ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 1 Μαρτίου 2017

Α. Τερτίκας

ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

(Φυλλάδιο 1)

1. α) Έστω $f \in \mathbf{C}[0,1]$ τέτοια ώστε :

$$\int_0^1 f(x)\ \phi'(x)\ dx \ = \ 0, \quad \forall \phi \in \mathbf{C}^1[0,1],\ \text{με}\ \phi(0) = \phi(1).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα ισχύει

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

β) Έστω $g, h \in \mathbf{C}[0,1]$ τέτοιες ώστε :

$$\int_0^1 (g(x)\ \phi'(x) + h(x)\ \phi(x))\ dx \ = \ 0, \quad \forall \phi \in \mathbf{C}^1[0,1],\ \text{με}\ \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα ισχύει

$$g'(x) = h(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

2. Έστω $U = (0,1)^2$ και ορίζουμε u από τη σχέση :

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 + x - y, & 0 < y < x < 1, \\ 1 + y - x, & 0 < x < y < 1. \end{cases}$$

α) Είναι η u μία φορά ασθενώς παραγωγίσιμη ; (δηλ $\exists\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}$?)
β) Για ποιές τιμές της παραμέτρου $1 \le p < \infty$ είναι

$$u \in \mathbf{W}^{1,p}(U) \ \ ?$$

3. Εαν $u \in \mathbf{W}^{1,4}[0,1]$, αποδείξτε ότι

$$|u(x) - u(y)|^4 \le |x-y|^3 \int_0^1 (u'(x))^4\ dx, \quad \sigma.\pi.\ x, y \in [0,1].$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά την ανισότητα για $u \in \mathbf{C}^1[0,1]$.

4. Έστω $u \in \mathbf{W}^{1,1}(0,+\infty)$ και $v \in \mathbf{W}^{1,1}(-\infty,0)$. Ορίζουμε w από τη σχέση :

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (0,+\infty), \\ v(x), & x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι αν $w \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R})$ τότε υπάρχουν αντιπρόσωποι u, v ώστε

$$tru(0) = trv(0), \quad ,$$

και αντιστρόφως αν $tru(0) = trv(0)$, τότε

$$w \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R}).$$

5. Έστω $u \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n_+)$ και $v \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n_-)$. Ορίζουμε w από τη σχέση :

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathbf{R}^n_+, \\ v(x), & x \in \mathbf{R}^n_-. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι αν $w \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ τότε

$$tru(x',0) = trv(x',0), \quad \sigma.\pi.\ x' \in \mathbf{R}^{n-1},$$

και αντιστρόφως αν $tru(x',0) = trv(x',0), \quad \sigma.\pi.\ x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, τότε

$$w \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbf{R}^n).$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>