ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 2 Μαρτίου 2023

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΜΔΕ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

(Φυλλάδιο 1)

1. Έστω $\Omega = (0,1)^2$ και ορίζουμε u από τη σχέση :

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 + x - y, & 0 < y < x < 1, \\ 1 + y - x, & 0 < x < y < 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε πως η u έχει πρώτης τάξης ασθενείς παραγώγους.

2. Έστω $\Omega = (0,1)^2$ και ορίζουμε u από τη σχέση :

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 + x - y, & 0 < y < x < 1, \\ 2 + y - x, & 0 < x < y < 1. \end{cases}$$

Έχει η u πρώτης τάξης ασθενείς παραγώγους;

3. Εαν $u \in \mathbf{W}^{1,6}[0,1]$, αποδείξτε ότι

$$|u(x) - u(y)|^6 \leq |x-y|^5 \int_0^1 (u'(x))^6 \, dx, \quad \sigma.\pi. \; x, y \in [0,1].$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά την ανισότητα για $u \in \mathbf{C}^1[0,1]$ και στη συνέχεια πως υπάρχει συνεχής αντιπρόσωπος.

4. Για $1 \leq p < n, \; 2 \leq n$, βρείτε τον εκθέτη q ώστε να υπάρχει θετική σταθερά $c = c_{n,p}$ τέτοια ώστε να ισχύει η ανισότητα:

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x',0)|^q \, dx' \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_{\mathbf{R}^n_+} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \, u \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Στη συνέχεια να αποδείξτε την ανισότητα για την επιλογή σας.

5. Έστω $B_1^+ = \{(x', x_n) \in B_1,\ x_n > 0,\}$ και $u \in \mathbf{W}^{1,p}(B_1^+),\ v \in \mathbf{W}^{1,q}(B_1^+)$, όπου $1 < p, q$ είναι τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Αποδείξτε ότι:

$$a) \qquad uv \in \mathbf{W}^{1,1}(B_1^+),$$

$$b) \quad \int_{B_1^+} u_{x_n}(x', x_n) v(x)\ dx = -\int_{B_1^+} u(x', x_n) v_{x_n}(x)\ dx - \int_{|x'| \le 1} Tr\ u(x', 0) Tr\ v(x', 0)\ dx'.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ