $\lambda > 1$, ώστε $\vec{AB} = \lambda \vec{AE}$, οπότε

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda (ae - x_1, -y_1)$$

και επομένως $\quad x_2 - x_1 = \lambda (ae - x_1) \qquad (3)$

$$y_2 - y_1 = -\lambda y_1 . \qquad (4).$$

Το μέσο $M(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ της χορδής.
Προσθέτουμε τις (1), (2) και παίρνουμε:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{\beta^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{a^2} +$$

$$\frac{(y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2}{\beta^2} = 2 \Leftrightarrow 4\frac{x_0^2}{a^2} + 4\frac{y_0^2}{\beta^2} = 2 + 2\left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{\beta^2}\right)$$

(5)

Αν αφαιρέσουμε τις (1), (2) παίρνουμε ότι

$$\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{a^2} + \frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{\beta^2} = 0$$

αντικαθιστούμε τις (3), (4) και παίρνουμε

$$\frac{\cancel{\lambda}(ae-x_1)(x_1+x_2)}{a^2} - \frac{\cancel{\lambda}\, y_1(y_2+y_1)}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{a}(x_1+x_2) - \frac{x_1^2+x_1x_2}{a^2} - \frac{y_1y_2+y_1^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{a}\cdot 2x_0 - \left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}\right) = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{\beta^2}$$

οπότε

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{\beta^2} = \frac{2e}{a}x_0 - 1 .$$

και η (5) γράφεται:

$$4\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}\right) = 2+2\left(\frac{2e}{a}x_0 - 1\right) \Leftrightarrow$$

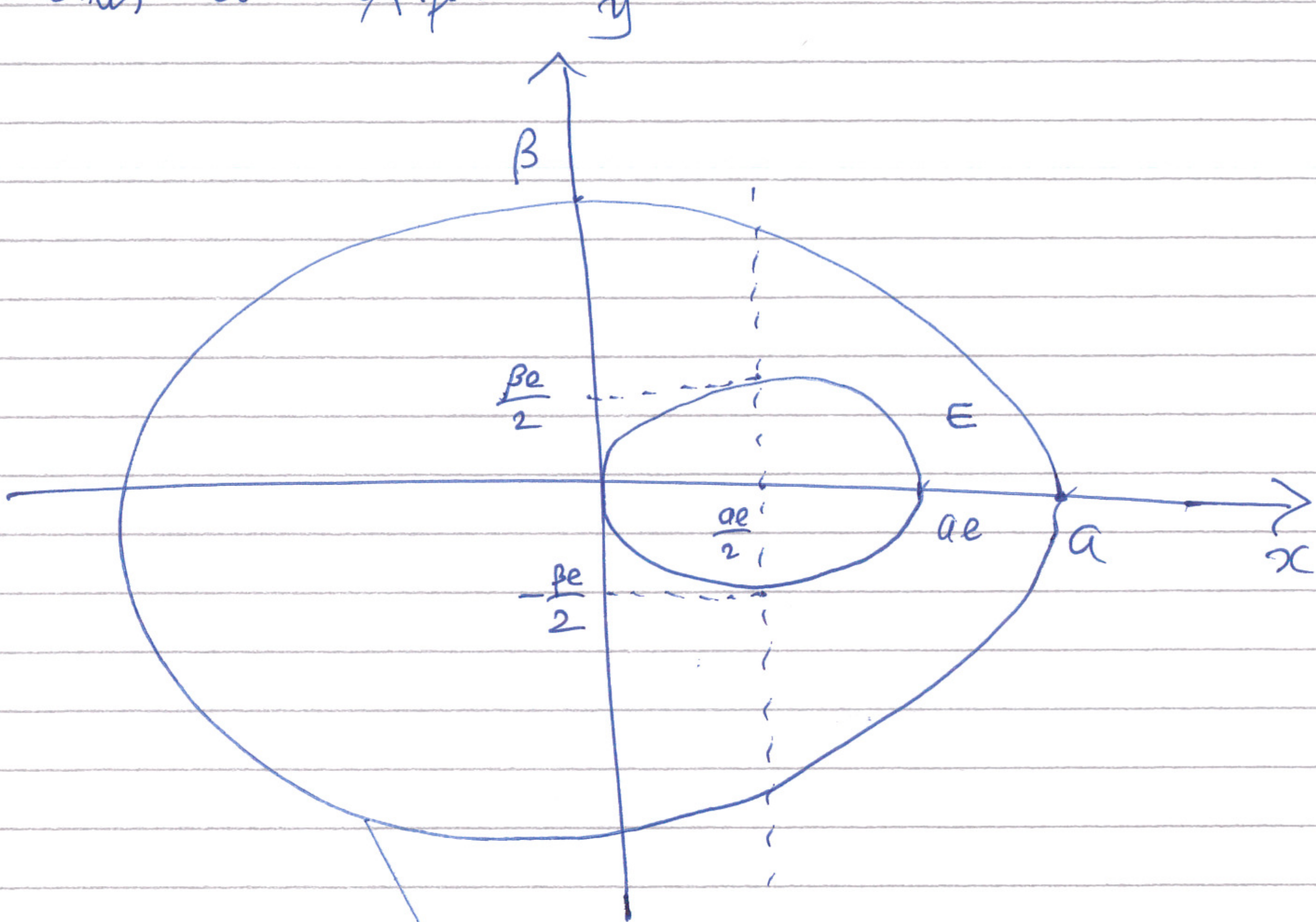
$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{e}{a}x_0 + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x_0-\frac{ea}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow$$

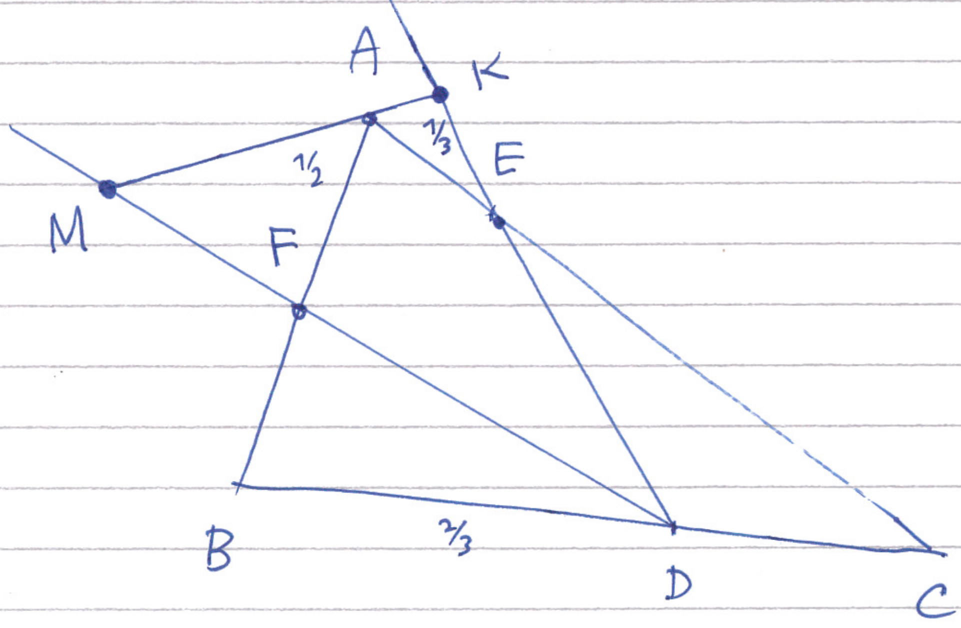
$$\frac{\left(x_0-\frac{ea}{2}\right)^2}{\left(\frac{ae}{2}\right)^2} + \frac{y_0^2}{\left(\frac{\beta e}{2}\right)^2} = 1 .$$

Είναι δηλ. έλλειψη με κέντρο (αφού συμμετρική) το $\left(\frac{ea}{2}, 0\right)$

Όπως στο σχήμα



5)



Επιλέγουμε σαν βάση τα $\vec{AB}, \vec{AC}$, τότε έχουμε

$$\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CA} = \frac{1}{3}\left(-\vec{AB} + \vec{AC}\right) - \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

$$\vec{DF} = \vec{DB} + \vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{2}{3}\left(-\vec{AC} + \vec{AB}\right) - \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$$

Όμως $\vec{DK} = \frac{10}{7}\vec{DE} \Rightarrow \vec{EK} = \frac{3}{7}\vec{DE} = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right) \Rightarrow$

$$\vec{EK} = -\frac{1}{7}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$$

$$\vec{DM} = \frac{5}{2}\vec{DF} \Rightarrow \vec{FM} = \frac{3}{2}\vec{DF} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{FM} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \vec{AC}.$$

Επομένως

$$\vec{KA} = \vec{KE} + \vec{EA} = \frac{1}{7}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right) - \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{7}\vec{AB} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right)\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{7}\left(\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}\right).$$

και

$$\vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB} - \vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}\right)$$

Όποτε $\vec{KA} = \frac{4}{21}\vec{AM}$ και τα σημεία K, A, M είναι συνευθειακά.

Επίσης $\vec{DK} = \frac{10}{7}\vec{DE} = \frac{10}{7}\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right) = -\frac{10}{21}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right).$

$$\vec{DM} = \frac{5}{2}\vec{DF} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\vec{AB} - \frac{5}{3}\vec{AC}.$$

έτσι

$$\vec{DK}\times\vec{DM} = -\frac{10}{21}\left(\vec{AB}+\vec{AC}\right)\times\left(\frac{5}{12}\vec{AB} - \frac{5}{3}\vec{AC}\right)$$

$$= -\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{21}\cdot\frac{5}{\cancel{12}\,6}\left(\vec{AB}+\vec{AC}\right)\times\left(\vec{AB}-4\vec{AC}\right)$$

$$= -\frac{25}{126}\left(-4\,\vec{AB}\times\vec{AC} + \vec{AC}\times\vec{AB}\right)$$

$$= \frac{125}{126}\,\vec{AB}\times\vec{AC}.$$

επομένως $\quad \mathcal{E}(DKM) = \frac{1}{2}\left|\vec{DK}\times\vec{DM}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{126}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$

$$= \frac{125}{126}\,\mathcal{E}(ABC).$$

---

6) έχουμε: $\quad 3yz + 4xz - 2y = 0 \iff 8xz + 6yz - 4y = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0$$

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & -4\\ 0 & x & -3\\ -4 & -3 & x\end{pmatrix} = x(x^2-9) - 4(4x) = x(x^2-5^2) = x(x-5)(x+5).$$

έστω $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0, τότε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4z=0 \\ 3z=0 \\ 4x+3y=0 \end{array}\right.$$

οποτε ενα μοναδιαιο ιδιοδιανυσμα ειναι το $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Αντιστοιχα για την ιδιοτιμη 5, εχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4z=5x \\ 3z=5y \\ 4x+3y=5z \end{array}\right]$$

και $\begin{pmatrix} \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ειναι ενα μοναδιαιο ιδιοδιανυσμα.

Παρομοια για την ιδιοτιμη -5, εχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4z=-5x \\ 3z=-5y \\ 4x+3y=-5z \end{array}\right]$$

και $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ειναι ενα μοναδιαιο ιδιοδιανυσμα.

Επειδη $\det\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$

ο πινακας των ιδιοδιανυσματων ειναι ορθογωνιος.

και θέτουμε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

οπότε παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^t P^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} & \frac{12}{5\sqrt{2}} & -\frac{12}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(y')^2 - 5(z')^2 + \frac{16}{5}x' - \frac{12}{5\sqrt{2}}y' + \frac{12}{5\sqrt{2}}z' = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left[(y')^2 - 2\,\frac{6}{25\sqrt{2}}\,y' + \left(\frac{6}{25\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{6}{25\sqrt{2}}\right)^2 \right]$$

$$-5\left[(z')^2 - 2\,\frac{6}{25\sqrt{2}}\,z' + \left(\frac{6}{25\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{6}{25\sqrt{2}}\right)^2 \right] + \frac{16}{5}x' = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{25}\right)^2 - 5\left(z' - \frac{3\sqrt{2}}{25}\right)^2 + \frac{16}{5}x' = 0$$

$$y' - \frac{3\sqrt{2}}{25} = y''$$

$$z' - \frac{3\sqrt{2}}{25} = z''$$ προκύπτει :

$$x' = x''$$

$$x'' = \frac{(z'')^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^2}.$$

προκειται δηλ. για υπερβολικο παραβολοειδες.