Τετάρτη 29 Μαρτίου 2017

Α. Τερτίκας

ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

(Φυλλάδιο 3)

1. Έστω Ω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Θεωρούμε γνωστό ότι:

$$0 < \ \lambda_1 \ = \ \inf_{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \ |\nabla u|^2 \ dx}{\int_\Omega \ |u|^2 \ dx} \ .$$

Αποδείξτε ότι το προηγούμενο πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει ελαχιστοποιητή, δηλ. υπάρχει $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) - \{0\}$ ώστε

$$0 < \ \lambda_1 \ = \ \frac{\int_\Omega \ |\nabla u|^2 \ dx}{\int_\Omega \ |u|^2 \ dx} \ .$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η u είναι $\mathbf{H}_0^1(U)$ ασθενής λύση του

$$-\Delta u(x) \ = \ \lambda_1 \ u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Δηλ.

$$\int_\Omega \ \nabla u \cdot \nabla \phi \ dx \ = \ \lambda_1 \ \int_\Omega \ u\phi \ dx, \quad \forall \ \phi \ \in \ \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

2. (Πρόβλημα Neumann) Έστω Ω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\mathbf{C}^1$ σύνορο. Η συνάρτηση $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος Neumann

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

αν ικανοποιεί

$$\int_\Omega \ \nabla u \cdot \nabla \phi \ dx = \int_\Omega \ f\phi \ dx, \quad \forall \phi \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Αποδείξτε ότι αν το ανωτέρω πρόβλημα έχει $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ασθενή λύση τότε πρέπει να ισχύει

$$\int_\Omega \ f(x) \ dx = 0. \qquad (\star)$$

Αντιστρόφως αν η f ικανοποιεί την $(\star)$ αποδείξτε τότε ότι το πρόβλημα έχει ασθενή λύση.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την κατάλληλη ανισότητα Poincare .

3. (Ανισότητα Poincare) Έστω Ω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\mathbf{C}^1$ σύνορο. Έστω επίσης $E \subseteq \Omega$ μετρήσιμο ώστε :

$$0 \ < \ |E| \ < \ |\Omega| \ .$$

Αποδείξτε ότι εάν $\varepsilon \ > \ 0$, τότε υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\fint_{\Omega} |u|^2 \, dx \ \leq \ (1+\varepsilon) \ \fint_{E} |u|^2 \, dx \ + \ c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

4. Έστω $B_1^+ \ = \{(x,y)| \ x^2+y^2<1, \ \ y>0,\}$, $f \in Ł^2(B_1^+)$ και $u \in \mathbf{H}_0^1(B_1^+)$ ασθενής λύση του

$$-\Delta u(x,y) \ = \ f(x,y), \quad (x,y) \in B_1^+,$$

$$u(x,y) \ = \ 0, \quad (x,y) \in \partial B_1^+.$$

Αποδείξτε ότι $u \in \mathbf{H}^2(B_{1/2}^+)$ και μάλιστα υπάρχει απόλυτη σταθερά c (που δεν εξαρτάται από την u) ώστε να ισχύει

$$\| \ u \ \|_{\mathbf{H}^2(B_{1/2}^+)} \leq c(\| \ f \ \|_{L^2(B_1^+)} + \| \ u \ \|_{L^2(B_1^+)}).$$

5. Έστω Ω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ με $\mathbf{C}^1$ σύνορο και Θεωρούμε συναρτησιακό:

$$I[u] \ = \ \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \, dx \ + \ \int_{\Omega} |u|^3 \, dx \ + \ \int_{\Omega} f \ u \, dx \quad u \ \in \ \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Εάν $f \ \in \ Ł^2(\Omega)$, αποδείξτε ότι:
α) Το συναρτησιακό ορίζεται καλά για $u \ \in \ \mathbf{H}^1(\Omega)$.
β)

$$-\infty \ < \ \inf_{v \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \ I[v] \ .$$

γ) Υπάρχει συνάρτηση $u \ \in \ \mathbf{H}^1(\Omega)$ ώστε :

$$I[u] \ = \ \inf_{v \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \ I[v] \ .$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ