



Παρασκευή 17 Ιανουαρίου 2014

A. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Υπόδειγμα διαγωνίσματος

Θέμα 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπους

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$g(x) = x \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ η συνάρτηση g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 2. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Με χρήση του κριτηρίου Riemann, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}, \quad x \in [0, 1],$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

Θέμα 3. Δίνεται ότι η συνάρτηση $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$g(x) = 2 + \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[-1, 1]$ και υπολογίστε την $g(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Θέμα 4. Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο f της ακολουθίας f_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$f_n \rightarrow f, \quad n \rightarrow +\infty,$$

δεν είναι ομοιόμορφη.

Ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx ?$$

Θέμα 5. Δίνεται η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}, \quad x > 0.$$

Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της σειράς είναι :

(α) Ομοιόμορφη στο $[1, +\infty)$.

(β) Δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, +\infty)$.

Θέμα 6. Έστω η συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k f'(x) dx = f(1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

Θέμα 7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^{2k} f(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

Να λυθούν ακριβώς 6 θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ