Τετάρτη 26 Απριλίου 2017

Α. Τερτίκας

<u>ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ</u>

(Φυλλάδιο 4)

1. (Εναλλακτική προσέγγιση) Έστω Ω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\mathbf{C}^1$ σύνορο. Έστω $f \in L^2(\Omega)$, ικανοποιεί

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0. \qquad (\star)$$

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

έχει $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ασθενή λύση θεωρώντας για $\varepsilon > 0$ τα προβλήματα

$$-\Delta u_\varepsilon(x) + \varepsilon u_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

2. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\partial\Omega \in \mathbf{C}^2$. Η συνάρτηση $u \in \mathbf{H}^2_0(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του ΠΣΤ

$$\Delta^2 u(x) \ = \ f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) \ = \ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

αν ικανοποιεί

$$\int_\Omega \Delta u\, \Delta\phi\, dx \ = \ \int_\Omega f\phi\, dx, \quad \forall\ \phi \ \in \ \mathbf{H}^2_0(\Omega).$$

Εάν $f \in L^2(\Omega)$, αποδείξτε ότι το ΠΣΤ έχει $\mathbf{H}^2_0(\Omega)$ ασθενή λύση. Αποδείξτε επίσης το μονοσήμαντο των $\mathbf{H}^2_0(\Omega)$ ασθενών λύσεων του ΠΣΤ .

3. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n, n \geq 2$. Έστω επίσης το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{b} : \Omega \to \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{b} \in (W^{1,p}(\Omega))^n,$$

με $p > \frac{n}{2}$ και τέτοιο ώστε

$$div\ \mathbf{b}(x) \ = \ 0.$$

Αποδείξτε ότι για $f \in L^2(\Omega)$ το ΠΣΤ

$$-\Delta u(x) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u(x) \ = \ f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) \;=\; 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

έχει $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ ασθενή λύση. Ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων ;

4. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\partial\Omega \in \mathbf{C}^1$. Η συνάρτηση $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του ΠΣΤ

$$-\Delta u(x) \;=\; f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \;=\; 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

αν ικανοποιεί

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\phi(x)\, dS \;=\; \int_\Omega f\phi\, dx, \quad \forall\, \phi \;\in\; \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Εάν $f \in L^2(\Omega)$, αποδείξτε ότι το ΠΣΤ έχει $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ασθενή λύση. Αποδείξτε επίσης το μονοσήμαντο των $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ασθενών λύσεων του ΠΣΤ .
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι η σχέση

$$||u||_{\mathbf{H}} \;=\; \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2\, dS\right)^{1/2}$$

ορίζει ισοδύναμη νόρμα με την συνήθη $\mathbf{H}^1(\Omega)$ νόρμα.
Επίσης μπορείτε να θεωρείστε γνωστό ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα ίχνους

$$\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\, dS\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \le c\, \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\, dx\right), \quad \forall\, u \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

και επομένως έχουμε την συμπαγή εμφύτευση

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\partial\Omega) \text{ εαν } 1 \le p < \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

5. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ και $f \in L^2(\Omega)$. Έστω επίσης

$$\{w_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbf{H}^1_0(\Omega),$$

το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων στον $L^2(\Omega)$, ορθογώνιο στον $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$.
Υποθέτουμε ότι

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k(x),$$

λύνει το σύστημα

$$\int_\Omega \nabla u_m \, \nabla w_k \, dx \;=\; \int_\Omega f w_k \, dx, \quad k = 1, \cdots, m.$$

(Γιατί το σύστημα έχει λύση;)

Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία u_{m_j} και $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$u_{m_j} \rightharpoonup u, \quad \text{στον} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η u είναι $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ασθενής λύση του ΠΣΤ

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>