1/

ΛΥΣΕΙΣ

Θεμα 1ο Παρατηρούμε αρχικα οτι

$$y'(t) \geq -a t y(t) \quad , \quad t>0 \iff$$

$$(y'(t)+aty(t))\, e^{a\frac{t^2}{2}} \geq 0 \quad , \quad t>0$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(e^{a\frac{t^2}{2}} y(t)\right) \geq 0 \quad , \quad t>0$$

Οποτε η συναρτηση $e^{a\frac{t^2}{2}} y(t)$ ειναι αυξουσα στο $[0,\infty)$ και επομενως

$$e^{a\frac{t^2}{2}} y(t) \geq e^{0} y(0) = 0 \quad , \quad t\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \geq 0 \, , \quad t \geq 0. \qquad (1)$$

Αντιστοιχα εχουμε

$$-\beta t\, y(t) \geq y'(t) \quad , \quad t>0 \iff$$

$$e^{\beta\frac{t^2}{2}}(y'(t) + \beta t\, y(t)) \leq 0 \quad , \quad t>0 \iff$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta\frac{t^2}{2}} y(t)\right) \leq 0 \quad , \quad t>0.$$

Οποτε η $t \longmapsto e^{\beta\frac{t^2}{2}} y(t)$ ειναι φθινουσα, και αρα

$$e^{\beta\frac{t^2}{2}} y(t) \leq y(0) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \leq 0 \, , \quad t \geq 0 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow y(t) \equiv 0 \, , \quad t \geq 0.$$

Θεμα 2ο a) Θεωρουμε τη συναρτηση $f : [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R}$ με τυπο $f(t,y) = t\sqrt{y} + t^2 + y^2$, $t \in [0,1]$, $y \in [0,2]$.
Τοτε εχουμε : $0 \leq f(t,y) \leq 1\cdot\sqrt{2} + 1 + 4 < 7.$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε από το Θεώρημα του Peano, το Πρόβλημα αρχικών Τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$
$$y(0) = 1$$

έχει λύση στο διάστημα $[0, \beta^*]$, όπου

$$\left(\begin{matrix} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi \end{matrix}, \quad t \in [a, \beta], c \le x \le d, \quad |f(t,x)| \le M \right)$$

$$\beta^* = \min\left\{\beta,\ a + \frac{\xi - c}{M},\ a + \frac{d-\xi}{M}\right\}$$

$$= \min\left\{1,\ 0 + \frac{1-0}{7},\ 0 + \frac{2-1}{7}\right\}$$

$$= \frac{1}{7}.$$

Επομένως το πρόβλημα έχει λύση στο διάστημα $[0, \frac{1}{7}]$.

β) Όσο η λύση $y(t) \ge 0$, ισχύει ότι

$$y'(t) \ge 0$$

δηλ. είναι αύξουσα, και επομένως $y(t) \ge y(0) = 1$.

γ) Επειδή η λύση/λύσεις είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ έχουμε $y(t) \ge 1$, $t \ge 0$.

Όμως η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \times [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t,x) = t\sqrt{x} + t^2 + x^2$

είναι τοπικά Lipschitz, και πράγματι, για $t \in [0, T]$ $x, y \in [1, A]$

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |t\sqrt{x} + t^2 + x^2 - t\sqrt{y} - t^2 - y^2|$$

$$= |t(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (x^2 - y^2)| \le t|\sqrt{x} - \sqrt{y}| +$$
$$+ |x-y||x+y| \le$$

3)

$$x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$$

$$\frac{t\,|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + |x-y|\,|x+y| \leq \frac{T}{2}|x-y| + 2A\,|x-y|$$

$$= \left(\frac{T}{2}+2A\right)|x-y|.$$

Άρα επομένως ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων για το Π.Α.Τ.

δ) Έστω πως η λύση ορίζεται $\forall\ t\in[0,+\infty)$, τότε θα έχουμε

$$y'(t) = t\sqrt{y(t)} + t^2 + y^2(t), \quad t>0$$

$$y(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) > y^2(t), \quad t>0$$

$$y(0)=1$$

$(y(t)\geq 1$ από το β$))$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'(t)}{y^2(t)} > 1, \overset{t>0}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{y(t)}\right) > \frac{d}{dt}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}+t\right) < 0, \quad t>0.$$

Οπότε προκύπτει $\quad \frac{1}{y(t)}+t < \frac{1}{y(0)} = 1, \quad t>0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{y(t)} < 1-t \qquad (*)$$

Για $t\geq 1$ προκύπτει το ΑΤΟΠΟ $\quad \overset{\text{διότι}}{(1-t\leq 0)}$

Επομένως η λύση δεν ορίζεται για όλους τους χρόνους.
(Μάλιστα έχουμε εκρηκτική λύση σε πεπερασμένο χρόνο).

Θέμα 3ο
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A\,\underline{x}(t)$$

1ος τρόπος

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $(\lambda-2)^3$ (τριπλή ρίζα).

Οπότε θα βρούμε λύσεις στη μορφή

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\left(\underline{c}_1 + t\,\underline{c}_2 + t^2 \underline{c}_3\right)$$

για κατάλληλα διανύσματα $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$, $\underline{c}_3$.

Παρατηρούμε δε αμέσως ότι

$$\underline{x}'(t) = 2e^{2t}\left(\underline{c}_1 + t\underline{c}_2 + t^2\underline{c}_3\right) + e^{2t}\left(\underline{c}_2 + 2t\,\underline{c}_3\right)$$
$$= e^{2t}\left(2\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + 2t(\underline{c}_2 + \underline{c}_3) + 2t^2\underline{c}_3\right)$$

Οπότε

$$e^{2t}\left(2\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + 2t(\underline{c}_2+\underline{c}_3) + 2t^2\underline{c}_3\right) = e^{2t}A\left(\underline{c}_1 + t\underline{c}_2 + t^2\underline{c}_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A\underline{c}_1 + t\,A\underline{c}_2 + t^2 A\underline{c}_3 = 2\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + 2t(\underline{c}_2+\underline{c}_3) + 2t^2\underline{c}_3$$

Επομένως $A\underline{c}_1 = 2\underline{c}_1 + \underline{c}_2$, $A\underline{c}_3 = 2\underline{c}_3$, $A\underline{c}_2 = 2(\underline{c}_2+\underline{c}_3)$

Μια λύση προκύπτει θέτοντας $\underline{c}_2 = \underline{c}_3 = \underline{0}$

να βρω

$$A\underline{c}_1 = 2\underline{c}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha+\beta = 2\alpha \\ 2\beta+\gamma = 2\beta \\ 2\gamma = 2\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, μια λύση η

$$\underline{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Μια δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη λύση) θέτουμε $\underline{c}_3 = 0$

Οπότε $A\underline{c}_1 = 2\underline{c}_1 + \underline{c}_2$

όπως είδαμε ($\underline{c}_2$ ιδιοδιάνυσμα)

$A\underline{c}_2 = 2\underline{c}_2 +$ $\Rightarrow$ $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

και επομένως $A\underline{c}_1 = 2\underline{c}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha+\beta = 2\alpha+1 \\ 2\beta+\gamma = 2\beta \\ 2\gamma = 2\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X_2}(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

Για την τρίτη γραμμικά ανεξάρτητη λύση

$$\Rightarrow \underline{c_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A\underline{c_2} = 2\underline{c_2} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= 2\alpha+2\\ 2\beta+\gamma &= 2\beta\\ 2\gamma &= 2\gamma \end{aligned}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \beta &= 2\\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{c_2} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\underline{c_1} = 2\underline{c_1} + \underline{c_2} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= 2\alpha\\ 2\beta+\gamma &= 2\beta+2\\ 2\gamma &= 2\gamma \end{aligned}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \beta &= 0\\ \gamma &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{c_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Άρα $\underline{X_3}(t) = e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$

$$= \begin{pmatrix}t^2\\2t\\2\end{pmatrix}e^{2t}.$$

και η γενική λύση είναι επομένως

$$\underline{X}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix}t^2\\2t\\2\end{pmatrix}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος Μέσα από την εύρεση του εκθετικού πίνακα

$$e^{At}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι:

$$A = 2I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{B}.$$

και επειδή

$$I_3 B = B I_3 = B$$

έχουμε

$$e^{At} = e^{(2I_2+B)t} = e^{2I_2 t}\cdot e^{Bt}$$

$$= e^{2t} I_3 \cdot e^{Bt}.$$

Όμως

$$B^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{και}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία

Ονοματεπώνυμο

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$\Rightarrow B^k = O, \quad k \geq 3$$

Οπότε $e^{Bt} = I_3 + \frac{Bt}{1!} + \frac{B^2t^2}{2!}$

$$\left(= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k t^k}{k!} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $e^{At} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και επομένως

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 4°

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)+3=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ (θετική), $\lambda_2 = -1$.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a - \beta = a \\ 3\cancel{\alpha}a - 2\beta = \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \beta = a \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a - \beta = -a \\ 3a - 2\beta = -\beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

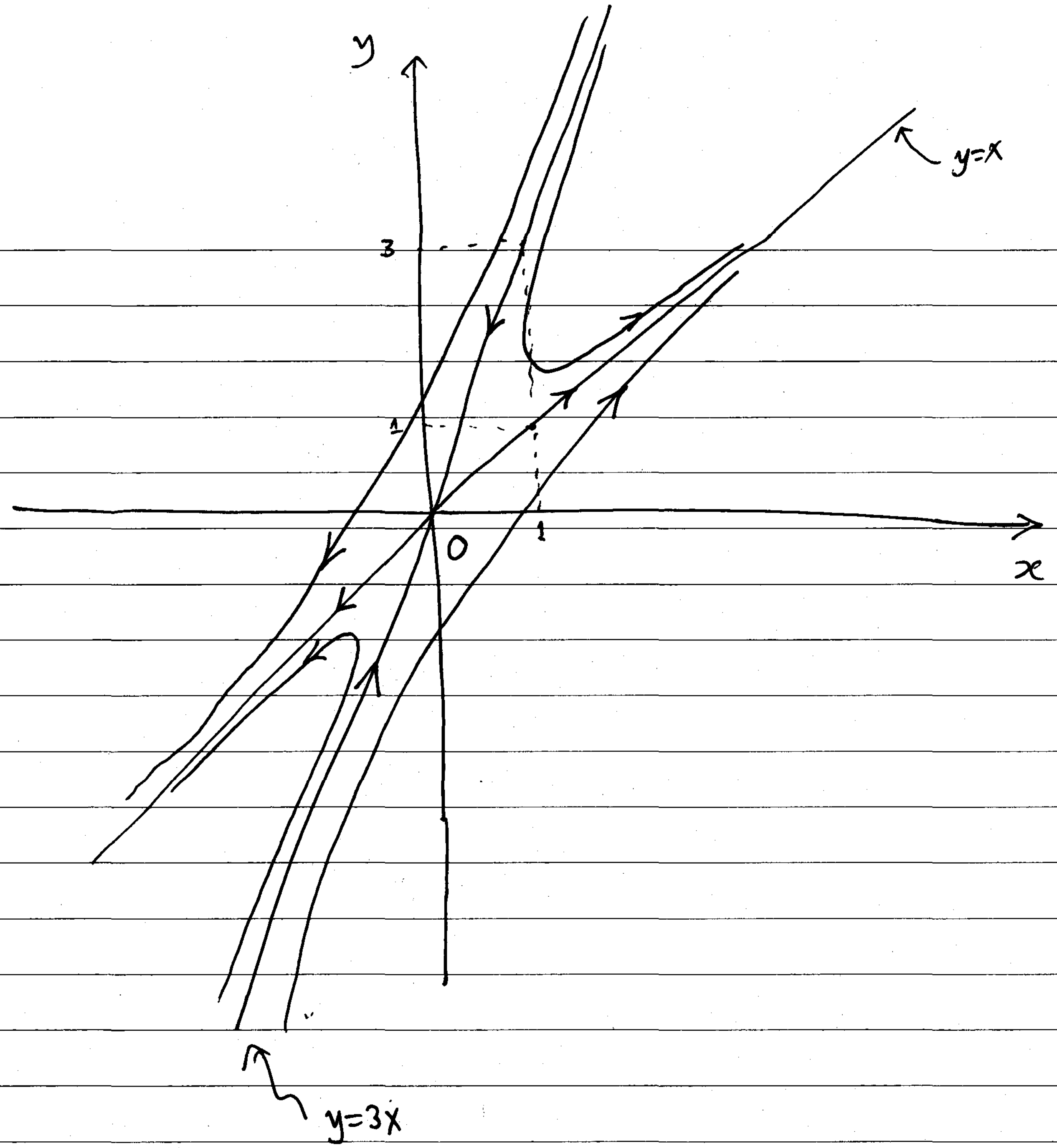
$$\beta = 3a$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$.

Γενική λύση

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



Οπότε το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Θέμα 5°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(t)=x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)$, $t\geq 0$.

Τότε $\sigma'(t)= 2xx'+2yy'+2zz'$

$$= 2x\left(-x(t)+x(t)(x^2+y^2+z^2)\right)+2y\left(-y+2y(x^2+y^2+z^2)\right)$$
$$+2z\left(-z+3z(x^2+y^2+z^2)\right)$$
$$= -2x^2(t)+2x^2(x^2+y^2+z^2)-2y^2+4y^2(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2z^2(t)+6z^2(x^2+y^2+z^2)=$$

11)

$$= -2(x^2+y^2+z^2) + 2(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$+ 2(y^2+2z^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Οπότε παρατηρούμε ότι:

$$\sigma'(t) \leq -2\sigma(t) + 2\sigma^2(t) + 4\sigma^2(t)$$
$$\sigma'(t) \leq 2\sigma(t)\left[-1+3\sigma(t)\right], \quad t \geq 0$$

καθώς επίσης

$$\sigma'(t) = -2\sigma(t) + 2\sigma^2(t) + 2(y^2+2z^2)\sigma(t)$$
$$\geq -2\sigma(t) + 2\sigma^2(t)$$
$$= 2\sigma(t)(-1+\sigma(t)), \quad t \geq 0.$$

a) Θεωρούμε το Π.Α.Τ με $x(0)=\frac{1}{3}, y(0)=\frac{1}{4}, z(0)=\frac{1}{4}$. τότε

$$0 < \sigma(0) = x^2(0)+y^2(0)+z^2(0) = \frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{9}+\frac{1}{8}$$
$$= \frac{17}{72} < \frac{1}{3}.$$

Θα αποδείξουμε ότι αν σ, ικανοποιεί

$$\sigma'(t) \leq 2\sigma(t)(-1+3\sigma(t)), \quad t \geq 0$$
$$0 < \sigma(0) < \frac{1}{3}$$

Τότε αρχικά θα ισχύει

$$0 < \sigma(t) < \frac{1}{3}, \quad t \geq 0.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι λόγω συνέχειας της σ στο $t=0$ προκύπτει ότι υπάρχει διάστημα της μορφής $[0,\delta]$ με $\delta>0$ ώστε

$$0<\sigma(t)<\frac{1}{3}, \quad t\in[0,\delta].$$

$$\Rightarrow -1+3\sigma(t)<0 \quad \Rightarrow \sigma'(t)<0 \quad -\text{"}- \quad , \sigma \downarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'(t)}{2\sigma(t)(-1+3\sigma(t))} \geq 1 \quad , \quad t\in[0,\delta].$$

Διασπάμε το κλάσμα $\dfrac{1}{2x(-1+3x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{-1+3x}$

$$= \frac{A(-1+3x)+Bx}{2x(-1+3x)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2Bx + 2A(-1+3x) = -2A + 2(B+3A)x$$

$$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}, \quad B=\frac{3}{2}.$$

Δηλ. $\dfrac{1}{2x(-1+3x)} = -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{\frac{3}{2}}{-1+3x}$.

Άρα $$-\frac{\sigma'(t)}{2\sigma(t)} + \frac{\frac{3}{2}\sigma'(t)}{-1+3\sigma(t)} \geq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\ln\sigma(t)\right)' + \frac{1}{2}\left(\ln\left(1-3\sigma(t)\right)\right)' \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\ln\left(\frac{1-3\sigma(t)}{\sigma(t)}\right)\right)' \geq 2 \quad , \quad t\in[0,\delta].$$

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{1-3\sigma(t)}{\sigma(t)}\right) - 2t\right] \geq 0, \qquad t \in [0,\delta].$$

Οπότε $\ln\left(\dfrac{1-3\sigma(t)}{\sigma(t)}\right) - 2t \geq \ln\left(\dfrac{1-3\sigma(0)}{\sigma(0)}\right), \quad t \in [0,\delta].$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{1-3\sigma(t)}{\sigma(t)}}{\frac{1-3\sigma(0)}{\sigma(0)}}\right) \geq 2t \qquad -||-$$

$$\frac{1-3\sigma(t)}{\sigma(t)} \geq \frac{1-3\sigma(0)}{\sigma(0)}\, e^{2t} \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma(t)} \geq 3 + \frac{1-3\sigma(0)}{\sigma(0)}\, e^{2t} > 0$$

Οπότε η $\sigma \downarrow$ στο $[0,\delta]$ με

$$(**) \qquad 0 < \sigma(t) \leq \frac{1}{3 + \frac{1-3\sigma(0)}{\sigma(0)}\, e^{2t}} \leq \frac{\sigma(0)}{1-3\sigma(0)}\, e^{-2t}.$$

και από την (*) $\sigma(t) < \frac{1}{3}$.

(Επίσης δεν μπορεί το $\sigma(\xi)=0$ για κάποιο ξ, διότι τότε $x(\xi)=y(\xi)=z(\xi)=0$ και η λύση, λόγω μοναδικότητας θα ήταν η $\sigma(t)\equiv 0$, άτοπο.)

Από την (**) προκύπτει ότι η λύση ορίζεται $\forall\, t \geq 0$.

β) Το Π.Α.Τ. με $x(0)=\frac{1}{2}$, $y(0)=\frac{2}{3}$, $z(0)=\frac{2}{3}$, έχουμε

$$\sigma(0) = x^2(0)+y^2(0)+z^2(0) = \frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = \frac{8}{9}+\frac{1}{4} > 1.$$

Θα αποδείξουμε ότι αν η σ ικανοποιεί

$$\sigma'(t) \geq 2\sigma(t)\left(-1+\sigma(t)\right), \quad t \geq 0.$$

$$\sigma(0) > 1$$

Τότε η λύση εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Έστω πως η λύση ορίζεται για $t \in [0,T)$, θα δείξουμε αρχικά ότι $\sigma(t) > \sigma(0) > 1$, $t \in (0,T)$.

Αρχικά λόγω συνέχειας της σ στο $t=0$ $\exists\, \delta > 0$:

$$\sigma(t) > 1, \quad t \in [0,\delta].$$

$$\Rightarrow \sigma'(t) > 0 \qquad \text{—〃—}$$

$$\Rightarrow \sigma(t) \uparrow \qquad \text{—〃—}$$

Όμως τότε

$$\frac{\sigma'(t)}{2\sigma(t)\left(-1+\sigma(t)\right)} \geq 1, \quad t \in [0,\delta].$$

$$\frac{1}{x(-1+x)} = \frac{1-x+x}{x(-1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{-1+x}.$$

Άρα

$$-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} + \frac{\sigma'(t)}{-1+\sigma(t)} \geq 2, \quad t \in [0,\delta]$$

$$-\left(\ln \sigma(t)\right)' + \left(\ln\left(\sigma(t)-1\right)\right)' \geq 2 \qquad \text{—〃—}$$

$$\left(\ln\left(\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}\right)\right)' \geq 2 \qquad \text{—〃—}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}\right) - 2t\right) \geq 0 \qquad \text{—〃—}$$

$$\ln\left(\frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)}\right) - 2t \geq \ln\left(\frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)}\right), \quad t\in[0,\delta].$$

$$\Longrightarrow \frac{\sigma(t)-1}{\sigma(t)} \geq \frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)} e^{2t} > 0, \quad t\in[0,\delta].$$

Άρα ~~σ(t)~~ $\sigma(t) > 1$ για όλα $t\in[0,T)$

Από την άλλη όμως

$$1 - \frac{1}{\sigma(t)} \geq \frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)} e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)} e^{2t} \geq \frac{1}{\sigma(t)}.$$

Όμως για κατάλληλο μεγάλο χρόνο (ώστε

$$\frac{\sigma(0)-1}{\sigma(0)} e^{2t} \geq 1$$

παίρνουμε αντίφαση. (όταν υπάρχει της λύσης για όλους τους χρόνους).

Θέμα 6°

1ος τρόπος: Παρατηρούμε αρχικά ότι αν λύσουμε το ΠΑΤ.

$$x'(t) = x^2(t)$$

$$x(0) = a, \quad a\neq 0$$

Η λύση του είναι $x(t) = \dfrac{a}{1-at}$, $|t| < \dfrac{1}{|a|}$.

Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να δούμε τη λύση του Π.Α.Τ.

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X'(t) = X^2(t), \quad t \in$$
$$X(0) = A$$

ότι είναι η $X(t) = A(I - tA)^{-1} \left(= (I-tA)^{-1} A \right)$.
Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι η λύση του προβλήματος (ορίζεται καλά κλπ).

Ο πίνακας $(I - tA)$ είναι αντιστρέψιμος γιατί αν
$\det(I - tA) = 0 \Leftrightarrow \exists \det(\frac{1}{t} - A) = 0 \Leftrightarrow \exists\, \underline{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
$$A\underline{u} = \frac{1}{t}\underline{u}$$
αδύνατο, αφού οι ιδιοτιμές του A είναι καθαρά φανταστικές.

Οπότε $\forall t \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $(I-tA)^{-1}$ ορίζεται καλά, ($\det(I - tA) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$).
και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού

$$(I - tA)^{-1} = \frac{1}{\det(I - tA)} \left(\operatorname{adj}(I - tA) \right)^t,$$

(πηλίκο πολυωνύμων του t, με τον παρονομαστή να μην μηδενίζεται)
Επίσης επειδή $A(I - tA) = (I - tA) \cdot A$, προκύπτει ότι (πολλαπλασιάζουμε με $(I-tA)^{-1}$)
$$(I - tA)^{-1} A = A \cdot (I - tA)^{-1}. \quad \text{(αντιμετατίθενται)}$$
και επομένως

17/

Επειδή $(I-tA)\cdot(I-tA)^{-1} = I \Rightarrow$

$$-A\cdot(I-tA)^{-1} + (I-tA)\cdot\frac{d}{dt}(I-tA)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow (I-tA)\cdot\frac{d}{dt}(I-tA)^{-1} = A(I-tA)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(I-tA)^{-1} = (I-tA)^{-1}\cdot A\cdot(I-tA)^{-1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[A\cdot(I-tA)^{-1}\right] = A(I-tA)^{-1}\cdot A\cdot(I-tA)^{-1}$$

$$= \left(A(I-tA)^{-1}\right)^2 .$$

Άρα η $X(t) = A(I-tA)^{-1}$ είναι μια λύση του Π.Α.Τ. που ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$, που λόγω της μοναδικότητας του προβλήματος (Η μη γραμμικότητα είναι τοπικά Lipschitz συνεχής)

———.

2ος τρόπος

Αρχικά το πρόβλημα έχει λύση για μικρούς χρόνους. Επειδή μάλιστα $X(0)=A \Rightarrow \underset{0}{\underset{\neq}{\det A}} = \det X$

Άρα λόγω συνέχειας η λύση ~~X~~ θα είναι αντιστρέψιμος πίνακας (μια και $\det X(t)\neq 0$ για μικρούς χρόνους) για μικρούς τουλάχιστον χρόνους.

Οπότε $$X'(t) = X^2(t) \Leftrightarrow \quad \text{όσο } \det X(t)\neq 0$$

$$\left(X^{-1}(t)\right)^2 X'(t) = I_n$$

Όμως παρατηρούμε $$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(-X^{-1}(t)\right) = I_n}$$

(διότι $X(t)X^{-1}(t) = I_n$, όπως έδειξες προηγουμένως όσο υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας, είναι παραγωγίσιμος επίσης)

Οπότε $X'(t)X^{-1}(t) + X(t)\left(X^{-1}(t)\right)' = 0 \Leftrightarrow$

$$\cancel{X}(t)\left(X^{-1}(t)\right)' = -X'(t)X^{-1}(t)$$

$$X^{-1}(t)X(t)\left(X^{-1}(t)\right)' = -X^{-1}(t)\underbrace{X(t)X^{-1}(t)}_{= X'(t)X^{-1}(t)} \quad (\text{αντιμετάθεση})$$

$$X^{-1}(t) = -\left(X^{-1}(t)\right)\left(X^{-1}(t)X'(t)\right)$$
$$= -\left(X^{-1}(t)\right)^2 X'(t).$$

Οπότε $$\frac{d}{dt}\left(-X^{-1}(t) - tI_n\right) = 0$$

οπότε $\exists\; B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε

$X^{-1}(t) + tI_n = B \iff X^{-1}(t) = B - tI_n$.

Για $t=0$ $\quad X^{-1}(0) = B$, όμως $X(0) = A \iff$

(αντιστρέψιμος) $X^{-1}(0) = A^{-1}$.

Άρα $B = A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad X^{-1}(t) = A^{-1} - tI_n = A^{-1} - tA^{-1}A = A^{-1}(I_n - tA)$$

και επομένως

$$X(t) = \left(A^{-1}(I_n - tA)\right)^{-1} = (I - tA)^{-1}A$$

(επίσης ισχύει αντιμετάθεση μεταξύ των A, $(I-tA)^{-1}$)

Η λύση αυτή όμως ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$ μια και ο πίνακας $I - tA$ είναι πάντα αντιστρέψιμος, διότι αν δεν ήταν για κάποιο t_0 τότε $\det(I_n - t_0A) = 0 \Rightarrow \exists\, \underline{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}\setminus\{0\}$ ώστε $t_0 A\underline{u} = \underline{u} \Rightarrow A\underline{u} = t_0^{-1}\underline{u}$, δηλ. το t_0^{-1} είναι πραγματική ιδιοτιμή του A, άτοπο.