Τετάρτη 15 Μαρτίου 2017

Α. Τερτίκας

ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

(Φυλλάδιο 2)

1. α) Έστω $u \in \mathbf{W}^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, ανοικτό, συνεκτικό και u τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\nabla u(x) \;=\; 0, \quad \sigma.\pi.\; x \in \Omega.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$u(x) \;=\; c, \quad \sigma.\pi.\; x \in \Omega.$$

β) Προσδιορίστε όταν επιπρόσθετα $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, όλες τις $v \in \mathbf{W}^{1,1}_{loc}(\Omega)$, που είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούν:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \;=\; 2xy + y^2, \quad \sigma.\pi.\; (x,y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \;=\; x^2 + 2xy, \quad \sigma.\pi.\; (x,y) \in \Omega.$$

2. α) Για $1 \le p < n$, $2 \le n$, βρείτε τον εκθέτη q ώστε να υπάρχει θετική σταθερά $c = c_{n,p}$ τέτοια ώστε να ισχύει η ανισότητα:

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x',0)|^q \, dx' \right)^{\frac{1}{q}} \le c \, \left(\int_{\mathbf{R}^n_+} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, u \in \mathbf{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n).$$

Στη συνέχεια να αποδείξτε την ανισότητα για την επιλογή σας.

β) (συνέχεια) Αν $u \in \mathbf{D}^{1,p}_0(\mathbf{R}^n)$, αποδείξτε ότι $Tr\; u \in L^q(\mathbf{R}^{n-1})$ και μάλιστα ισχύει η ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |Tr\; u(x',0)|^q \, dx' \right)^{\frac{1}{q}} \le c \, \left(\int_{\mathbf{R}^n_+} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, u \in \mathbf{D}^{1,p}_0(\mathbf{R}^n),$$

όπου q είναι η προηγούμενη επιλογή.

3. Έστω $B_1^+ = \{(x', x_n) \in B_1,\; x_n > 0,\}$ και $u \in \mathbf{W}^{1,p}(B_1^+)$, $v \in \mathbf{W}^{1,q}(B_1^+)$, όπου $1 < p, q$ είναι τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Αποδείξτε ότι:

$$a) \qquad uv \in \mathbf{W}^{1,1}(B_1^+),$$

$$b) \quad \int_{B_1^+} u_{x_n}(x', x_n) v(x) \, dx = -\int_{B_1^+} u(x', x_n) v_{x_n}(x) \, dx - \int_{|x'| \le 1} Tr\; u(x',0) Tr\; v(x',0) \, dx'.$$

4. Έστω $1 \le p < n$, και $u \in \mathbf{D}_0^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, ώστε

$$Tr\ u(x',0) = 0,\ \text{ς. π. } x' \in \mathbf{R}^{n-1},$$

και θέτουμε

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η $\overline{u}$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη (1ης τάξης) και μάλιστα $\overline{u} \in \mathbf{D}_0^{1,p}(\mathbf{R}^n)$.

5. Αποδείξτε την ακόλουθη Ανισότητα Poincare :

$$\int_0^1 \left(u(t) \ - \ \fint_0^1 u\ dt \right)^2 dt \ \le \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2\ dt\ , \quad \forall\ u\ \in\ \mathbf{H}^1[0,1].$$

Υπόδειξη: Υπάρχει πάντοτε $\rho \in [0,1]$ ώστε $u(\rho)\ - \fint_0^1 u(t)\ dt = 0$, (γιατί ;)

6. Έστω U ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_U |u|^2\ dx\ \le\ c \int_U |\nabla u|^2\ dx, \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(U).$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>