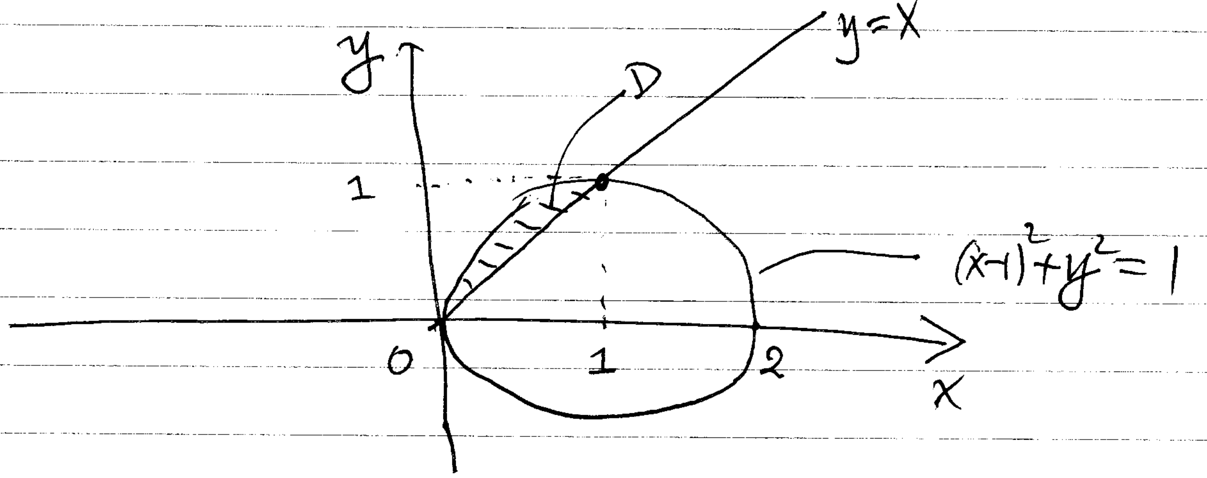
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
(ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ)

1) α) Αρχικά σχεδιάζουμε το χωρίο $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge x\}$



Ο κύκλος $(x-1)^2+y^2=1$, τέμνεται με την ευθεία $y=x$ στα σημεία:

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+y^2=1\\ y=x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-1)^2+x^2=1\\ y=x\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-1)^2+x^2-1=0\\ y=x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-1)^2+(x-1)(x+1)=0\\ y=x\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-1)(x-1+x+1)=0\\ y=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x(x-1)=0\\ y=x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\langle\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Οπότε τα σημεία τομής είναι τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$.

Το χωρίο D είναι όπως στο σχήμα.
Επομένως:

$$\iint_D (x-1)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (x-1)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)\left(\sqrt{1-(x-1)^2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx - \int_0^1 x(x-1)\,dx$$

$$y = 1-(x-1)^2 \Rightarrow dy = -2(x-1)dx$$

$$= \int_0^1 y^{1/2}\left(-\frac{dy}{2}\right) - \int_0^1 (x^2-x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 y^{1/2}dy - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

β) Έχουμε

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z^2)\right)\vec{i}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+y)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+y)\right)\vec{k}$$

$$= (2z-2z)\vec{i} - 0\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.$$

3)

Οπότε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο. Επειδή το χωρίο $\mathbb{R}^3$ είναι απλά συνεκτικό, $\exists$ βαθμωτή $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \;.\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2yz. \qquad (3)$$

Έχουμε από την (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy), \text{ οπότε}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y,z)-(x^2+xy)\right) = 0.$$

Επομένως υπάρχει συνάρτηση $g=g(y,z)$ ώστε

$$f(x,y,z) - (x^2+xy) = g(y,z) \Leftrightarrow$$

$$f(x,y,z) = g(y,z) + x^2+xy. \qquad (4)$$

Οπότε η (2) γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g(y,z)+x^2+xy\right) = x+z^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) + x = x+z^2 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(g(y,z)-yz^2\right) = 0, \text{ οπότε } \exists h=h(z) \text{ ώστε:}$$

$$g(y,z) - yz^2 = h(z) \Rightarrow g(y,z) = yz^2 + h(z)$$

και άρα από την (4)

$$f(x,y,z) = yz^2 + h(z) + x^2 + xy$$

και τέλικα από την (3) παίρναμε

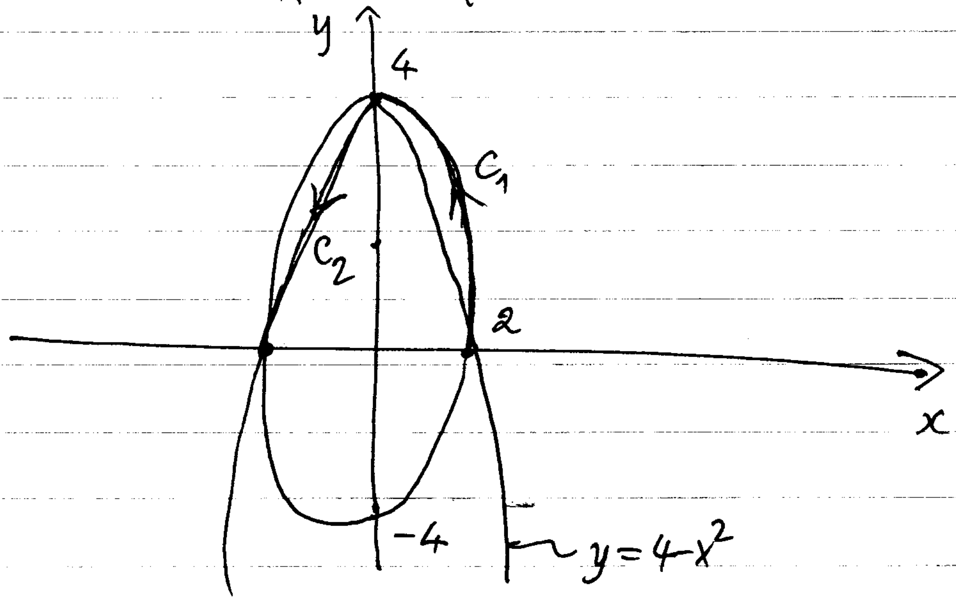
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(yz^2 + h(z) + x^2 + xy\right) = 2yz \Leftrightarrow$$

$$2yz + h'(z) = 2yz \Leftrightarrow h'(z) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ ώστε } h(z) = c$$

και επομένως

$$f(x,y,z) = yz^2 + x^2 + xy + c, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Αρχικά θα σχεδιάσουμε τη καμπύλη



Παρατηρούμε αρχικά ότι στο διάστημα $[-2, 2]$ η έλλειψη είναι πάνω από την παραβολή, διότι

5) $y^2 = 4^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right) > (4-x^2)^2 = y_1^2 \qquad x\in(-2,2)\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow 4(4-x^2) - (4-x^2)^2 > 0 \Leftrightarrow (4-x^2)\big(4-(4-x^2)\big) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(4-x^2) > 0$ που ισχύει αν $x\in(-2,2)\setminus\{0\}$.

Παραμετρικοποιούμε το πρώτο κομμάτι C_1, της C, ως εξής:

$\vec{r}(\theta) = (x, y) = (\underset{x}{2\cos\theta}, \underset{y}{4\sin\theta})$, $\quad \theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

που έχει τον θετικό προσανατολισμό (αντίθετο της κίνησης των δεικτών του ρολογιού), $\vec{r}'(\theta) = (-2\sin\theta, 4\cos\theta)$

Οπότε

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} (8\sin\theta, -4\cos\theta + 4\sin\theta)\cdot(-2\sin\theta, 4\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-16\sin^2\theta + 4\cos\theta\,(-4\cos\theta + 4\sin\theta)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-16\sin^2\theta - 16\cos^2\theta + 16\sin\theta\cos\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-16 + 8\sin(2\theta)\right] d\theta$$

$$= \left(-16\theta - 4\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = -8\pi + 8 = -8(\pi - 1).$$

Για το κομμάτι C_2 της C, τη παραμετρικοποιούμε σαν γράφημα συνάρτησης $\vec{r}(x) = (x, 4-x^2)$, $-2 \le x \le 0$.

Τότε $\vec{r}'(x) = (1, -2x)$, $-2\le x\le 0$. Προσοχή έχει

b) αντίθετο προσανατολισμένο από το ζητούμενο. Οπότε

$$\int_{b_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{-2}^{0} \left(2(4-x^2), -2x+4-x^2\right)\cdot(1,-2x)\,dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} \left[2(4-x^2) - 2x(-2x+4-x^2)\right]dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} \left[8-2x^2+4x^2-8x+2x^3\right]dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} \left[8-8x+2x^2+2x^3\right]dx$$

$$= -\left(8x-4x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$= 8(-2)-4(-2)^2+\frac{2(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^4}{2}$$

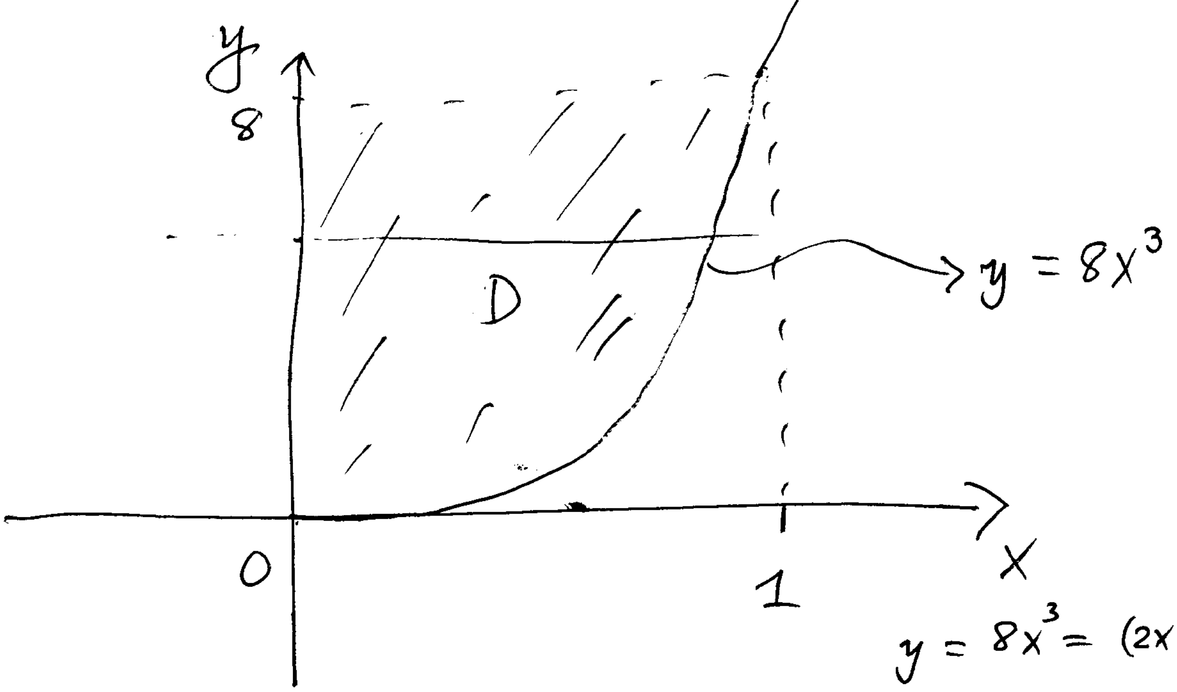
$$= -\frac{88}{3}.$$

και τελικά

$$\oint_{b} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{b_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{b_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -8(\pi-1) - \frac{88}{3}.$$

---

3) Αρχικά σχεδιάζουμε το υπό ολοκλήρωση χωρίο, την έχω ως εξής:



$$y = 8x^3 = (2x)^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} y^{1/3}$$

Κάναμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης και παίρνουμε

$$\int_0^1 \int_{8x^3}^{8} \sin\left(\frac{\pi y^{4/3}}{16}\right) dy\, dx = \int_0^8 \left(\int_0^{\frac{1}{2} y^{1/3}} \sin\left(\frac{\pi y^{4/3}}{16}\right) dx \right) dy$$

$$= \int_0^8 \frac{1}{2} y^{1/3} \sin\left(\frac{\pi y^{4/3}}{16}\right) dy$$

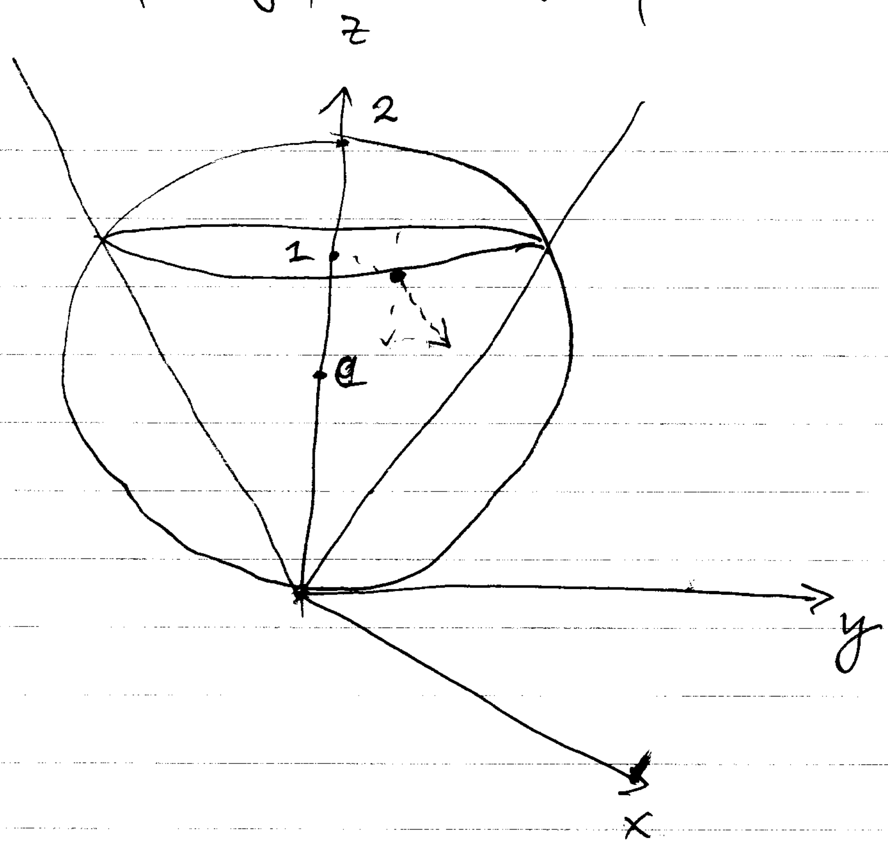
Θέτουμε $t = \frac{y^{4/3}}{16} \Rightarrow dt = \frac{1}{12} y^{1/3} dy$

Άκρα $t = \frac{(2^3)^{4/3}}{16} = 1$

$$= \int_0^1 \sin(\pi t)\ 6dt = 6 \int_0^1 \sin(\pi t) dt = 6 \left(\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{12}{\pi}.$$

4) Αρχικα σχεδιαζουμε την (ζητειται) επιφανεια S



Ο $(z\geq 0)$ κωνος $z^2=x^2+y^2$, τεμνει τη σφαιρα $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

Στο:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} z^2+(z-1)^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2z^2-2z+1=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(z-1)=0 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0,\ y=0,\ x=0 \\ z=1,\ x^2+y^2=1. \end{array}\right.$$

(το σχημα ειναι λιγο παραπλανητικο.)

Οποτε η επιφανεια S αποτελειται απο δυο κομματια

$S_1 := \{(x,y,z) \mid z^2=x^2+y^2,\ 0\leq z\leq 1\}$ και

$S_2 := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z\geq 1\}$.

9) Παραμετρικοποιούμε της (το κομμάτι κώνου) ως εξής

$$= (x,y,z) = \underbrace{(z\cos\theta,\ z\sin\theta,\ z)}_{\Phi(z,\theta)}\ ,\quad 0\le z\le 1,\quad 0\le\theta<2\pi.$$

Οπότε
$$\Phi_z(z,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)$$
$$\Phi_\theta(z,\theta) = (-z\sin\theta,\ z\cos\theta,\ 0)$$

$$\Phi_z(z,\theta)\times\Phi_\theta(z,\theta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -z\cos\theta\ \vec{i}\ - z\sin\theta\ \vec{j} + (z\cos^2\theta + z\sin^2\theta)\ \vec{k}$$

$$= (-z\cos\theta,\ -z\sin\theta,\ z).$$

Επιλέγοντας το σημείο $(1,0,1)$ της S_1, το κάθετο διάνυσμα προς τα έξω έχει z συνιστώσα αρνητική

Οπότε το κάθετο διάνυσμα της S_1, προς τα έξω είναι το

$$(z\cos\theta,\ z\sin\theta,\ -z),\quad 0\le\theta<2\pi,\ 0\le z\le 1.$$

και επομένως

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \vec{F}\cdot(z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\,dz\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (z\sin\theta,\ -z\cos\theta,\ z)\cdot(z\cos\theta,\ z\sin\theta, -z)\,dz\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left[z^2 \cancel{\sin\theta\cos\theta} - z^2 \cancel{\cos\theta\sin\theta} - z^2\right] dz\right) d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 z^2\,dz\right) d\theta = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=0}^{z=1} d\theta$$

$$= -\frac{2\pi}{3}.$$

Η S_2 είναι κομμάτι σφαίρας με κέντρο το $(0,0,1)$ και ακτίνα 1, οπότε θα την παραμετρικοποιήσουμε με σφαιρική ~~...~~ παραμετρικοποίηση. Οπότε

$$\begin{aligned} z-1 &= \cos\varphi \\ x &= \sin\varphi\cos\theta \\ y &= \sin\varphi\sin\theta \end{aligned} \qquad , \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta < 2\pi .$$

Άρα

$$(x,y,z) = \Phi(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ 1+\cos\varphi).$$

$$\Phi_\varphi(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi)$$

$$\Phi_\theta(\varphi,\theta) = (-\sin\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$

~~Άρα~~ Οπότε

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \sin^2\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin^2\varphi\sin\theta\,\vec{j} + (\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta)\,\vec{k}$$

$$= (\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\varphi).$$

Ένα σημείο της S_2 είναι για $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\theta=0$, το $(1,0,1)$ με κάθετο διάνυσμα στην S_2 στην κατεύθυνση του $(1,0,0)$.

Όμως επίσης

$$\Phi_\varphi\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)\times\Phi_\theta\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)=(1,0,0)$$

οπότε το $\Phi_\varphi\times\Phi_\theta=(\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\varphi)$

δείχνει προς τα έξω της σφαίρας.

Οπότε

$$\iint_{S_2} F\cdot d\vec{S}=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\vec{F}\cdot(\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\theta\right)d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(\sin\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi\cos\theta,\ 1+\cos\varphi)\cdot(\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[\cancel{\sin^3\varphi\sin\theta\cos\theta}-\cancel{\sin^3\varphi\cos\theta\sin\theta}+(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\right]d\theta\,d\varphi$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$t=\cos\varphi\ \Rightarrow\ dt=-\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=2\pi\int_1^0(t+t^2)(-dt)=2\pi\int_0^1(t^2+t)\,dt=2\pi\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

12)

$$= \frac{5\pi}{3}.$$

Επομένως $\displaystyle\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \, d\vec{S}$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \pi.$$