ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 10 Μαΐου 2017

Α. Τερτίκας

<u>ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ</u>

(Φυλλάδιο 5)

1. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\partial\Omega \in \mathbf{C}^1$. Αποδείξτε την ύπαρξη ασθενούς λύσης στο Π.Α.Σ.Τ. (Neumann):

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T]$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega,$$

όταν

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad g \in L^2(\Omega).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων στον $L^2(\Omega)$, ορθογώνιο στον $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Για παράδειγμα ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Neumann

$$-\Delta w_k(x) = \mu_k w_k(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w_k(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Στη συνέχεια κατασκευάστε λύση με τη μέθοδο Galerkin. Η προσεγγιστική λύση θα είναι της μορφής

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k(x).$$

2. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με $\partial\Omega \in \mathbf{C}^2$. Θεωρούμε το πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ)

$$u_t(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T],$$

$$u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega.$$

Για $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $g \in L^2(\Omega)$ να ορίσετε ασθενή λύση στο πρόβλημα και στη συνέχεια

α) αποδείξτε την ύπαρξη ασθενών λύσεων.
β) Εάν επιπρόσθετα ισχύει,

$$g \in \mathbf{H}_0^2(\Omega),$$

τι επιπρόσθετη ομαλότητα έχουμε στις λύσεις;

Υπόδειξη: Θεωρήστε $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων στον $L^2(\Omega)$, ορθογώνιο στον $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$. Για παράδειγμα ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος ιδιοτιμών

$$\Delta^2 w_k(x) \ = \ \lambda_k w_k(x), \quad x \in \Omega,$$

$$w_k(x) = \frac{\partial w_k(x)}{\partial \nu} \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

και κατασκευάστε λύση με τη μέθοδο Galerkin.

3. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n, n \geq 2$. Έστω επίσης το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{b} : \Omega \to \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{b} \in (W^{1,p}(\Omega))^n,$$

με $p > \frac{n}{2}$ και τέτοιο ώστε

$$div\, \mathbf{b}(x) \ = \ 0.$$

Αποδείξτε ότι για $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \ \ g \in L^2(\Omega)$ το ΠΑΣΤ

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u(x,t) \ = \ f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t \in (0,T],$$

$$u(x,t) \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = g(x), \ \ x \in \Omega,$$

έχει ασθενή λύση. Ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων ;

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>