05/10/23

ΣΔΕ
– Φυλλάδιο 1 –

3) $y: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

$y'(t)+3t^2y(t)>0 \quad , \forall\, t>0$

$y(0)=0$

$\Longrightarrow y(t)>0 \quad , t>0 .$

Λύση:

Πολ/ζω με $f>0$.

$$\underbrace{f(t)y'(t)+\boxed{3t^2f(t)}\,y(t)}_{=\,(f(t)y(t))'}>0$$

$$f(t)y'(t)+\boxed{f'(t)}\,y(t)$$

$\Rightarrow f'(t)=3t^2f(t)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(t)}{f(t)}=3t^2$

$\Rightarrow (\ln f(t))'=(t^3)'$

$\Rightarrow \ln f(t)=t^3$

$f(t)=e^{t^3}$

Πολ/ζω την $y(t)+3t^2y(t)>0$

$\Rightarrow e^{t^3}(y(t)+3t^2y(t))>0$

για $t>0$, $(e^{t^3}y(t))'>0$

$\Rightarrow e^{t^3}y(t)>e^0y(0)=0$

$\left\{\begin{array}{l} y'(t)>0 \\ y(0)=0 \end{array}\right.$

• $y \uparrow$

• Απο ΘΜΤ:

$y(t)-y(0)=ty'(\xi)$

VIP! (πολ/στης Euler)

1) $y'(t) + \alpha y(t) = \beta \quad , t > 0$
$y(0) = c$

$, \text{για } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

όπου $\alpha > 0 \implies \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \frac{\beta}{\alpha}$

Λύση:

Πολ/ζω με $e^{\alpha t}$:

$\implies e^{\alpha t}\left(y'(t) + \alpha y(t)\right) = e^{\alpha t} \cdot \beta$

Αν $\alpha = 0 \implies y'(t) = \beta$

$\implies y(t) = \overbrace{y(0)}^{c} + \beta t$

$y(t) = c + \beta t$

Αν $\alpha \neq 0 \implies \underbrace{e^{\alpha t}\left(y'(t) + \alpha y(t)\right)} = \beta e^{\alpha t}$

$(e^{\alpha t} y(t))' = \left(\int_0^t \beta e^{\alpha s} ds\right)'$

$= \left(\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha s}\right)\Big|_0^t$

$= \left(\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t}\right)'$

$\implies \left(e^{\alpha t} y(t) - \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t}\right)' = 0$

$\implies e^{\alpha t} y(t) - \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} = e^{\alpha \cdot 0} y(0) - \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha \cdot 0}$

$= c - \frac{\beta}{\alpha}$

$\implies y(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left(c - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} \quad , t \geq 0$

Αν $\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{b}{\alpha} + \left(c - \frac{b}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right)$

$$= \frac{b}{\alpha} + \left(c - \frac{b}{\alpha}\right)\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{b}{\alpha}.$$

■

2) Να λυθεί,

$$y'(t) = 3t^2 y^2(t), \quad t > 0$$
$$y(0) = 1$$

και μετά $\lim_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$

Λύση:

Επειδή η λύση y είναι συνεχής στο 0 και $y(0)=1$, θα υπάρχει διάστημα $[0,\delta)$ για το οποίο

$$y(t) > 0, \quad \forall t \in [0,\delta)$$

Επιλέγουμε σαν δ, το μεγαλύτερο δυνατό που ορίζεται η λύση y και $y(t)>0$, $t\in[0,\delta)$.

Τότε, $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 3t^2, \quad t\in(0,\delta)$

ανοικτό διότι η παραγωγισιμότητα ορίζεται στο ανοικτό.

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{y(t)}\right)' = (t^3)', \quad t\in(0,\delta)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y(t)} - t^3\right)' = 0, \quad t\,(0,\delta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(t)} + t^3 = \frac{1}{y(0)} + 0 = 1.$$

$$\iff \frac{1}{y(t)} = 1-t^3 > 0$$

Οπότε, για $0 \leqslant t < 1$,

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t^3}, \quad \underbrace{0 \leqslant t < 1}_{}$$

↪ μέγιστο διάστημα!

$$\Rightarrow \lim_{t \to 1^-} y(t) = +\infty$$

$\blacksquare$

Ασκήσεις
ΣΔΕ

1) Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f^2(t) = 1 + \int_0^t f(s)ds \quad , t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

i) Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $(*)$.

ii) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $(*)$.

iii) Να βρεθούν όλες οι ολ|μες στα φραγμένα διαστήματα συναρτήσεις $(*)$.

Λύση:

i) Αν f παραγωγίσιμη $\Rightarrow f^2$ παραγωγίσιμη

Οπότε, $\left(f^2(t)\right)' = \left(1 + \int_0^t f(s)ds\right)'$

$$2f(t)f'(t) = f(t)$$

$$\Longleftrightarrow f(t)(2f'(t) - 1) = 0 \quad (**)$$

α) $f(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R}$, που λύνει την Δ.Ε όμως πρέπει επίσης $f^2(0) = 1$, αδύνατον!

$\Longleftrightarrow$ είτε $f(0) = 1$

είτε $f(0) = -1$

β) Από τη συνέχεια της f στο 0, $\exists\ (\alpha, \beta) \ni 0$ ώστε $f(t) \neq 0$, $\forall\ t \in (\alpha, \beta)$.

Τότε, πρέπει επίσης,

$$2f'(t) - 1 = 0 \quad , t \in (\alpha, \beta)$$

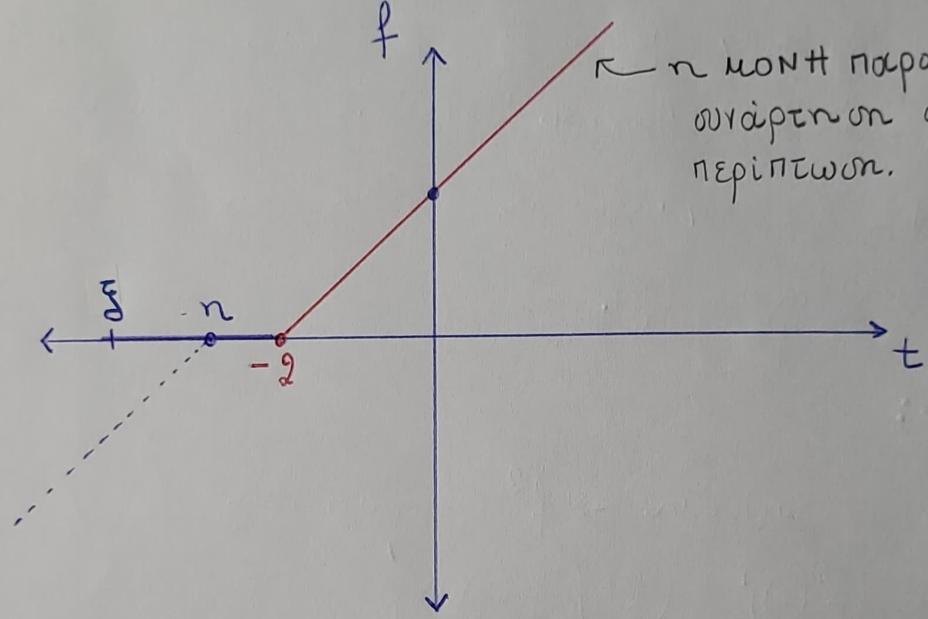
$$\Longleftrightarrow f'(t) = \frac{1}{2}$$

$$\iff \left(f(t)-\frac{t}{2}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow f(t)-\frac{t}{2} = f(0) \quad , t\in(\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow f(t) = f(0) + \frac{t}{2}$$

- $f(0)=1 \Rightarrow f(t)=\frac{t}{2}+1$
- $f(0)=-1$



← η ΜΟΝΗ παραγωγίσιμη συνάρτηση σε αυτή την περίπτωση.

→ $f(t)\equiv 0, \ (\alpha\text{-}2)$
τότε στο $t=-2$ δεν είναι παραγωγίσιμη.
οπότε απορρίπτεται.

Έστω $\xi<-2$

$f(\xi)<0 \quad , (\kappa,\lambda)\ni\xi$

$f(t)<0 \quad , \forall\, t\in(\kappa,\lambda)$

$\Rightarrow f(t)=\frac{t}{2}+f(\xi)$

$f(n)=0 \Rightarrow f(\xi)=-\frac{n}{2}$

$\Rightarrow f(t)\equiv 1+\frac{t}{2} \quad , t\in\mathbb{R}$

β) $f(t) \equiv -1 + \frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$

i) $\left(1+\frac{t}{2}\right)^2 = 1 + \int_0^t \left(1+\frac{s}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{4}$

ii) $\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 = 1 + \int_0^t \left(-1+\frac{s}{2}\right) ds = 1 - t + \frac{t^2}{4}$

→ Βρήκαμε δύο διαφορίσιμες λύσεις.

ii) Γνωρίζω ότι,

f^2 παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f παραγωγίσιμη

Δηλαδή, $\frac{f^2(t)-f^2(t_0)}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

Θέλω, $f(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow f(t)+f(t_0) \neq 0$, $(t_0-\delta, t_0+\delta)$

$\Rightarrow \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{\frac{f^2(t)-f^2(t_0)}{t-t_0}}{f(t)+f(t_0)}$

Αν $g(x)=x^2$

t^2

$\underbrace{(g\circ f)(t) = f^2(t)}_{f = g^{-1}\circ f^2}$ $\Rightarrow$ f παραγωγίσιμη

$|t|$

Άρα,

Έστω $(\alpha,\beta) \ni 0$, το μεγαλύτερο διάστημα με την ιδιότητα $f(t) \neq 0$, $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$.

• f^2 παραγωγίζεται $\Rightarrow$ f παραγωγίζεται

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2} \quad , t \in (\alpha, b)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t}{2} + f(0) \begin{cases} 1 + \frac{t}{2} \\ -1 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

Αν πάρουμε την προηγούμενη περίπτωση,

- $f(t) = \frac{t}{2} + 1$
- $f_1(t) = \begin{cases} 1 + t/2 & , t \geq -2 \\ 0 & , t < -2 \end{cases}$

- για $t < -2$:

$$0 = 1 + \int_0^t f(s)ds$$

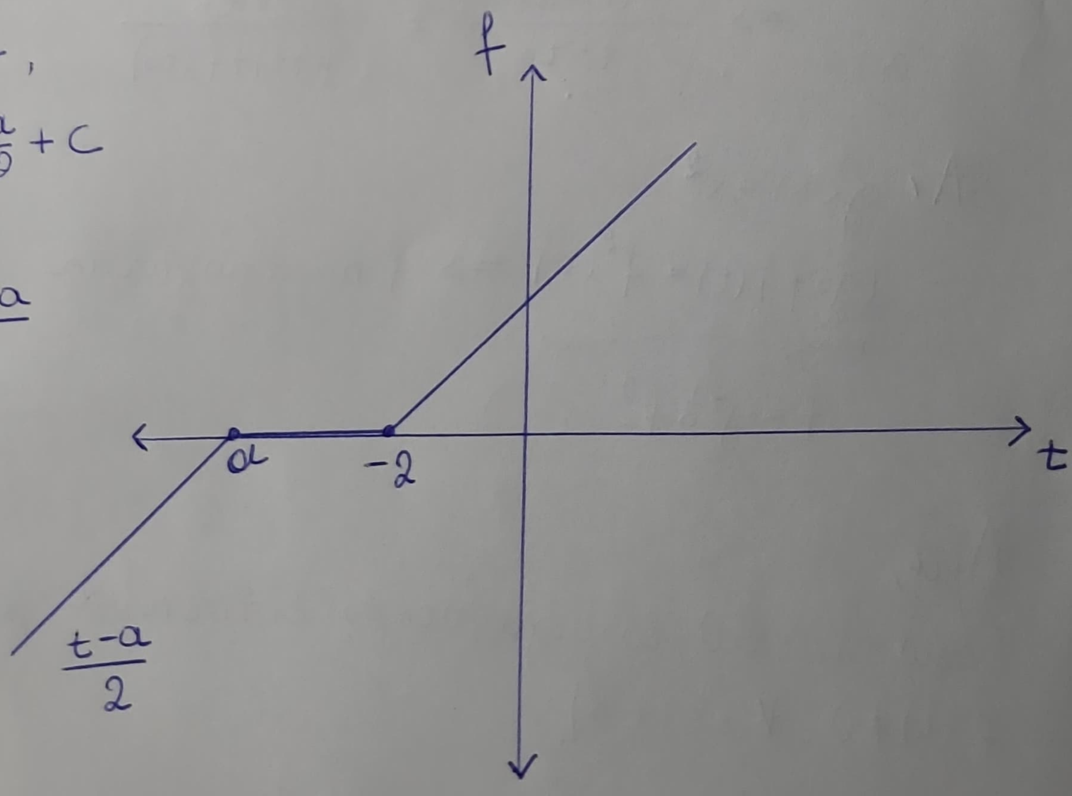
$$= 1 + \cancel{\int_0^{-2} \overbrace{f(s)}^{1+s/2} ds} + \int_{-2}^t f(s)ds$$

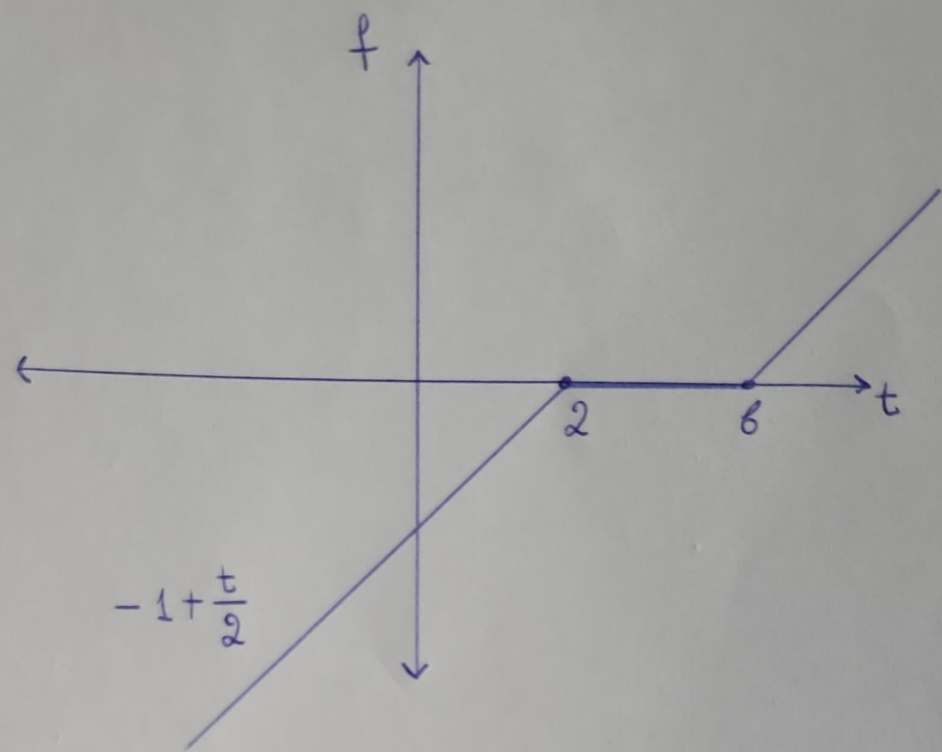
Αν $f(t) = \frac{t}{2} + c$,

$$0 = f(\alpha) = \frac{a}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow f_a(t) = \frac{t-a}{2}$$





iii) είτε $f(0)=1$
είτε $f(0)=-1$

Οπότε,

$0\in(\alpha,\beta)$, $f(t)>0$, $\forall\ t\in(\alpha,\beta)$

Απο ολοκληρωτική σχέση, η $f^2(t)$ είναι συνεχής.

$$g:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty) \quad , g(t)=t^2$$
$$g^{-1}:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty) \quad , g^{-1}(t)=\sqrt{t}$$

$\Rightarrow f(t)$ συνεχής στο (α,β)

■

19/10/23

ΣΔΕ
- Φυλλάδιο 2 -

2) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}0 & , 0\leq t\leq 1\\ 1 & , t>1\end{cases}$

Βρείτε όλες τις $\phi\in C[0,+\infty)$

$$t^2+\phi(t)=\int_0^t f(s)\phi(s)\,ds \quad , \forall\, t\geq 0$$

→ είναι παραγωγίσιμες;
→ ποιά δ.ε ικανοποιούν;

Λύση:

α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις
i) $0\leq t\leq 1$
ii) $t>1$

i) $t^2+\phi(t)=\int_0^t 0\phi(s)\,ds=0 \quad , \forall\, 0\leq t\leq 1$

$$\Rightarrow \phi(t)=-t^2$$

ii) $t>1$, $t^2+\phi(t)=\int_0^1 f(s)\phi(s)\,ds+\int_1^t f(s)\phi(s)\,ds$

$$=\int_0^1 0\cdot\phi(s)\,ds+\int_0^t \phi(s)\,ds$$

$$\Rightarrow t^2+\phi(t)=\int_1^t \phi(s)\,ds \ , \ t>1$$

Άρα, από χρήση Θ.Θ.Α.Λ το ολ/μα συνεχούς συνάρτησης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με την παράγωγο να είναι η αντίστοιχη αριθμητική τιμή.

$$\Rightarrow \quad \phi(t) = -t^2 + \underbrace{\int_1^t \phi(s)\,ds}$$

→ παραγωγίσιμη από Θ.Θ.Α.Λ

$$\Rightarrow \phi'(t) = -2t + \left(\int_1^t \phi(s)\,ds\right)'$$

$$= -2t + \phi(t)$$

$$e^{-t}(\phi'(t) - \phi(t)) = -2t\,e^{-t}$$

$$(e^{-t}\phi(t))' = -2te^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_1^t (e^{-s}\phi(s))'\,ds = -\int_1^t 2se^{-s}\,ds$$

$$e^{-t}\phi(t) - e^{-1}\phi(1) = -2\int_1^t se^{-s}\,ds \quad (*)$$

ολ/ση κατά παράγοντες →

$$\int_1^t se^{-s}\,ds = \int_1^t s(-e^{-s})'\,ds$$

$$= (-se^{-s})\Big|_1^t - \int_1^t (-e^{-s})\,ds$$

$$= -te^{-t} + e^{-1} - (e^{-t} - e^{-1})$$

$$= -(t+1)e^{-t} + 2e^{-1}$$

$$(*) = -2\left[-(t+1)e^{-t} + 2e^{-1}\right]$$

$\phi(t) = -t^2$
$\phi(1) = -1$

$$\Rightarrow e^{-t}\phi(t) = e^{-1}\phi(1) + 2(1+t)e^{-t} - 4e^{-1}$$

$$\phi(t) = e^{t-1}\phi(1) + 2(1+t) - 4e^{t-1}, \quad t>1.$$

$$= -5e^{t-1} + 2(1+t), \quad t>1$$

Οπότε, η λύση του προβλήματος είναι η εξής:

$$\phi(t) = \begin{cases} -t^2 & , 0 \leq t \leq 1 \\ -5e^{t-1} + 2(1+t) & , t>1 \end{cases}$$

$\longrightarrow \phi'(1^-) = -2$
$\longrightarrow \phi'(1^+) = -5+2 = -3$

$\Rightarrow \phi(t)$, όχι παραγωγίσιμη.

β) $\phi'(t) = -2t \quad , 0 \leq t \leq 1$
$\phi'(t) = -2t + \phi \quad , 1 < t$

Δεν έχει λύση η δ.ε αυτή
Έτσι και αλλιώς δεν είναι συνεχής. Αυτό είναι το όλο θέμα.

$$f(t,x) = \begin{cases} -2t & , 0 \leq t \leq 1 \\ -2t + x & , t>1 \end{cases}$$

Ουσιαστικά, η ολική έχει λύση
ενώ, η δ.ε δεν έχει λύση.

■

3) $$3y'(t) = 10t\,y^{2/5}(t) \quad , t>0$$
$$y(0)=0$$

Λύση:

Απο τη δ.ε η $y'(t) \geq 0$

Δηλαδή, $y \uparrow$ στο διάστημα ύπαρξης

Οπότε $y(t) \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι, $y_0(t) \equiv 0$, $t \geq 0$ είναι λύση του Π.Α.Τ.

Υπάρχει άλλη λύση;

Αν $y \not\equiv 0$, θα υπάρχει $t_1 > 0$ ώστε $y(t_1) > 0$.

Έστω $(\alpha, \beta) \ni t_1$.

Το μέγιστο δυνατό διάστημα ώστε:

$$y(t) > 0 \quad , t \in (\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{3y'(t)}{y^{2/5}(t)} = 10t \quad , t \in (\alpha, \beta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(5\,y^{3/5}(t)\right) = (5t^2)'$$

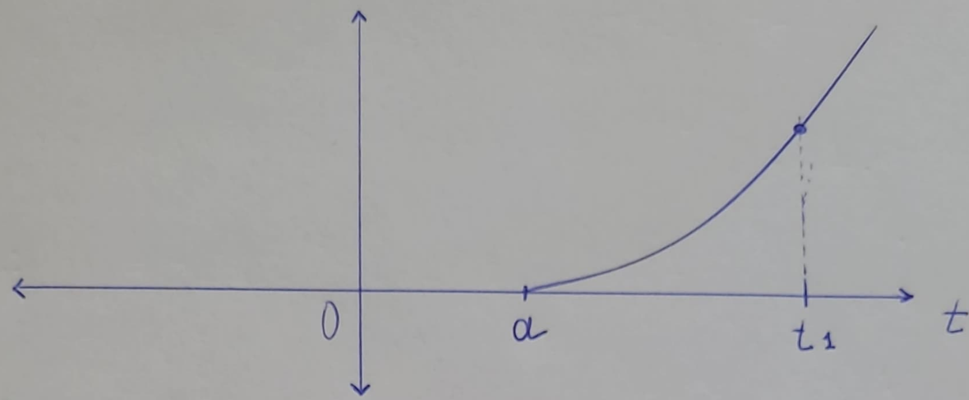
Οπότε, $(5y^{3/5}(t) - 5t^2)' = 0$, στο $t \in (\alpha, \beta)$

με $y(\alpha) = 0$

Για $\alpha < t < \beta$: $\cancel{5}y^{3/5}(t) - \cancel{5}t^2 = \cancel{5}y^{3/5}(\alpha) - \cancel{5}\alpha^2$ ↳ δεν με ενδιαφέρει το α.

$$\Rightarrow y^{3/5}(t) = t^2 - \alpha^2 \quad , t \geq \alpha$$

$$\Rightarrow y(t) = (t^2 - \alpha^2)^{5/3} \quad , t \geq \alpha \text{ και } t \in [\alpha, +\infty).$$

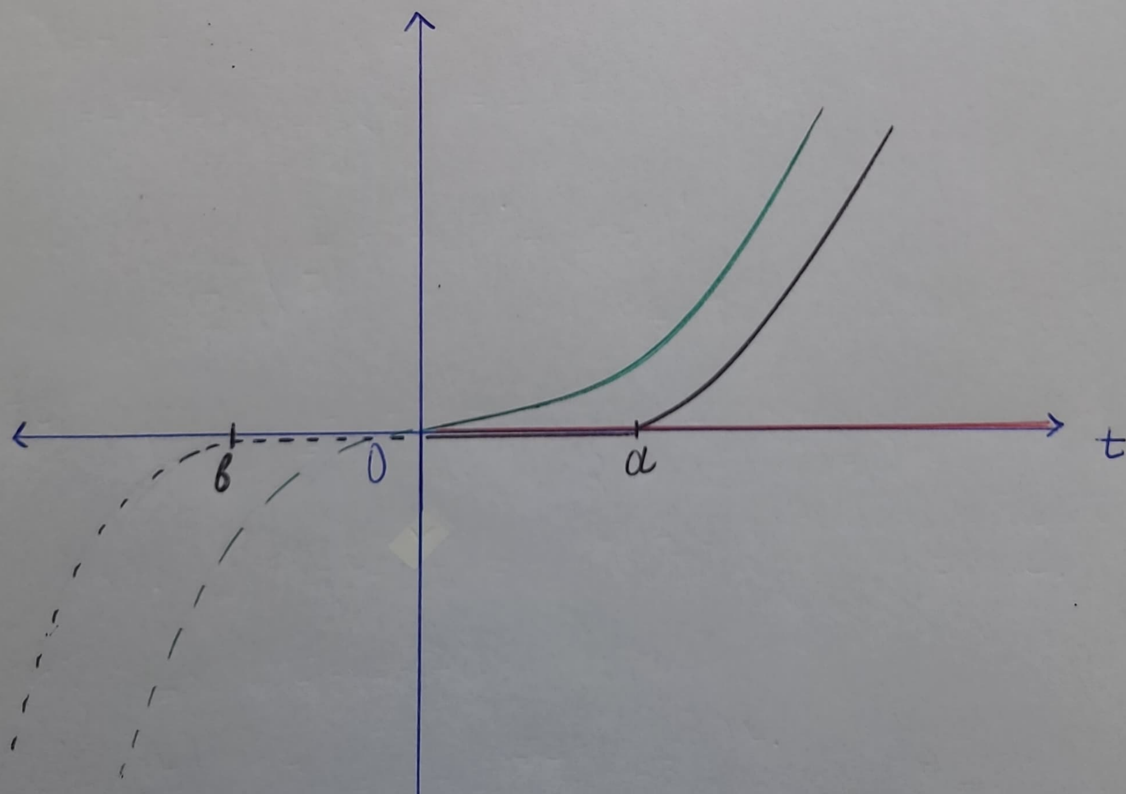


Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\alpha=0$: $y(t)=t^{10/3}$, $t\geq 0$

ii) $\alpha>0$: Λόγω μονοτονίας vip! $\longrightarrow$ $y(t)=0$, $0\leq t\leq \alpha$

$$y_{\alpha}(t)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\leq t\leq \alpha \\ (t^2-\alpha^2)^{5/3} & , \quad t>\alpha \end{cases}$$



1) α) $\phi \in C$, $t + 2\phi(t) = \int_0^t \phi^2(s)ds$, $t \geq 0$ (*)

β) $\phi \in R[0, \alpha]$.

<u>Λύση:</u>

α) $$2\phi(t) = -t + \underbrace{\int_0^t \phi^2(s)ds}_{\text{παραγωγίσιμη}}$$

$\Rightarrow$ ϕ είναι παραγωγίσιμη

$$\Longrightarrow \quad 2\phi'(t) = -1 + \phi^2(t)$$
$$\phi(0) = 0$$

Για $t=0$ στην (*)
Παίρνω,
$$\phi(0) = 0$$

$$2\phi'(t) = -1 + \phi^2(t) \ , \ t \geq 0$$
$$\phi(0) = 0$$

Απο τη συνέχεια της ϕ στο 0,
Για $0 < t < \delta$,

$$\Rightarrow \ |\phi(t)| < 1$$

Επιλέγω το μέγιστο δυνατό διάστημα της μορφής
$(0, \delta) \subset [0, T)$ τ.ω

$$\phi^2(t) < 1 \iff -1 + \phi^2(t) < 0 \quad , t \in [0, T)$$

Τότε, $\phi'(t) < 0$ για $t \in [0, T)$ και
Για $0 < t < T$,

$$(**) \quad \int_0^t \frac{\varphi(s)}{-1 + \varphi^2(s)} ds = \frac{1}{2}(t - 0)$$

αλλαγή μεταβλητης: $\xi = \phi(t)$

$d\xi = \phi'(t)dt$

$$(**) = \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{1}{-1+\xi^2} d\xi = \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{\phi(t)} \frac{1}{-1+\xi^2} = \frac{t}{2} \quad , \ t \in [0, T)$$

Οπότε, $\frac{1}{-1+\xi^2} = \frac{\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta}{1+\xi}$

$$= \frac{\alpha(1+\xi)+\beta(1-\xi)}{1-\xi^2}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)\xi+\beta(1-\xi)}{1-\xi^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)\xi + (\alpha+\beta) = -1$$

Οπότε, $\left.\begin{matrix} \alpha-\beta=0 \\ \alpha+\beta=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\phi(t)} \frac{1}{1-\xi} d\xi - \int_0^{\phi(t)} \frac{1}{1+\xi} d\xi = t.$$

$$(\ln(1-\xi))\Big|_0^{\varphi(t)} - (\ln(1+\xi))\Big|_0^{\varphi(t)} = t$$

$$\ln(1-\phi(t)) - \ln(1+\phi(t)) = t$$

$$\ln\left(\frac{1-\varphi(t)}{1+\varphi(t)}\right) = t$$

$$\frac{1-\varphi(t)}{1+\varphi(t)} = e^t$$

$$\iff \quad \frac{2\varphi(t)}{2} = \frac{1-e^t}{e^t+1}$$

$$\iff \quad \varphi(t) = \frac{1-e^t}{1+e^t}$$

$$= \frac{e^{-t}-1}{1+e^{-t}}$$

Αν $\varphi^2(t)<1$: $\quad (1-e^t)^2 < (1+e^t)^2$

$$1-2e^t+e^{2t} < 1+2e^t+e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad 0<4e^t$$

Το μεγιστικό διάστημα είναι το $[0,+\infty)$.

β) $2\varphi(t) = -t + \int_0^t \varphi^2(s)\,ds$

→ Αφού είναι Riemann ολοκλ/μη (γνωστό), αναγκαστικά είναι και συνεχής και δουλεύουμε όπως πριν.

→ Το ολοκλήρωμα μιας Riemann ολοκλ/μης είναι Lipschitz συνεχής.

∎

26/10/23

ΣΔΕ
— Φυλλάδιο 3 —

3) $y'(t) = y^{1/3}(t) + t^2,\ t>0$

$y(0) = 1$

α) ∃ τοπική λύση και βρείτε διάστημα ύπαρξης λύσης.

β) εξετάστε μονοτονία λύσης.

γ) αποδείξτε ότι οι λύσεις ορίζονται στο $[\alpha, +\infty)$.

δ) αποδείξτε το μονοσήμαντο της λύσης.

Λύση:

πρόχειρο: $f(t,y) = t^2 + y^{1/3}$

είναι τοπικά Lipschitz συνεχής;

(η Lipschitz συνέχεια προκύπτει όταν μπορώ να κάνω ΘΜΤ)

Επιλέγω $|x|<1$.

$$|f(t,x) - f(t,0)| < L|x|$$

$$|x^{1/3} - 0| \leq L|x|$$

$$1 \leq L|x|^{1-\frac{1}{3}}$$

$$1 \leq L|x|^{2/3}$$

δεν είναι Lipschizt στο μηδέν.

α) Θα εφαρμόσω το θεώρημα Peano.

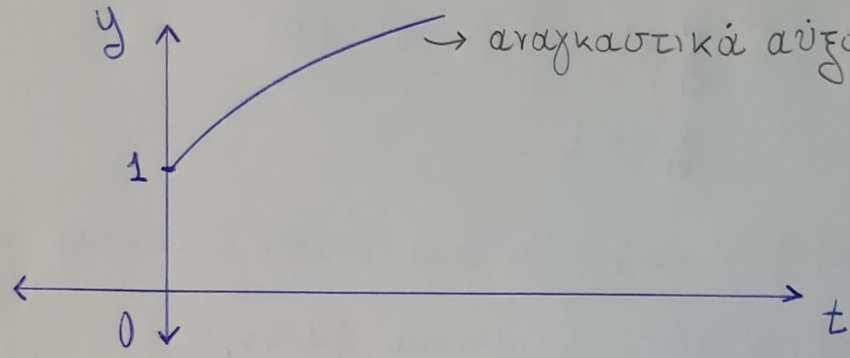
$f: [\alpha,\beta]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ και $|f(t,x)| \leq M$

Επιλέγω $[-1,1]\times[0,8]$ και άρα $0 \leq f(t,y) \leq 3$.

Θα βρω το διάστημα $[0,\beta^*]$ με $\beta^* = \min\left(1, \frac{8-1}{3}, \frac{1-0}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Μπορούμε να βρούμε λύση απο το θεώρημα στο διάστημα $[0, \frac{1}{3}]$.

β)



γ)

Έστω πως το μεγιστικό διάστημα είναι το $[0,T)$ $T<+\infty$. Πρέπει το,

$$\limsup_{t \to T^-} |y(t)| = +\infty \Rightarrow \lim_{t \to T^-} y(t) = +\infty.$$

$$\Rightarrow y'(t) \leqslant y^{1/3}(t) + T^2 \quad , \; t \in [0,T)$$

Στόχος, εδώ είναι να δω οτι αυτό μου απαγορεύει να έχω έκρηξη.

$$\frac{y'(t)}{y^{1/3}(t)+T^2} \leqslant 1$$

Είναι η $y'(t)$ ολ/ση για να μπορώ να ολ/σω το πιο πάνω;
Ναι, προκύπτει απο την ισότητα, διότι η y' είναι ιση με συνεχή συνάρτηση οπότε στα κλειστά μεγιστικά διαστήματα ολοκληρώνεται.

Οπότε, για $0<t<T$

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y^{1/3}(s)+T^2}\,ds \leqslant t$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{z^{1/2}-T^2}\,dz \leqslant t \quad , \forall\, t<T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{z^{1/3}+T^2}\,dz}_{=+\infty} \leqslant T$$

δ) Αν y φύση $y(t) \geqslant 1$

$f(t,y)$ με $y \in [1, \mu]$

1) Έχουμε $\delta>0$, $L\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\sigma:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ικανοποιεί:

$$\sigma'(t)\leq \delta^2+L\sigma(t)\ ,\ t>0$$

$$\Rightarrow \sigma(t)\leq\left(\frac{\delta^2}{L}+\sigma(0)\right)e^{Lt}-\frac{\delta^2}{L}\ ,\ t>0$$

Λύση:

$$\sigma'(t)-L\sigma(t)\leq\delta^2\ ,\ t>0$$

$$e^{-Lt}\left(\sigma'(t)-L\sigma(t)\right)\leq\delta^2e^{-Lt}\ ,\ t>0$$

αν η πληροφορία ήταν ($\geq$) θα παίρναμε την ανάποδη ανισότητα

$$\underbrace{e^{-Lt}\left(\sigma'(t)-L\sigma(t)\right)}_{\downarrow}$$

δεν ξέρω αν είναι ομαλή $\longrightarrow$ $$\left(e^{-Lt}\sigma(t)\right)'\leq\delta^2e^{-Lt}=\left(-\frac{\delta^2}{L}e^{-Lt}\right)'$$

$$\Longleftrightarrow \left(e^{-Lt}\left(\sigma(t)+\frac{\delta^2}{L}\right)\right)' \leq 0$$ το Θ.Μ.Τ εφαρμόζεται

$$e^{-Lt}\left(\sigma(t)+\frac{\delta^2}{L}\right) \leq e^{-L\cdot 0}\left(\sigma(0)+\frac{\delta^2}{L}\right), \quad t>0$$

$$\sigma(t)+\frac{\delta^2}{L} \leq \left(\sigma(0)+\frac{\delta^2}{L}\right)e^{Lt}$$

$$\sigma(t) \leq \left(\sigma(0)+\frac{\delta^2}{L}\right)e^{Lt}-\frac{\delta^2}{L}, \quad t>0$$

$$\begin{cases} \sigma'(t) \leq L\sigma(t)+\delta^2 \\ \sigma'(t)-L\sigma(t)-\delta^2 = \underbrace{g(t)}_{} \leq 0 \end{cases}$$

↳ δεν ξέρω αν ολλιεται

2) $\sigma: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής

$g: [0,+\infty) \to (0,+\infty)$

$$\sigma(t) \leq 1 + \int_0^t g(t)\sigma(t)\,ds, \quad \forall\ t \geq 0.$$

$$\Rightarrow \sigma(t) \leq e^{\int_0^t g(s)\,ds}, \quad t\geq 0$$

Λύση:

1ος τρόπος:

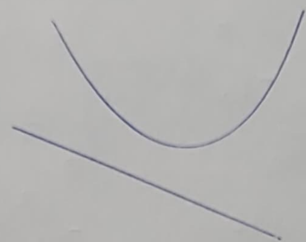
Αρχικά πολλ/ζω με $e^{-\int_0^t g(s)ds}$, $t>0$.

$$\Rightarrow \sigma(t)e^{-\int_0^t g(s)ds} \leq e^{-\int_0^t g(s)ds} + e^{-\int_0^t g(s)ds}\cdot\int_0^t g(t)\cdot\sigma(s)\,ds$$

Παρατηρήσεις:

i) Αν h, Q παραγωγίσιμες και $h(x) \leq Q(x)$
Μπορούμε να παραγωγίσουμε την πιο πάνω σχέση; (Όχι)

• Γεωμετρικά: (κλίσεις)



• Αλγεβρικά:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \quad , \quad \frac{Q(x)-Q(x_0)}{x-x_0}$$

Είναι μη-συγκρίσιμα και δεν περνάμε στο όριο.

ii) Αν $x > x_0$, όπου h, Q παραγωγίσιμες και $h(x_0) = Q(x_0)$
για $h(x) \leq Q(x)$,
Τότε, μπορώ να πω ότι,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{Q(x)-Q(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Longrightarrow h'(x_0) \leq Q'(x_0)$$

iii) Για $x < x_0$ έχω:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{Q(x)-Q(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Longrightarrow h'(x_0) \geq Q'(x_0)$$

Απο την σχέση:

$$\sigma(t)e^{-\int_0^t g(s)ds} \leq e^{-\int_0^t g(s)ds} + e^{-\int_0^t g(s)ds} \cdot \int_0^t g(t)\cdot\sigma(s)ds$$

Έχουμε ότι,

$$\sigma(t)e^{-\int_0^t g(s)ds} - e^{-\int_0^t g(s)ds}\int_0^t g(s)\sigma(s)ds \leq e^{-\int_0^t g(s)ds}$$

$$\xRightarrow[g(t)>0]{\text{πολ/ζω με}} g(t)\sigma(t)e^{-\int_0^t g(s)ds} - g(t)e^{-\int_0^t g(s)ds}\cdot\int_0^t g(s)\sigma(s)ds \leq g(t)e^{-\int_0^t g(s)ds}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t g(s)ds}\int_0^t g(s)\sigma(s)ds\right) \leq \frac{d}{dt}\left(-e^{-\int_0^t g(s)ds}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t g(s)ds}\left(\int_0^t g(s)\sigma(s)ds + 1\right)\right) \leq 0$$

$$e^{-\int_0^t g(s)ds}\left(\int_0^t g(s)\sigma(s)ds + 1\right) \leq 1 \quad , \quad t>0$$

$$\sigma(t) \leq 1 + \int_0^t g(s)\sigma(s)ds \leq e^{\int_0^t g(s)ds}$$

<u>2ος τρόπος:</u>

Θέτω, $F(t) = 1 + \int_0^t g(s)\sigma(s)ds, \quad t \geq 0$

$F: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

F είναι παραγωγίσιμη απο το Θ.Θ.Α.Λ.

όλα τα συνεχών είναι παραγωγίσιμο

$$F'(t) = g(t)\sigma(t) \quad , \quad t>0$$

$$\sigma(t) \leq F(t)$$

είμαι σε μια διαφορική ανίσωση τώρα και χρειάζομαι το πρόσημο της $g(t)$.

$$\frac{F'(t)}{g(t)} \leq F(t)$$

$$F'(t) \leq g(t)\,F(t) \quad , \quad t>0$$

Απο Gronwall:

$$\Rightarrow F(t) \leq \underbrace{F(0)}_{=1} e^{\int_0^t g(s)ds}$$

Οπότε,
$$F(t) \leq e^{\int_0^t g(s)ds}$$

$$\# \quad \sigma(t) \leq F(t) \leq e^{\int_0^t g(s)ds} \quad , t>0$$

$\blacksquare$

1/11/23

ΣΔΕ
- Φυλλάδιο 4 -

1) $y'(t) = 2t\sqrt{|y(t)|} + t^2 + e^t y^3(t)\ ,\ t>0$

$y(0) = 1$

για το μονοσήμαντο, πρέπει να δω αν ικανοποιείται τοπικά η συνθήκη Lipschitz.

Λύση:

$$y' = F(t, y(t))$$

$$F(t,x) - F(t,y) \overset{\text{Θ.Μ.Τ}}{=} (x-y)\frac{\partial F}{\partial y}(t,\xi)$$

Αν μπορώ να εφαρμόσω Θ.Μ.Τ.

$$|F(t,x) - F(t,y)| = \Big|(x-y)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(t,\xi)}_{\text{θέλουμε να είναι φραγμέν.}}\Big|$$

Σε $[\alpha, \beta]\times[c,d]$:

$$\text{Αν}\quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(t,x)\right| \leq M$$

Τότε ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz.

Εδώ, η συνάρτηση μας είναι:

$$F(t,y) = \underbrace{2t\sqrt{|y|}}_{\text{εδώ υπάρχει πρόβλημα διότι η } \sqrt{|y|} \text{, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.}} + t^2 + \overbrace{e^t y^3}^{\text{εδώ δεν υπάρχει πρόβλημα να την παραγωγίσω.}}$$

Η λύση μας ζει σε κάποιο διάστημα $(0,\cdot)$.

Παρατηρώ ότι $y'(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

Άρα, $y(t)$ είναι αύξουσα και $y(t) \geq y(0) = 1$

Οπότε, $F(t,y) : [0,+\infty) \times [1,+\infty)$

Στα φραγμένα $[0,A] \times [1,M]$ ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz για την F.

<u>Θεώρημα Μοναδικότητας:</u>

$$g' = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

και η f ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz τότε το πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση στο μεγιστικό της διάστημα. ∎

2) Αποδείξτε ότι η λύση του Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + 2\underbrace{\dfrac{y^2(t)+1}{y(t)+1}}_{>0}, & t>0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ορίζεται σε όλο το διάστημα $[0,+\infty)$ και μάλιστα ισχύει: $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

<u>Λύση:</u>

<u>1ος τρόπος:</u> $y' = t^2 + y(t) + 1 - \dfrac{4y(t)}{1+y(t)}$

$$\leq t^2+2(y(t)+1)$$

$$\Rightarrow e^{-2t}(y'-y) \leq (t^2+2)e^{-2t}$$

$$(e^{-2t}y(t))' \leq \left(\int_0^t (s^2+2)e^{-2s}\,ds\right)'$$

$$\left(e^{-2t}y(t)-\int_0^t (s^2+2)e^{-2s}\,ds\right)' \leq 0$$

$$e^{-t}y(t)-\int_0^t (s^2+1)e^{-s}\,ds \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \leq e^{2t}\int_0^t (s^2+2)e^{-2s}\,ds \quad , t>0$$

$\lim\limits_{t\to T^-} \sup|y(t)| = +\infty$, δεν έχουμε έκρηξη.

Οπότε, το μεγιστικό διάστημα είναι όλο το διάστημα.

<u>2ος τρόπος:</u>

Για $T>0$:

$$y'(t) \leq T^2 + 2\frac{y^2(t)+1}{\underbrace{y(t)+1}_{}} \quad , 0<t<T$$

$\hookrightarrow$ δεν μηδενίζεται

$$\frac{y'(t)}{T^2+2\frac{y^2(t)+1}{y(t)+1}} \leq 1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{y(t)} \frac{1}{T^2+2\,\frac{z^2+1}{z+1}}\,dz - t\right) \leq 0$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{(z+1)}{2(z^2+1)+T^2(z+1)}\,dz \leq t \quad , 0 \leq t \leq T$$

Αν περάσω στο όριο θα είχα:

$$\int_1^{\infty} \frac{z+1}{2(z^2+1)+T^2(z^2+1)}\,dz \leq \int_0^{\infty} \frac{(z+1)}{2(z^2+1)+T^2(z+1)}\,dz \leq T$$

$$\frac{1}{2+T^2}\int_0^{\infty} \frac{z+1}{z^2+1}\,dz \geq \frac{1}{T^2+1}\int_1^{\infty} \frac{1}{z+1}\,dz$$

Έχω έκρηξη, γι'αυτό μπορώ να περάσω στα όρια

$$\lim_{t\to T^-}\int_0^{y(t)} \frac{z+1}{2(z^2+1)+T^2(z+1)}\,dz \leq \lim_{t\to T^-} t$$

$$\Longleftrightarrow \quad +\infty = \int_0^{+\infty} \frac{z+1}{2(z^2+1)+T^2(z+1)}\,dz \leq T$$

Μπορώ να βρω το α: $\dfrac{\alpha}{z+1} \leq \dfrac{z+1}{z^2+1}$

$$\Rightarrow \alpha(z^2+1) \leq (z+1)^2$$

$$\Rightarrow \alpha z^2+\alpha \leq z^2+2z+1$$

$$\iff 0 \leqslant (1-\alpha)z^2 + 2z + \alpha$$

Για το όριο:

Η κλίση: $y'(t) = t + 2\dfrac{y^2+1}{y+1} \geqslant t^2$

$$\left(y(t) - \frac{t^3}{3}\right)' \geqslant 0 \quad , t > 0$$

$$y(t) - \frac{t^3}{3} \geqslant 0$$

$$y(t) \geqslant \boxed{\frac{t^3}{3}} \quad , t > 0$$

Το όριο είναι $+\infty$.

Οπότε, το $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

3) Να αποδείξω οτι η λύση του Π.Α.Τ,

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t^3 + 2ty^2(t) \ , \ t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ορίζεται σε κάποιο διάστημα της μορφής $[0,T]$ με $T < +\infty$ και μάλιστα έχουμε έκρηξη λύσης:

$$\lim_{t \to T^-} y(t) = +\infty .$$

Λύση:

VIP! Η έκρηξη θα προκύψει σε πεπερασμένο χρόνο απο το $y^2(t)$ (μη-γραμμικότητα).

Θα αποδείξουμε ότι η λύση εκρήγνυται.
Έστω, πως δεν αληθεύει.
Απο το θεώρημα η λύση ορίζεται σε όλο το διάστημα $[0,+\infty)$.

$$\begin{cases} y'(t) \geq 2t y^2(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Το $y'(t) \geq 1 \iff (y(t)-t)' \geq 0$

$$\iff y(t) \geq t$$

όπου η λύση ορίζεται στο $t \in [0,+\infty)$.
Γυρίζω στην ανισότητα:

$$y'(t) \geq 2t y^2(t) \quad , t>0.$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y^2(t)} \geq 2t$$

$$\left(-\frac{1}{y(t)}\right)' \geq (t^2)'$$

$$\left(-\frac{1}{y(t)} - t^2\right)' \geq 0$$

Έχω ότι το,

$$-\frac{1}{y(t)} - t^2 \geq -\left(\frac{1}{y(\delta)} + \delta^2\right) \quad , t \geq \delta > 0$$

$$\boxed{\frac{1}{y(\delta)} + \delta^2 - t^2 \geq \frac{1}{y(t)}} \quad , 0 < \delta \leq t$$

$\Longrightarrow$ Για $\delta < t < t_0$:

$$y(t) \geq \frac{1}{\frac{1}{y(\delta)} + \delta^2 - t^2}$$

έχω έκρηξη την χρονική στιγμή t_0.

$$\lim_{t \to t_0^-} \frac{1}{\frac{1}{y(\delta)} + \delta^2 - t^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{t \to t_0^-} y(t) = +\infty$$

Άτοπο! ∎

02/11/23

ΣΔΕ

- Φυλλάδιο 5 -

1) • Έστω $\sigma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

$$\sigma'(t) \leq 3\sigma(t) + 6\sigma^{2/3}(t) \ , \ t>0$$
$$\Rightarrow \sigma^{1/3}(t) \leq \left(\sigma^{1/3}(0)+2\right)e^{t} - 2 \ , \ t \geq 0$$

Λύση:

Συγκριτικό Θεώρημα:

• Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής, και $y, x : [t_0, T)$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο (t_0, T) με την f να ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \ t_0 < t < T$$
$$y(t_0) = y_0$$

και

$$x'(t) \leq f(t, x(t)) \ , \ t_0 < t < T$$
$$x(t_0) = x_0$$

Αν επιπρόσθετα, $x_0 \leq y_0$,
Τότε, $x(t) \leq y(t)$, $t \in [t_0, T)$.

Εν τέλει δεν θα χρειαστεί στη λύση της άσκησης διότι

Ορίζω, $f(t,y) := 3y + 6y^{2/3}$ (αχρήαστο). $\sigma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{e^{-3t}\left(\sigma'(t) - 3\sigma(t)\right)}_{:= \left(e^{-3t}\sigma(t)\right)'} \leq 6\sigma^{2/3}(t)e^{-3t}$$

$$:= \left(e^{-3t}\sigma(t)\right)' \leq 6\sigma^{2/3}(t)e^{-3t}$$

$e^{-3t}\sigma(t) = Q(t)$

$\Rightarrow \sigma(t) = e^{3t}Q(t)$

Οπότε, $Q'(t) \leq 6e^{-3t}$

Επομένως, $Q'(t) \leq 6e^{-3t}\left(e^{3t}Q(t)\right)^{2/3}$

$= 6e^{-3t}e^{2t}Q^{2/3}(t)$

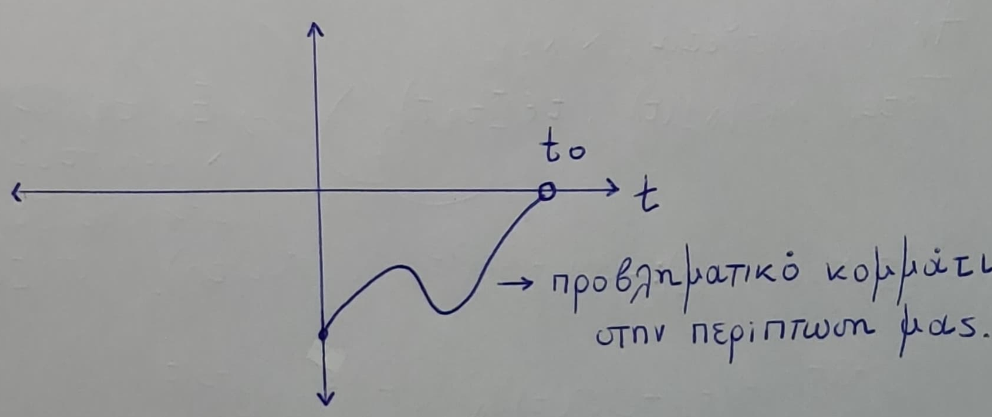
$= 6e^{-t}Q^{2/3}(t)$

Ουσιαστικά, έμεινε να δω τι ποσότητα είναι το $\sigma(t)+6\sigma^{2/3}(t)$.

$\longrightarrow \sigma^{1/3}(0)e^{t} + \underbrace{2(e^{t}-1)}_{\text{που παίρνει max και που min;}}$

$\sigma^{1/3}(0) \leq \sigma^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t} \leq \sigma^{1/3}(0) + 2$

Η e^{-t} είναι φθίνουσα με $(e^{-t})' = -e^{-t}$ γίνεται αύξουσα.



Οπότε, στην συνέχεια των προηγουμένων έχω ότι

$$\sigma^{1/3} = e^{t} Q^{1/3}$$

$$Q^{1/3}(t) \leq \left(Q^{1/3}(0) + 2\right) - 2e^{-t}$$

• <u>περ. 1η</u>:

$$Q^{1/3}(0) + 2 \leqslant 0$$

$$\Rightarrow Q^{1/3}(0) < -2 < 0$$

Δηλαδή, $Q^{1/3}(0) < 0$ και $Q^{1/3}(0) = 0$

με, $Q(t) < 0$ για $0 \leqslant t < t_0$

Για $t \in [0, t_0) \longrightarrow Q < 0$ (οπότε μένω μακρυά απο το προβληματικό σημείο).

$$\Rightarrow Q^{1/3}(t) \leqslant y^{1/3}(t) \quad , \ 0 \leqslant t < t_0$$

$$\begin{cases} y'(t) = 6e^{-t} y^{2/3}(t) \\ y(0) = Q(0) \end{cases}$$

$$\frac{y'(t)}{y^{2/3}(t)} = 6e^{-t}$$

$$y^{-2/3} y'(t) = 6e^{-t}$$

$$\left(3y^{1/3}\right)' = \left(-2e^{-t}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \left(y^{1/3}(t) + 2e^{-t}\right)' = 0$$

$$y^{1/3}(t) + 2e^{-t} = Q^{1/3}(0) + 2$$

$$\Rightarrow y^{1/3}(t) = Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t}$$

Άρα, από συγκριτικό θεώρημα:

$$Q^{1/3}(t) \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t} < 0 \quad \text{για } 0 \leq t < t_0.$$

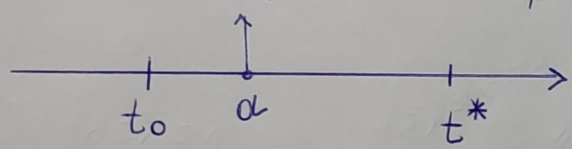
Στο t_0 έχουμε μηδέν. $(Q(t_0) = 0)$.

$$0 = Q^{1/3}(t_0) \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t_0}$$

Τώρα, θα ξεκινήσω την εκτίμηση από το t_0 και μετά.

Θέλω, $Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t^*} > 0$

$Q(t^*) > 0$, $t_0 \leq \alpha$ με $Q(\alpha) = 0$



Το (α, β), διάστημα τ.ω $Q(t) > 0$.

Οπότε, παίρνουμε: $Q_\varepsilon = Q + \varepsilon$ στο (α, β).

Επομένως, για $\varepsilon > 0$,

$$Q'_\varepsilon = Q' \leq 6e^{-t} Q^{2/3}(t)$$
$$\leq 6e^{-t} Q_\varepsilon^{2/3}(t) \quad \text{για } t \in (\alpha, \beta)$$

Στο (α, β) έχω $Q_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$

Σύμφωνα, με τα προηγούμενα,

$$y^{1/3}(t) + 2e^{-t} = y^{1/3}(\alpha) + 2e^{-\alpha}$$

$$y^{1/3} = \varepsilon^{1/3} + 2e^{-\alpha} - 2e^{-t}$$
$$\Rightarrow Q_\varepsilon(\alpha) = Q(\alpha) + \varepsilon = \varepsilon$$

Άρα, $Q_\varepsilon^{1/3} \leq \varepsilon^{1/3} + 2e^{-\alpha} - 2e^{-t}$

$$(\varepsilon + Q)^{1/3} \leq \varepsilon^{1/3} + 2e^{-\alpha} - 2e^{-t}$$

$$0 \leq Q^{1/3}(t) \leq 2(e^{-\alpha} - e^{-t}) \quad , t > \alpha$$

Η εκτίμηση που θέλαμε εμείς ήταν η:

$$Q^{1/3}(t) \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t}$$

Απομένει να συγκρίνουμε την ποσότητα,

$$2(e^{-\alpha} - e^{-t}) \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-\alpha}$$

Όμως το α είναι ένα μεταγενέστερο σημείο του t_0. $(t_0 \leq \alpha)$

Οπότε, προκύπτει

$$0 = Q^{1/3}(t_0) \leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-t_0}$$

$$\leq Q^{1/3}(0) + 2 - 2e^{-\alpha}$$

$\blacksquare$

2) Για $c \in \mathbb{R}$, εξετάστε το μονοσήμαντο των λύσεων

$$\begin{cases} y'(t) = -y^{1/3}(t), & t>0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

<u>Λύση:</u> <u>$1^{ος}$ τρόπος:</u>

Η $f(y) = -y^{1/3}$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε δεν είναι Lipschitz συνεχής.

Πρόχειρο:

- $f(y) = -y^{1/3}$ για $y \in [-1, 1]$

$$|f(y) - f(0)| \leq L|y - 0|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |y|^{1/3} \leq L|y| \;, \; y \neq 0$$

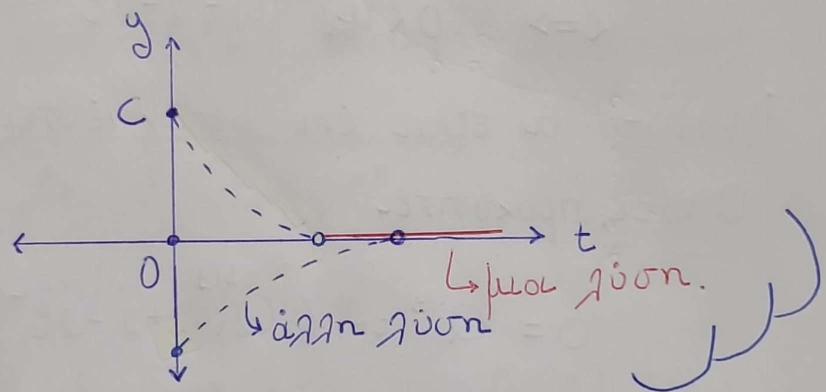
$$\Longleftrightarrow \quad 1 \leq L|y|^{2/3}$$

Αδύνατο

$$1 \leq 0$$

$$\lim_{y\to 0} |y|^{2/3} = 0$$

- για $c > 0$:



- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\underline{\underline{c > 0}}$: $y(0) = c > 0$

Απο τη συνέχεια της y στο 0, $\exists$ $[0, \delta)$ ώστε:

$$y(t) > 0 \;, \; \forall\, t \in [0, \delta)$$

Έστω $[0, T)$, το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα για το οποίο $y(t) > 0$ $\forall$ $t \in [0, T)$.

- Ερώτηση:

Υπάρχουν y_1, y_2 διακεκριμμένες λύσεις τ.ω

$$y_1 : [0, T_1) \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$y_2 : [0, T_2) \longrightarrow (0, +\infty)$$

που να λύνουν τη δ.ε με $y_1(0) = y_2(0) = c$;

$\longrightarrow$ Αν πάρουμε $0 < T < \min(T_1, T_2)$ στο διάστημα $[0, T]$

$$\exists\ 0 < t_1 \text{ τ.ω } y_1(t_1) \neq y_2(t_2)$$

- Ερώτηση:

Μπορεί το $t_1 \in [0, T_1) \cap [0, T_2)$;

$\longrightarrow$ Δηλαδή για $0 < t_1 < \min(T_1, T_2)$ στο διάστημα $[0, t_1]$ τ.ω $y_1(t_1) \neq y_2(t_1)$.

Η απάντηση είναι όχι.

Διότι, στο διάστημα έχουμε ότι

$$0 < m \leq y_1(t) \leq M$$

$$0 < m \leq y_2(t) \leq M$$

Η $f(y) = -y^{1/3}$ στο $y \in [m, M]$ είναι Lipschitz.

Οπότε, ισχύει το μονοσήμαντο.

$$\Longrightarrow y^{-1/3} y'(t) = -1 \quad \text{για } t \in [0, T)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{y^{2/3}(t)}{2/3} \right)' = (-t)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2} y^{2/3}(t) \right)' = 0$$

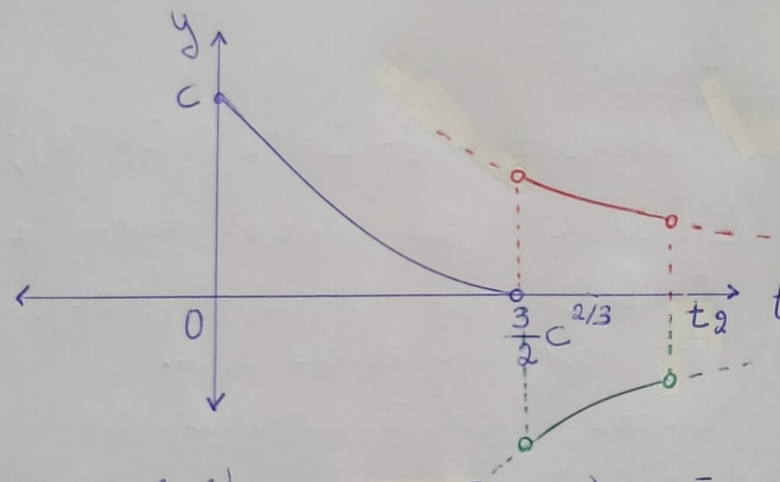
$$\frac{3}{2} y^{2/3}(t) + t = \frac{3}{2} c^{2/3}$$

$$\iff y^{2/3}(t) = c^{2/3} - \frac{2}{3} t$$

Επομένως η συνάρτηση μου μηδενίζεται αν:

$$c^{2/3} - \frac{2}{3} T = 0$$

$$\boxed{T = \frac{3}{2} c^{2/3}}$$



Μια λύση του προβλήματος $y : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ με τύπο:

$$y(t) := \begin{cases} \left(c^{2/3} - \frac{2}{3} t\right)^{3/2} & , \ t < \frac{3}{2} c^{2/3} \\ 0 & , \ t \geq \frac{3}{2} c^{2/3} \end{cases}$$

• <u>Ερώτηση</u>:

Υπάρχει άλλη λύση;

$\longrightarrow$ Αν υπήρχε θα έπρεπε να $\exists$ $t_2 > \frac{3}{2} c^{2/3}$ με $y(t_2) \neq 0$.

Θα δούμε ότι αποκλείεται αυτό το ενδεχόμενο.

i) Έστω πως $y_2(t_2)>0$.

$\Rightarrow \exists$ μέγιστο διάστημα $(\alpha,\beta)\ni t_2$ τ.ω
$y(t)>0 \quad , \forall\, t\in(\alpha,\beta)$

$$\frac{3}{2}y^{2/3}(t)+t=\frac{3}{2}y^{2/3}(t_2)+t_2$$

$$\Rightarrow y^{2/3}(t)=y^{2/3}(t_2)+\frac{2}{3}(t_2-t)$$

$$\Rightarrow y(t)=\left(y^{2/3}(t_2)+\frac{2}{3}(t_2-t)\right)^{3/2} \quad , 0\leqslant t<t_2$$

Τότε,
$$0=y\left(\frac{3}{2}c^{2/3}\right)=\left(y^{2/3}(t_2)+\frac{2}{3}\left(t_2-\frac{3}{2}c^{2/3}\right)\right)^{3/2}=0$$

ii) Έστω πως $y(t_2)<0$.

$\Rightarrow \exists\ (\alpha,\beta)\ni t_2$ τ.ω $y(t)<0 \quad \forall\, t\in(\alpha,\beta)$

$$y(t)=-\left(y^{2/3}(t_2)+\frac{2}{3}(t_2-t)\right)^{3/2} \quad , 0\leqslant t\leqslant t_2$$

Τότε $0=y\left(\frac{3}{2}c^{2/3}\right)=-\left(y^{2/3}(t_2)+\frac{2}{3}\left(t_2-\frac{3}{2}c^{3/2}\right)\right)^{3/2}$

Αντίστοιχα,

β) Αν $\underline{\underline{c<0}}$: υπάρχει μοναδική λύση $y:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$
με τύπο:
$$y(t)=\begin{cases}-\left(c^{2/3}-\frac{2}{3}t\right)^{2/3} & , 0\leqslant t<\frac{3}{2}c^{2/3}\\ 0 & , \frac{3}{2}c^{2/3}\leqslant t\end{cases}$$

2^{os} τρόπος:

Έστω y_1, y_2, δύο διακεκριμμένες λύσεις στο $[0,T]$.

Θέτουμε,

$$\sigma(t)=(y_1(t)-y_2(t))^2$$

$$\Rightarrow \sigma'(t)=2(y_1(t)-y_2(t))(y_1'(t)-y_2'(t))$$

$$=2(y_1(t)-y_2(t))(-y_1^{1/3}(t)+y_2^{1/3}(t))$$

$$=-2(y_1(t)-y_2(t))(y_1^{1/3}(t)-y_2^{1/3}(t))\leq 0$$

$$\Longrightarrow \sigma(t) \text{ φθίνουσα}$$

Οπότε, $\sigma(t)\leq \underbrace{\sigma(0)}_{:=0}$ για $t>0$

Άρα $\sigma(t)\equiv 0$. (Αντίφαση)

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & t>t_0 \\ y(t_0)=c \end{cases}$$

Αν η f ως προς τη δεύτερη μεταβλητή είναι φθίνουσα, ισχύει το μονοσήμαντο.

- Στα κλειστά διαστήματα $\alpha,\beta\in[m,M]$ και $t\in[\kappa,\lambda]$ Το συμπέρασμα μας δίνει την εξής συνθήκη:

$$\boxed{-(\alpha-\beta)(f(t,\alpha)-f(t,\beta))\leq L(\alpha-\beta)^2}$$

όπου $M\geq \alpha>\beta\geq m$ τ.ω $f(t,\beta)-f(t,\alpha)\leq L(\alpha-\beta)$

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής, $\varphi(t)>0 \ \forall t>0$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\varphi(t)}\,dt = +\infty.$$

\# f έχει την ιδιότητα $\forall \ \overbrace{[\alpha,6]}^{\ni t} \times \overbrace{[m,\mu]}^{\ni x,y}$

<u>Λύση.</u> $\exists\, k>0$ τ.ω $|f(t,x)-f(t,y)| \leq k\varphi(|x-y|)$

Για $x>0$: $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\alpha} \frac{1}{\varphi(t)}\,dt = +\infty$

$0 < m \leq \varphi(t) \leq \mu$ για $t \in [x,\alpha]$

$\frac{1}{m} \geq \frac{1}{\varphi(t)} \geq \frac{1}{\mu}$ οπότε $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$

·Εστω y_1, y_2 δύο διακεκριμένες λύσεις τ.ω $y_1(t_1) \neq y_2(t_1)$.

·Εστω $y_1(t_1) > y_2(t_1) \iff \overbrace{(y_1-y_2)}^{:=\sigma(t)}(t_1) > 0$.

·Εστω $t_1 \in (\alpha,\beta)$ το μεγιστικό διάστημα για το οποίο: $\sigma(t) = y_1(t)-y_2(t) > 0 \ \forall \ t \in (\alpha,\beta)$.

Ισχυρίζομαι ότι $\sigma(\alpha)=0$.

$\sigma(t)>0, \ \forall t>\alpha$

$\Rightarrow \lim_{t\to\alpha^+} \sigma(t) \geq 0$

$\begin{cases} \sigma(\alpha)>0 \longrightarrow \alpha>0 \\ \sigma(\alpha)=0 \end{cases}$ Αντίφαση, γιατί $\exists\, \delta>0 : (\alpha-\delta,\alpha+\delta) \quad \sigma(t)>0$

Τότε $\sigma : [\alpha, \beta) \longrightarrow [0, +\infty)$

Περιορίζω στο $\sigma : [\alpha, t_1] \longrightarrow [0, \mu]$

Οπότε,
$$\sigma'(t) = y_1'(t) - y_2'(t)$$
$$= f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))$$

από τη συνθήκη της εκφώνησης
$$\leq k\varphi(|y_1(t) + y_2(t)|)$$
$$= k\varphi(\sigma(t)) \quad , t \in [\alpha, t_1]$$

Επομένως έχω ότι:
$$\sigma'(t) \leq k\varphi(\sigma(t)) \quad , \alpha < t \leq t_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'(t)}{\varphi(\sigma(t))} \leq k \quad \text{για} \quad \alpha < t < t_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t)} \frac{1}{\varphi(\xi)} d\xi\right) = (kt)' \leq 0 \quad , t < t_1$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t)} \frac{1}{\varphi(\xi)} d\xi - kt\right)' \leq 0 \quad , t < t_1$$

$$\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t)} \frac{1}{\varphi(\xi)} d\xi - kt \geq -kt_1$$

$$\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t)} \frac{1}{\varphi(\xi)} \geqslant k(t-t_1)$$

$$\Rightarrow \quad -\int_{\sigma(t)}^{\sigma(t_1)} \frac{1}{\varphi(\xi)} \geqslant k(t-t_1)$$

Οπότε,

$$\lim_{t\to\alpha^+} \int_{\sigma(t)}^{\sigma(t_1)} \frac{1}{\varphi(\xi)}\, d\xi \leqslant \lim_{t\to\alpha^+} \left(-k(t-t_1)\right), \quad \alpha < t \leqslant t_1$$

$$+\infty \leqslant -k(\alpha - t_1)$$

Αδύνατο.

$$\int_{x}^{1/2} \frac{1}{t(-\ln t)^{\alpha}}\, dt$$

$$-\ln t = s \Rightarrow ds = -\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{-\ln x}^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)} -\frac{1}{s^{\alpha}}\, ds$$

$$= \int_{-\ln 1/2}^{-\ln x} \frac{1}{s^{a}}\, ds \longrightarrow \int^{\infty} \frac{1}{s^{a}}\, ds$$

Οπότε για $\alpha \leqslant 1$.

■

16/11/23

Φροντιστήριο 6
ΣΔΕ

1) $f=[0,+\infty)\to(0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(t)}dt<+\infty$$

Αποδείξτε ότι κάθε

$$y'(t)=f(y(t)),\quad t>0$$
$$y(0)=1$$

το μεγιστικό διάστημα είναι φραγμένο.

Λύση:

Έστω πως υπάρχει λύση y, που να ορίζεται στο $[0,+\infty)$.

Τότε έχουμε $y'(t)=f(y(t))>0$

όπου $y\uparrow$ και $y(0)=1$

και $y(t)\geq 1\quad,\ \forall\ t\in[0,+\infty)$

Επομένως, $\dfrac{y'(t)}{f(y(t))}=1$

$\xrightarrow{\text{ολ/ρω}}$ $$\int_0^t\frac{y'(s)}{f(y(s))}ds=s$$

θέτω $x=y(s)$ $\Rightarrow$ $$\int_1^{y(t)}\frac{1}{f(x)}dx=t$$

Τότε όμως θα έπρεπε να ισχύει ότι:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx = \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

Διακρίνω περιπτώσεις:

i) $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \mu < +\infty$

Τότε θα είχαμε $\int_1^{\mu} \frac{1}{f(x)}\,dx = +\infty$ Αδύνατον!

ii) $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx = +\infty$ Αδύνατον!

Ευθεία Απόδειξη:

Αφού $\int_1^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx = t$

Αν επιλέξουμε: $t_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx < +\infty$,

Τότε, $\lim_{t \to t_1^-} \int_1^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx = \lim_{t \to t_1} t_1$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \to t_1^-} y(t) = +\infty}$$

2) $f:[0,+\infty) \to (0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx < +\infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t) = 2(1+t)f(y(t)) + t^2, & t>0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Το μεγιστικό διάστημα είναι φραγμένο.

<u>Λύση</u>: (Απόδειξη)

Έστω πως υπάρχει λύση με μεγιστικό διάστημα το $[0,+\infty)$.

Τότε επειδή $y'(t) \geq 2(1+t)f(y(t)) > 0$

$$\Rightarrow y(t) \uparrow \text{ με } y(t) > y(0) = 0 \quad , t>0.$$

Οπότε, $\dfrac{y'(t)}{f(y(t))} > 2(1+t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx - (1+t)^2\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx - (1+t)^2 \geq \underbrace{\int_0^{y(0)} \frac{1}{f(x)}\,dx}_{=0} - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx \geq (1+t)^2 - 1$$
$$= t(t+2)$$
$$> t^2$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_0^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx = +\infty$$

Όμως $y(t) < +\infty$

$$+\infty = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_0^{y(t)} \frac{1}{f(x)}\,dx \right) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx < +\infty$$

<u>Αντίφαση</u>! $\blacksquare$

<u>Άσκηση:</u>

Ίδιες υποθέσεις.

Έστω,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx = +\infty$$

ορίζεται στο $[0,+\infty)$ και μάλιστα

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

23/11/23

ΣΔΕ

- Φυλλάδιο 7 -

1)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)+3$$

$$= \lambda^2-4+3$$

$$= \lambda^2-1$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)$$

- ιδιοτιμή : 1

  ιδιοδιάνυσμα: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=\alpha \\ 3\alpha-2\beta=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \beta=\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια λύση είναι : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{1 \cdot t}$

- στην ιδιοτιμή $\lambda=-1$:

ιδιοδιάνυσμα: $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2c-d=-c \\ 3c-2d=-d \end{cases} \Longleftrightarrow d=3c$$

$$\begin{bmatrix} c \\ 3c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μια δεύτερη λύση είναι: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$

Η γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$
$$y(t) = c_1 e^{t} + 3c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

■

2)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)+4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$
$$= (\lambda-1)^2$$

- ιδιοτιμή: 1

ιδιοδιάνυσμα: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = \alpha \\ 2\alpha - \beta = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \alpha$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ λύση : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$.

Γενικευμένο Ιδιοδιάνυσμα: (διότι δεν μπορώ να βρω ιδ/νυσμα)

Ψάχνουμε λύση στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^t(\vec{u} + t\vec{v})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = e^t(\vec{u} + t\vec{v}) + e^t\vec{v}$$

$$\cancel{e^t}(\vec{u} + t\vec{v}) + \cancel{e^t}\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}(\cancel{e^t}(\vec{u} + t\vec{v}))$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + t\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\vec{u} + t\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\vec{v}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\vec{u} = \vec{u} + v$$

Επιλέγω, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha - 2b &= \alpha + 1 \\ 2\alpha - 1\cdot b &= b + 1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(\alpha - b) = 1 \\ 2(\alpha - b) = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1/2 , \ b = 0$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η δεύτερη λύση είναι:

$$\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{t} = \begin{bmatrix} 1/2 + t \\ t \end{bmatrix} e^{t}$$

Η γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1/2 + t \\ t \end{bmatrix} e^{t} \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{t}\left(c_1 + c_2\left(1/2 + t\right)\right)$$
$$y(t) = e^{t}\left(c_2 + c_2 t\right)$$

$\blacksquare$

3)

$$x'(t) = 4x + y + z$$
$$y'(t) = -2x + y - z$$
$$z'(t) = \frac{13}{2}x - \frac{5}{2}y - z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -13/2 & -5/2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftarrow r_2 + r_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

κοινός παράγ: $(2-\lambda)$ από τη 2η γραμμή

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$r_1 \leftarrow r_1 - r_2$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3-\lambda & -5/2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((\lambda-3)(\lambda+1)+4\right)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

- ιδιοτιμή: 1

ιδιοδιάνυσμα: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -13/2 & -5/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+\beta+\gamma=\alpha \\ -2\alpha+\beta-\gamma=\beta \\ -\frac{13}{2}\alpha-\frac{5}{2}\beta-\gamma=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta=-\alpha \\ \gamma=-2\alpha \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ $\longrightarrow$ Ο ιδιόχωρος έχει βάση 1.

Μία λύση: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$

Το ιδιοδιάνυσμα θα είναι στη μορφή:

$$e^t(\vec{u} + t\vec{v})$$

Οπότε,

$$(e^t(\vec{u} + t\vec{v}))' = e^t(\vec{u} + t\vec{v}) + e^t\vec{v}$$

$$= Ae^t(\vec{u} + t\vec{v})$$

$$\begin{cases} A\vec{u} = \vec{u} + \vec{v} \quad (1) \\ A\vec{v} = \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Όσο για το $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta + \gamma = \alpha + 1 \\ -2\alpha + \beta - \gamma = \beta - 1 \\ -\frac{13}{2}\alpha - \frac{5}{2}\beta - \gamma = \gamma - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \\ \frac{13}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -2\alpha \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

Τότε η $\overset{(2^{\eta})}{\text{λύση}}$ μας θα είναι της μορφής:

$$c_1 e^t\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}e^t$$

την 3^{η} λύση σπίτι!

$\vdots$

28/11/23

ΣΔΕ

- Φυλλάδιο 8 -

1)

$$x'(t) = x(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right)$$
$$y'(t) = y(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right)$$
$$x(0) = c_1 \ , \ y(0) = c_2$$

Ορίζεται $\forall \ t \geqslant 0$.

Ειδικότερα αν $c_1^2 + 2c_2^2 > 0$

Τότε $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(x^2(t) + 2y^2(t)\right) = 1$

<u>υπόδ:</u> $\sigma(t) = x^2(t) + 2y^2(t)$

<u>Λύση:</u>

$$\sigma'(t) = 2x(t)x'(t) + 4y(t)y'(t)$$
$$= 2x^2(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right) + 4y^2(t)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right)$$
$$= 2\left(x^2(t) + 2y^2(t)\right)\left(1 - x^2(t) - 2y^2(t)\right)$$
$$= 2\sigma(t)\left(1 - \sigma(t)\right) \quad , \ t \geqslant 0$$

· Έστω, πως η λύση να ορίζεται για όλους τους χρόνους
Οπότε θα υπάρχει $T > 0$,
Η λύση ορίζεται στο $[0, T)$ και

$$\lim_{t \to T^-} \left(|x(t)|\right) = +\infty$$

Επειδή,

$$\frac{1}{2}\left(x^2(t)+2y^2(t)\right) \leqslant x^2(t)+y^2(t) \leqslant x^2(t)+2y^2(t)=\sigma(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma(t) \leqslant x^2(t)+y^2(t) \leqslant \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to T^-}(\sigma(t))=+\infty$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Για $0\leqslant t<T$ και $\sigma(0)(1-\sigma(0))=0$,

i) $\sigma(0)=0$

ii) $\sigma(0)=1$

iii) $0<\sigma(0)<1$

iv) $\sigma(0)>T$

i) Εάν $\sigma(0)=0 \iff c_1^2+2c_2^2=0$

$$\iff c_1=c_2=0$$

Τότε, μια λύση του συστήματος είναι: $\begin{cases} x(t)\equiv 0 \\ y(t)\equiv 0 \end{cases}$, $t\geqslant 0$,

που ορίζεται $\forall\, t\geqslant 0$. (Αντίφαση).

Είναι και η μοναδική λύση του προβλήματος διότι

για,

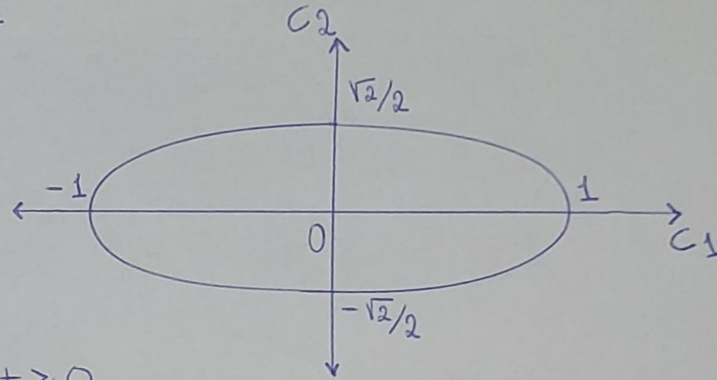
$$\vec{f}(t,x,y):=\begin{pmatrix} x(1-x^2-2y^2) \\ y(1-x^2-2y^2) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1-x^2-2y^2-2x^2 & -4xy \\ -2xy & (1-x^2-2y^2-2y^2) \end{pmatrix}$$

είναι φραγμένη όταν $x, y \in [-A, A]$.

ii) $\sigma(0)=1 \iff c_1^2+2c_2^2=1$



$$\begin{cases} \sigma'(t)=2\sigma(t)(1-\sigma(t)) \\ \sigma(0)=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma(t) \equiv 1 \ , t \geq 0.$

Οπότε, $x^2(t)+2y^2(t) \equiv 1 \ , t \geq 0.$

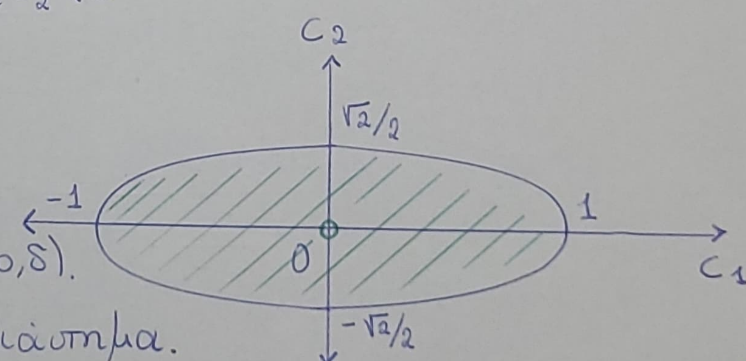
Άρα, η λύση ορίζεται $\forall t \geq 0$. (Αντίφαση)

iii) $0<\sigma(0)<1 \iff 0<c_1^2+2c_2^2<1$

Η σ είναι συνεχής στο 0.

Οπότε,

$\exists \ \delta>0 : 0<\sigma(t)<1 \ , t \in [0, \delta).$



παίρνουμε το μέγιστο δυνατό διάστημα.

$$0<\sigma(t)<1 \ , t \in [0, T_1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)(1-\sigma(t))}=2$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)(1-\sigma(s))} ds = 2t$$

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \frac{1}{z(1-z)}\,dz = 2t$$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1-z+z}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = 2t$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln z - \ln(1-z)\right)\Big|_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} = 2t$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)\Big|_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} = 2t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sigma(t)}{1-\sigma(t)}\right) - \ln\left(\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)}\right) = 2t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{\sigma(t)}{1-\sigma(t)}}{\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)}}\right) = 2t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sigma(t)}{1-\sigma(t)}}{\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)}} = e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma(t)}{1-\sigma(t)} = \frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)}\, e^{t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma(t) = \frac{\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} e^{t}}{1+\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} e^{t}}$$

$$\Longrightarrow \quad 0<\sigma(t)<1 \quad , t \geqslant 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 1$$

iv) $\sigma(0)>1 \Longleftrightarrow c_1^2+2c_2^2=1$

Θα δουλέψουμε όπως πριν.
Δηλαδή,

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \frac{1}{z(1-z)}\, dz = 2t$$

άλλαξε

$$\Longleftrightarrow \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) dz = 2t$$

$$\vdots$$

$$\frac{\frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-1}}{\frac{\sigma(0)}{\sigma(0)-1}} = e^{2t}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sigma(t)}{\sigma(t)-1} = \frac{\sigma(0)}{\sigma(0)-1} e^{2t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma(t) = \frac{\frac{\sigma(0)}{\sigma(0)-1} e^{2t}}{\frac{\sigma(0)}{\sigma(0)-1} e^{2t} - 1}$$

$$e^{2t} = \frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)}^{<1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)}\right) < 0$$

$$\Longrightarrow 1 < \sigma(t) \quad , \forall\, t \geq 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = 1$$

2) $A : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ποιά ιδιότητα, να ικανοποιούν οι συνθήκες $A(t), B$ ώστε η λύση του Π.Α.Τ:

$$X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t) \quad , t \geq 0$$

$$X(0) = B$$

για $X : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, να είναι ανεξάρτητη του χρόνου;

<u>Λύση:</u>

Η λύση, θα πρέπει να είναι $X(t) \equiv B \quad , t \geq 0$.

$$\Longrightarrow X'(t) = 0$$

Η δ.ε δίνει:

$$0 = A(t)B - BA(t) \quad , \forall\, t > 0.$$

$$\Rightarrow A(t)B = BA(t) \quad , \forall t>0$$

Ορίζουμε, $\vec{f}(t,x) = A(t)x - xA(t)$

Παίρνοντας νόρμα: $\|\vec{f}(t,x) - \vec{f}(t,y)\| = \|A(t)(x-y) - (x-y)A(t)\|$

$$\leq \|A(t)(x-y)\| + \|(x-y)A(t)\|$$

$$\leq \|A(t)\| \|x-y\| + \|x-y\| \|A(t)\|$$

$$= 2\|A(t)\| \|x-y\|$$

(για $t \in [A,B]$, L) $\leq 2\sup \|A(t)\| \|x-y\|$

3) $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad , \forall t,s \in \mathbb{R}$

α) $A(t)\cdot \int_0^s A(\sigma)d\sigma = \int_0^s A(\sigma)d\sigma \cdot A(t)$

β) P, Q πολυώνυμα

$$P(A(t))Q\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right) = Q\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)P(A(t))$$

γ) αν A παραγ.:

$$A(t)A'(s) = A'(s)A(t)$$

Λύση:

α) Πρέπει να περιγράψουμε το $\int_0^s A(\sigma)\,d\sigma$

Έστω,

$$P := \{0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = s\} \quad \text{με } \xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$$

Ορίζουμε $\delta := \max\limits_{1 \leq i \leq n} (s_i - s_{i-1})$

και

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) = \int_0^s A(\sigma)\,d\sigma$$

$$\lim_{\delta \to 0} A(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) =$$

$A(t)A(\xi_i) = A(\xi_i)A(t)$ (*) για $i = 1, \ldots, n$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) \cdot A(t)$$

$$\Rightarrow A(t) \cdot \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) \overset{(*)}{=} \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) \cdot A(t)$$

β) Έστω P, Q πολυώνυμα τ.ω

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \quad \text{και} \quad Q(x) = \sum_{l=0}^{\mu} b_l x^l, \quad k, l \in \mathbb{N}$$

Επίσης,

$$P(A(t)) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k(t)$$

$$Q\left(\int_0^s A(\sigma)\,d\sigma\right) = \sum_{l=0}^{\mu} b_l \left(\int_0^s A(\sigma)\,d\sigma\right)^l \quad \text{, όπου } k, l \in \mathbb{N}$$

Αν,

$$A^{k}(t)\left(\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell} = \left(\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell} A^{k}(t)\right.\right., \text{ όπου } k, \ell \in \mathbb{N}$$

- $A^{k}(t) = \overbrace{A(t)\cdot \cdots \cdot A(t)}^{\kappa \text{ φορές}}$

- $\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell} = \overbrace{\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)\cdot \cdots \cdot\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)}^{\ell \text{ φορές}}$

$$P(A(t))\,Q\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k A^{k}(t)\right)\cdot\left(\sum_{\ell=1}^{\mu} b_\ell \left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell}\right)$$

$$= \sum\sum a_k A^{k}(t)\cdot b_\ell\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell}$$

$$= \sum\sum b_\ell\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)^{\ell} a_k A^{k}(t)$$

$$= Q\left(\int_0^s A(\sigma)d\sigma\right)\cdot P(A(t)).$$

γ) $A(t)\cdot A'(s) = A'(s)A(t)$

Γνωρίζω την ιδιότητα: $A(t)A(s) = A(s)A(t)$

Οπότε θα εμφανίσω την παράγωγο:

$\rightarrow A(t)A(s_1) = A(s_1)A(t)$

$A(t)A(s_2) = A(s_2)A(t)$

$$\Rightarrow \lim_{s_2\to s_1} A(t)\frac{(A(s_1)-A(s_2))}{s_1-s_2} = \frac{(A(s_1)-A(s_2))}{s_1-s_2}A(t)$$

$$\Rightarrow A(t)\cdot A'(s_1) = A'(s_1)A(t)$$

07/12/23

ΣΔΕ
— Φυλλάδιο 9 —

1) Να βρεθεί η γενική λύση $\vec{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2\times 1}$

$$\vec{x}\,'(t)=\begin{bmatrix} 2t & \cos t \\ 0 & 2t \end{bmatrix}\vec{x}(t) \quad , t\in\mathbb{R}$$

Λύση:

$$\vec{x}\,'=A(t)\,\vec{x}(t)$$

Αν $A(t)A(s)=A(s)A(t)$

$$\Rightarrow \vec{x}(t)=e^{\int_0^t A(s)\,ds}\,\vec{x}(0)$$

Οπότε,

$$A(t)A(s)=\begin{bmatrix} 2t & \cos t \\ 0 & 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2s & \cos s \\ 0 & 2s \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4st & 2t\cos s+2s\cos t \\ 0 & 4st \end{bmatrix}$$

$$=A(s)A(t).$$

Πριν περάσουμε στο εκθετικό, πρέπει πρώτα να βρούμε το ολ/μα:

$$\int_0^t A(s)\,ds=\begin{bmatrix} \int_0^t 2s\,ds & \int_0^t \cos s\,ds \\ 0 & \int_0^t 2s\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 & \sin t \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow e^{\int_0^t A(s)ds} = e^{\begin{bmatrix} t^2 & \sin t \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t^2 & \sin t \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= t^2 I_2 + \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ μηδενοδύναμος πίνακας

$Y(t) = A(t) + B(t)$

$e^Y = e^{B(t)+\Gamma(t)} \overset{?}{=} e^{B(t)} e^{\Gamma(t)}$ • $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Ναι, αν $B(t)\Gamma(t) = \Gamma(t)B(t)$

Πρέπει, $B(t) = t^2 I_2$

$\Gamma(t) = \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B(t)\Gamma(t) = \Gamma(t)B(t)$

ισχύει.

και επομένως,

$$e^{Y(t)} = e^{B(t)} \cdot e^{\Gamma(t)}$$

$$= e^{t^2 I_2} \cdot e^{\sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$e^{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \frac{\sin^k t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k}{}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{t^2 I_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} I_2^k}{k!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} \right) I_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} I_2$$

$$= e^{t^2} I_2.$$

$$\Longrightarrow e^{\int_0^t A(s)ds} = \left(e^{t^2} I_2\right) \begin{bmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t^2} & e^{t^2}\sin t \\ 0 & e^{t^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t^2} & e^{t^2}\sin t \\ 0 & e^{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t^2}(C_1 + C_2 \sin t) \\ C_2 e^{t^2} \end{bmatrix}$$

Οπότε,

$$\begin{cases} x(t) = e^{t^2}(C_1 + C_2 \sin t) \\ y(t) = C_2 e^{t^2} \end{cases}$$

$\blacksquare$

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$, $\vec{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\vec{x}\,''(t) = A^2\vec{x}(t)$$
$$\vec{x}(0) = \vec{C}_1$$
$$\vec{x}(0) = \vec{C}_2$$

A^{-1}, $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$

<u>Λύση:</u>

$$\vec{y}(t) = \vec{x}\,'(t) \longrightarrow \vec{x}\,'(t) = \vec{y}(t)$$
$$\vec{y}\,'(t) = \vec{x}\,''(t) = A^2\vec{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix}\vec{x}(t)\\ \vec{y}(t)\end{bmatrix} : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{(2n)\to 1}$$

Τότε, $$\begin{bmatrix}\vec{x}(t)\\ \vec{y}(t)\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}\vec{x}\,'(t)\\ \vec{y}\,'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{y}(t)\\ A^2\vec{x}(t)\end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}0 & I_n\\ A^2 & 0\end{bmatrix}}_{\text{σταθερός (αφού δεν εξαρτάται απο το } t\text{).}}\begin{bmatrix}\vec{x}(t)\\ \vec{y}(t)\end{bmatrix}$$

Το θέτω $z' = B\vec{z}$,

με αρχικές συνθήκες: $\begin{bmatrix}\vec{x}(0)\\ \vec{y}(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{C}_1\\ \vec{C}_2\end{bmatrix}$

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!}$$

Αφού,
$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^2 \\ A^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 & A^2 \\ A^4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^4 & 0 \\ 0 & A^4 \end{bmatrix}$$

Τώρα μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τις δυνάμεις του πίνακα.

για $k \in \mathbb{N}$,

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}^{2k} = \begin{bmatrix} A^{2k} & 0 \\ 0 & A^{2k} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A^2 & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{2k} \\ A^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B^{2k}}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} \begin{bmatrix} A^{2k} & 0 \\ 0 & A^{2k} \end{bmatrix}}{(2k)!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix}$$

Θέλω, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!}$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (At)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow e^{At} + e^{-At} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{2k!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{2k!} = \frac{1}{2}\left(e^{At} + e^{-At}\right)$$

$$\rightarrow \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$\rightarrow \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \sinh t$$

3) $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha(t)y(t) \\ y'(t) &= \alpha(t)x(t) \end{aligned} \quad \dot{\eta} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha(t) \\ \alpha(t) & 0 \end{bmatrix}}_{:= A(t)} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

<u>Λύση:</u>

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(t) \\ \alpha(t) & 0 \end{bmatrix} = \alpha(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(t)A(s) = a(t)a(s)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = a(s)A(t) \quad , \forall\, t,s \in \mathbb{R}$$

- $$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{\int_0^t A(s)ds} \cdot \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \int_0^t A(s)ds = \int_0^t \begin{vmatrix}0 & a(s)\\ a(s) & \end{vmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix}0 & \int_0^t a(s)\,ds\\ \int_0^t a(s)ds & 0\end{bmatrix}$$

$$= \int_0^t a(s)ds \cdot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow e^{\int_0^t A(s)ds} = e^{\int_0^t a(s)ds \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t a(s)ds \cdot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^k}{k!}$$

$$= \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t a(s)ds\right)^{2k} \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^{2k}}{(2k)!}}^{(1)} + \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t a(s)ds\right)^{(2k+1)} \cdot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{(2k+1)}}{(2k+1)!}}^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k} = I_2 \, , k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)^{2k} \cdot I_2}{(2k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)^{2k}}{(2k)!} \cdot I_2$$

$$= \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \cdot I_2$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & 0 \\ 0 & \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \end{bmatrix}$$

$\Sigma.\Sigma.$: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

$\Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$$(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)^{2k+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \\ \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\xRightarrow{(1)+(2)} e^{\int_0^t \alpha(s)ds} = \begin{bmatrix} \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \\ \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \\ \sinh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) & \cosh\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι της μορφής:

$$x(t) = c_1 \cosh \int_0^t \alpha(s)ds + c_2 \sinh \int_0^t \alpha(t)ds$$

$$y(t) = c_1 \sinh \int_0^t \alpha(s)ds + c_2 \cosh \int_0^t \alpha(s)ds$$

$\blacksquare$

14/12/23

ΣΔΕ
— Φυλλάδιο 10 —
Πρόοδος

Θέμα 1:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Λύση:

Ο πίνακας είναι σταθερός και λύνεται με δύο μεθόδους:

i) Μέθοδος Ιδιοδιανυσμάτων ⟶ Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα.

ii) Εκθετικός πίνακας (e^{At}).

Ας ακολουθήσουμε την πρώτη μέθοδο όπου είναι πιο απλή.

Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Τότε η παράγωγος είναι:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

και αν αντικαταστήσω στο σύστημα, θα πάρει τη μορφή:

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \lambda I_2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πρέπει $\det(A-\lambda I_2)=0$

$$-(3+\lambda)(1-\lambda)+4=0$$

$$(\lambda+1)^2=0$$

$\boxed{\lambda=-1}$, ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2.

Αν $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1,

Τότε,

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3\alpha+\beta = -\alpha \\ -\alpha+\beta = -\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = 2\beta$$

$$\begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια λύση του γραμμικού συστήματος είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Για τη δεύτερη λύση, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-t}(\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = -e^{-t}(c_1 + t\vec{c}_2) + e^{-t}\vec{c}_2$$

και πρέπει για να είναι λύση:

$$-\cancel{e^{-t}}(\vec{c}_1 + t\vec{c}_2) + e^{-t}\vec{c} = \cancel{e^{-t}} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)$$

$$-\vec{c}_1 + \vec{c}_2 - t\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c}_1 + t \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c}_2$$

$$\iff \begin{cases} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c}_1 = -\vec{c}_1 + \vec{c}_2 \\ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c}_2 = -\vec{c}_2 \end{cases}$$

$\vec{c}_2$: ιδιοδιάνυσμα, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{c}_2$ και $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \gamma \\ 1 - \delta \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -3\gamma + 4\delta = 2 - \gamma \\ -\gamma + \delta = 1 - \delta \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2\gamma + 4\delta = 2 \\ -\gamma + 2\delta = 1 \end{bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow \quad \gamma = -1 + 2\delta$

$\Longrightarrow \delta = 0 \,,\, \gamma = -1 \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Οπότε έχουμε ότι η δεύτερη λύση είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 2t-1 \\ t \end{bmatrix}$$

Γενική Λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 2t-1 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{για } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

Θέμα 2:

$$y'(t) = -y^2(t) + t^2 + 1 \quad , t > 0$$
$$y(0) = 0$$

α) Αποδείξτε πως έχει τοπική λύση.

β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων στο διάστημα υπαρξής λύσης.

γ) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης

$$y(t) < (t^2+1)^{1/2} \,,\ \forall\, t \geq 0$$

δ) Η λύση ορίζεται $\forall\, t \geq 0$.

Λύση:

α) <u>Θεώρημα Peano:</u>

$f:[\alpha,\beta]\times[c,d]\longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $|f(t,x)|<M$.

$$\Longrightarrow \begin{matrix} y'(t)=f(t,y(t)) \;,\; t>t_0 \\ y(t_0)=y_0 \end{matrix}$$

όπου $t_0\in[\alpha,\beta)$ και $y_0\in(c,d)$

VIP!

$\Longrightarrow$ Το Π.Α.Τ έχει λύση στο $[t_0,\beta^*]$ όπου,

$$\beta^*=\min\left(\beta,\ t_0+\frac{y_0-c}{M},\ t_0+\frac{d-y_0}{M}\right).$$

Στην περίπτωση μας επιλέξουμε: $f(t,x)=-x^2+t^2+1$

με $f:[-1,1]\times[-1,2]$.

πρέπει να τα διαλέξω σωστά. ← VIP!

Τότε,

$$|f(t,x)|=|-x^2+t^2+1|$$
$$\leq |x|^2+t^2+1$$
$$\leq 4+1+1=6 \rightarrow \text{απόλυτο φράγμα}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Peano έχουμε ότι:

$$\beta^*=\min\left(1,\ 0+\frac{0-(-1)}{6},\ 0+\frac{2-0}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \beta^*=\min\left(1,\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

$\Longrightarrow$ Ένα διάστημα που έχει λύση είναι το $[0,\frac{1}{6}]$.

β) Για το μονοσήμαντο των λύσεων, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα που λέει:

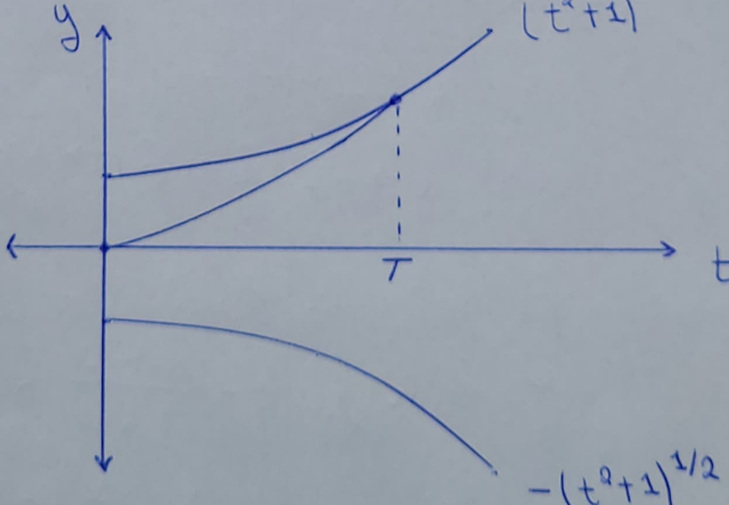
"Αν η f ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, τότε η λύση είναι μοναδική"

Οπότε, διαλέγω αυθαίρετα το $\underbrace{[0,\beta]}_{\in t} \times \underbrace{[c,d]}_{\in x,y}$ και απαιτώ μόνο $\beta>0$ και $c<d$.

$$\Longrightarrow |f(t,x)-f(t-y)| = |-x^2+t^2+1-(-y^2+t^2+1)|$$
$$= |x-y||x+y|$$
$$\leq |x-y|(|x|+|y|)$$
$$\leq 2(|d|+|c|)\,|x-y|$$

$c<x<d$
$|x|\leq |d|+|c|$

γ) $y'(t) = -y^2(t)+t^2+1$



Θα αποδείξουμε ότι:

$$\boxed{y^2(t) < t^2+1} \quad (*)$$

Για κατάλληλη επιλογή $\delta>0$, έχουμε ότι:

$$y^2(t) < t^2+1 \quad t\in[0,\delta)$$

λόγω συνέχειας της y και της t^2+1 στο 0.

Επιλέγω, το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $[0,T)$ ώστε

$$y^2(t) < t^2+1 \ , \ \forall\ t\in[0,T).$$

Έστω $T<+\infty$.
Τι θα μπορεί να συμβεί στο T;

→ Αναγκαστικά, πρέπει $y^2(T)=T^2+1$ τότε όμως από τη Δ.Ε

$$y'(T)=0.$$

Έχουμε όμως ότι,

$$\begin{aligned} y^2(t) &< t^2+1 \\ y^2(T) &= T^2+1 \end{aligned} \quad , \ t<T$$

$$\Rightarrow y^2(t)-y^2(T) < t^2-T^2 \qquad t-T \text{ : αρνητικό}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2(t)-y^2(T)}{t-T} > \frac{\cancel{(t-T)}(t+T)}{\cancel{t-T}}$$

$$\lim_{t\to T^-}\frac{y^2(t)-y^2(T)}{t-T} \geq \lim_{t\to T^-}(t+T)$$

$$y'(T)(2y(T)) \geq 2T>0$$

$\Rightarrow y'(T)>0$ Αντίφαση

↳ στο ότι τέμνει το γράφημα αυτής της συνάρτησης.

∎

Θέμα 4:

$$x' = x(1+x^2+y^2)$$
$$y' = y(1+x^2+y^2) \quad , t>0 \quad (1)$$
$$x(0)=c_1 \ , y(0)=c_2$$

Η λύση **ΔΕΝ** ορίζεται $\forall\ t\geq 0$ εάν $c_1^2+c_2^2>0$.

Λύση:

$$\sigma(t)=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \sigma'(t)=2xx'+2yy'$$
$$=2x^2(1+\sigma)+2y^2(1+\sigma)$$
$$=2\sigma(1+\sigma) \quad \Rightarrow \sigma(0)=c_1^2+c_2^2>0$$

{ Αφού $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, τότε $\left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$.

Θεώρημα ύπαρξης:

$\exists\ T>0$ τ.ω $\limsup\limits_{t\to T^-} \left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\| = +\infty$ }

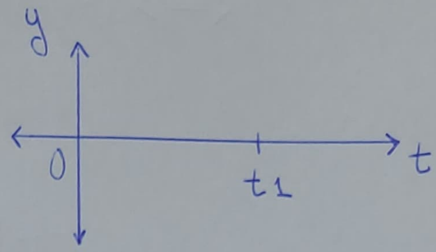
Έστω πως $\exists\ c_1, c_2$ τ.ω $c_1^2+c_2^2>0$, όπου η λύση (1) να ορίζεται $\forall\ t\geq 0$.

$$(x(t), y(t)) \longmapsto \sigma(t)$$

$$\sigma'(t)=2\sigma(t)(1+\sigma(t)) \ , t>0$$
$$\sigma(0)=c_1^2+c_2^2>0$$

(μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών)

$$\begin{cases} \sigma' = 2\sigma(1+\sigma) \\ \sigma(t_1) = 0 \end{cases}$$



$$\Longrightarrow \sigma(t) > 0.$$

Οπότε,

$$\int_0^t \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)(1+\sigma(s))}\,ds = 2\int_0^t ds$$

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \frac{1}{z(1+z)}\,dz = 2t$$

$$\frac{1+z-z}{z(1+z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

$$\left(\ln \frac{z}{z+1}\right)\Bigg|_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} = 2t$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{\sigma(t)}{1+\sigma(t)}}{\frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)}}\right) = 2t$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sigma(t)}{1+\sigma(t)} = \frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)}\,e^{2t}$$

$$\Longleftrightarrow \sigma(t) = \sigma(t)\left(\frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}\right) + \frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}$$

$$\sigma(t)\left(1 - \frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}\right) = \frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}$$

$$e^{2t} = \frac{1+\sigma(0)}{\sigma(0)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow t^* = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sigma(0)}{\sigma(0)}\right)$$

Για $0 \leq t < t^*$,

$$\sigma(t) = \frac{\frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}}{1 - \frac{\sigma(0)}{1+\sigma(0)} e^{2t}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{t \to t^{*-}} \sigma(t) = +\infty$$ Αντίφαση.

$\blacksquare$

19/12/23

ΣΔΕ
- Φυλλάδιο 11 -

1) $x' = y$
$y' = 3x + y$

Λύση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda-1) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 3 = 0$$

$$\Delta = 13$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\lambda_1 \qquad 0 \qquad \lambda_2$$

Για την ιδιοτιμή λ_1 έχω το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \beta = \lambda_1 \alpha \\ 3\alpha + \beta = \lambda_1 \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = \lambda_1 \alpha \\ 3\alpha + \lambda_1 \alpha = \lambda_1^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = \lambda_1 \alpha \\ \alpha(\lambda_1^2 - \lambda_1 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda_1 \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

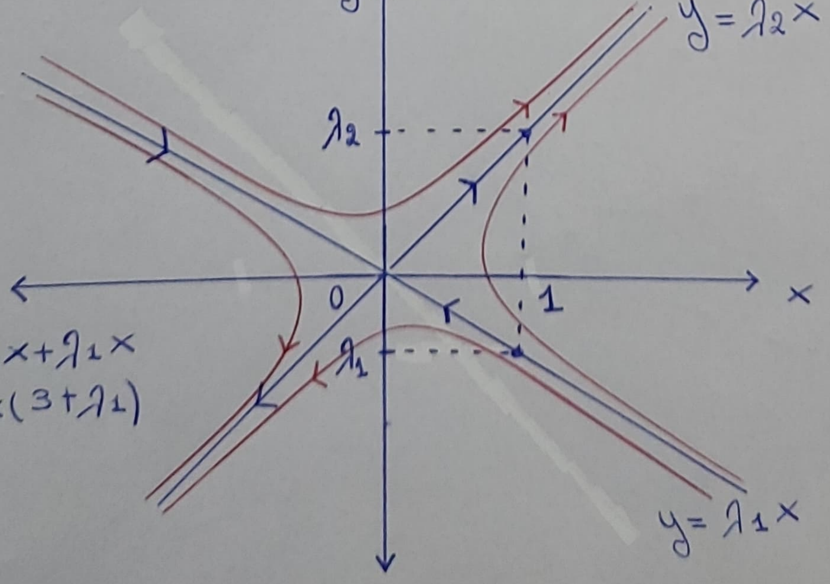
Οι δύο λύσεις είναι της μορφής:

- $e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$, • $e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

Γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$



$$\frac{dy}{dx} = 3x + y = 3x + \lambda_1 x$$
$$= x(3 + \lambda_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+y}{y} \quad , \quad \frac{y}{x} = z$$

$$y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{3x+xz}{xz} = \frac{3+z}{z} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{3+z}{z} - z = \frac{3+z-z^2}{z}$$

$$\frac{z}{3+z-z^2} = \frac{a}{z-\lambda_1} + \frac{b}{z-\lambda_2}$$

$$= \frac{a(z-\lambda_2)+b(z-\lambda_1)}{z^2-(3+z)}$$

$$= \frac{(a+b)z-(a\lambda_2+b\lambda_1)}{z^2-(3+z)}$$

$$\begin{bmatrix} a+b=-1 \\ a\lambda_2+b\lambda_1=0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} b=-1-a \\ a\lambda_2-(1+b)\lambda_1=0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} b=-1-a \\ a(\lambda_2-\lambda_1)=\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} b=-1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ a=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ b=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}{z-\lambda_1} - \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}{z-\lambda_2} \right) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \ln|z-\lambda_1| - \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \ln|z-\lambda_2| = \ln|x|$$

$$\ln\left(\frac{|z-\lambda_1|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}}{|z-\lambda_2|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}} \right) = \ln|x| + C$$

$$\frac{|z-\lambda_1|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}}{|z-\lambda_2|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}} = k\,|x| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|y-\lambda_1 x|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}}{|y-\lambda_2 x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}} = k\,|x|$$

$$\Rightarrow |x|^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}$$

$$\frac{|y-\lambda_1 x|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}}{|y-\lambda_2 x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}} = k$$

■

4) $x' = y(1+x^2+y^2)$

$y' = -x(1+x^2+y^2)$

Λύση:

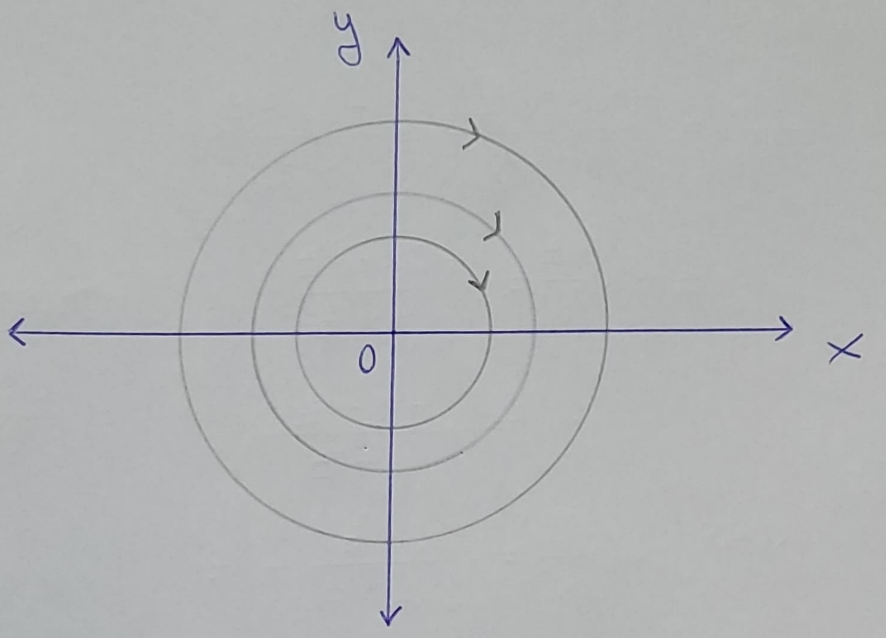
• 1η προσέγγιση:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{\cancel{(1+x^2+y^2)}}{\cancel{(1+x^2+y^2)}} \Longleftrightarrow y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$x^2 + y^2 = 2c$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$



• **2η προσέγγιση:** (Επίλυση Συστήματος)

$$x' = y(1 + x^2 + y^2)$$
$$y' = -x(1 + x^2 + y^2)$$

Θέτω, $\sigma = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \sigma' = 2xx' + 2yy'$$
$$= 2xy(1+\sigma) + 2y(-x(1+\sigma)) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c$$

■

3) $x' = 2x + 2y$

$y' = -4x - 2y$

Λύση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x-2y}{2x+2y} = \frac{-2x-y}{x+y}$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{-2x-xz}{x+xz}$$

$$= \frac{-2-z}{1+z}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = -\frac{2+z}{1+z} - z$$

$$= -\frac{2-z+z+z^2}{1+z}$$

$$= -\frac{2+2z+z^2}{1+z}$$

$$\Longrightarrow \frac{1+z}{z^2+2z+2}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\ln(z^2+2z+z) = -2\ln|x| + c$$

$$|x|^2(z^2+2z+2) = k$$

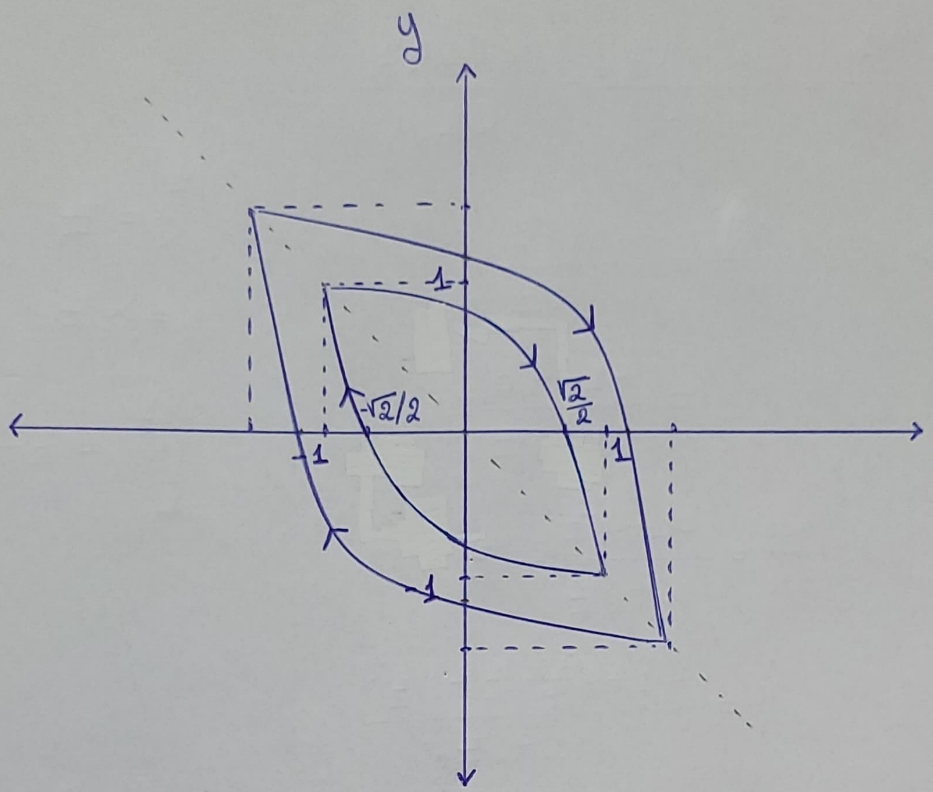
$$|x|^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = k$$

Οι καμπύλες που έχουν τη μορφή:

$$y^2 + 2xy + 2x^2 = k$$

$$\Longrightarrow \boxed{(y+x)^2 + x^2 = k^2}$$

(Δεν είναι κύκλοι)



$$y+x=\pm\sqrt{1-x^2}$$
$$(y+x)^2=1-x^2$$

$$x=\sqrt{1-x^2}$$
$$x^2=1-x^2$$
$$2x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{cases} y=-x+\sqrt{1-x^2} \\ y=-x-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

■

2) $x'=-x-2y$

$y'=x-4y$

<u>Λύση:</u>

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4y}{-x-2y} = \frac{-x+4y}{x+2y}$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow z + x\frac{dz}{dx} = \frac{-x+4xz}{x+2xz}$$

$$= \frac{-1+4z}{1+2z}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{-1+4z}{1+2z} - z$$

$$= \frac{-1+4z-z-2z^2}{1+2z}$$

$$= \frac{-2z^2+3z-1}{1+2z}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2z}{2z^2-3z+1}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3\pm1}{4} \left[\begin{array}{l} \to 1 \\ \to \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\frac{1+2z}{2z^2-3z+1} = \frac{a}{2z-1} + \frac{b}{z-1}$$

$$= \frac{a(z-1)+b(2z-1)}{2z^2-3z+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} a+2b=2 \\ -a-b=1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1+b=2 \\ a+b=-1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ a=-4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-4}{2z-1}+\frac{3}{z-1}\right)\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}$$

$$-2\ln|2z-1|+3\ln|z-1|=-\ln|x|+c$$

$$\frac{|z-1|^3}{|2z-1|^2}=k|x|^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left|\frac{y}{x}-1\right|^3}{\left|2\frac{y}{x}-1\right|^2}=k|x|^{-1}$$

$$\frac{|y-x|^3}{|2y-x|^2}=k \Longleftrightarrow |y-x|^3=k|2y-x|^2$$

Πρέπει να βρω ιδιοτιμές για να κατασκευάσω ορθά το διάγραμμα.
Οπότε, $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+4)+2=0$

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

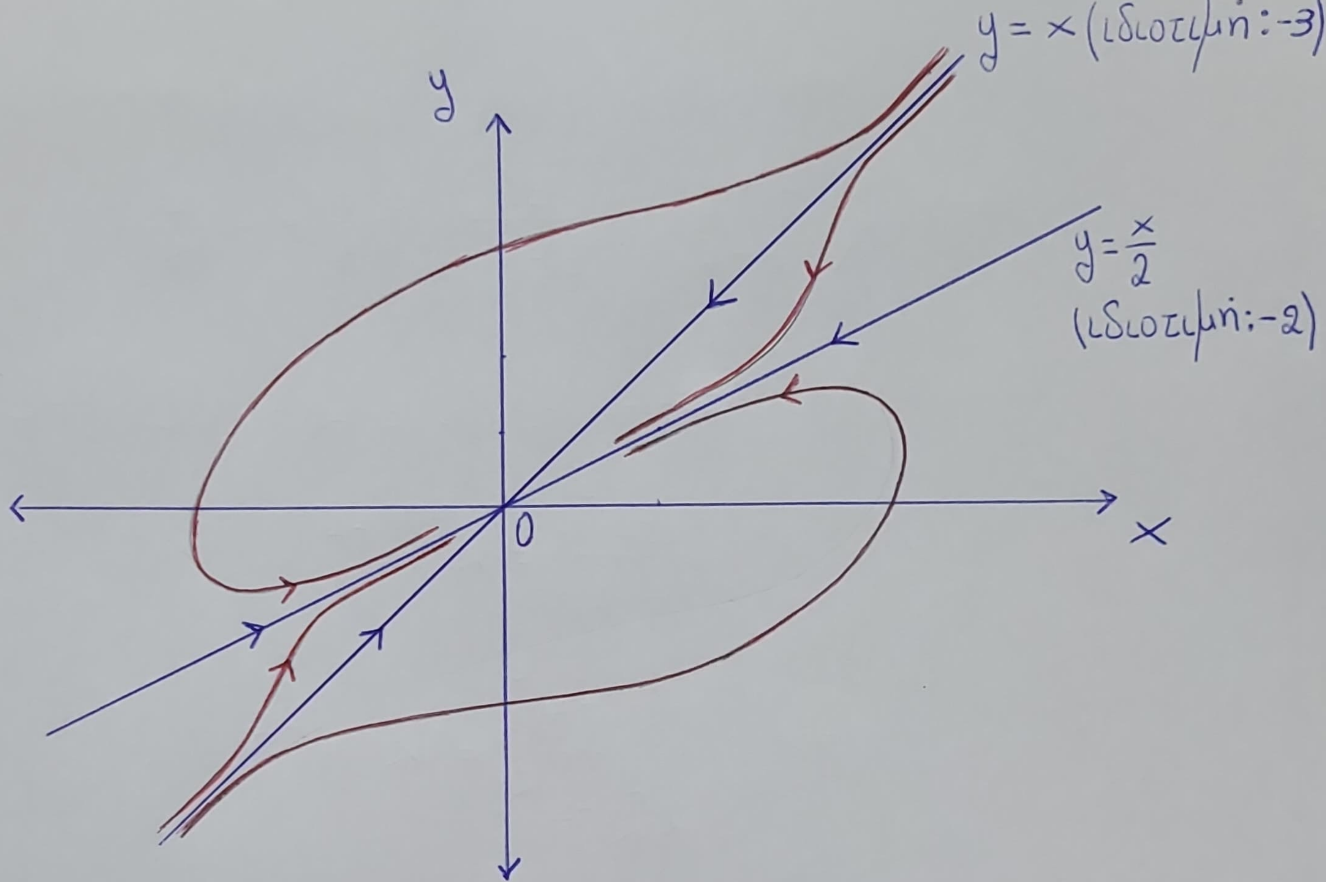
$$\boxed{\lambda=-2}, \boxed{\lambda=-3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow -\alpha-2\beta=-2\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \alpha=2\beta$$

$$\begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$y = x$ (ιδιοτιμή: -3)
$y = \frac{x}{2}$
(ιδιοτιμή: -2)
y
x
0