Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παν/μίου Κρήτης
Εξεταστική περίοδος εαρινού εξαμήνου
Πέμπτη, 12 Ιούνη 2008

**Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ**

Διδάσκων: Α. Τόγκας

# Θέματα

(Δικαιολογείστε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας)

**Θέμα 1** (2.5 μον.) Έστω τελεστής $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ που δίνεται από τον τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2\ ,\ x_2\ ,\ x_3 + x_4\ ,\ x_4).$$

**(α)** Να βρεθούν οι υπόχωροι $\ker T$ και $\mathrm{Im}\, T$ του $\mathbb{R}^4$ και να χαρακτηρισθεί ο $T$ ως προς την αντιστρεψιμότητα.
**(β)** Να βρεθούν οι υπόχωροι $\ker (T - Id)$ και $\mathrm{Im}\,(T - Id)$ του $\mathbb{R}^4$, όπου $Id : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι "1-1" απεικόνιση η $T - Id$, και γιατί ;
**(γ)** Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $T$.

**Θέμα 2** (2.5 μον.) Δίνεται τελεστής $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3\, x_3\ ,\ x_2\ ,\ 2\, x_3).$$

**(α)** Να βρεθεί ο πίνακας του $T$ στην συνηθισμένη βάση του $\mathbb{R}^3$, καθώς και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $T$.
**(β)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $T$ και να βρεθεί μια βάση Jordan για τον $T$.
**(γ)** Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan ( που αντιστοιχεί στη βάση Jordan που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα ) καθώς και ο πίνακας ομοιότητας για τον $T$.

**Θέμα 3** (2.5 μον.) Έστω $A$ μιγαδικός πίνακας $4 \times 4$ τέτοιος που $A^3 - A^2 = A - I$. Άν ο $A$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε
**(α)** Να βρεθούν τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα $m(z)$ του $A$.
**(β)** Να δωθούν οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan του πίνακα $A$.

**Θέμα 4** (2.5 μον.) Δίνεται τελεστής $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ με τύπο

$$T(z_1, z_2, z_3) = (a\, z_2\ ,\ b\, z_1\ ,\ c\, z_3)\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

**(α)** Να βρεθεί ο συζυγής τελεστής $T^*$. Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι $a, b, c$ έτσι ώστε ο τελεστής $T$ να είναι αυτο-συζυγής ;
**(β)** Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*\, T$.
**(γ)** Να βρεθεί τελεστής $S$ τέτοιος που $T = S\sqrt{T^*\, T}$, και να δειχθεί ότι ο $S$ είναι ισομετρία.

*Καλή επιτυχία*

**Ενδεικτικές απαντήσεις στα θέματα**

**Θέμα 1**

**α)** Ζητείται να βρεθούν οι υπόχωροι $\ker T$ και $\operatorname{Im} T$ δηλ.

$$\ker T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{τέτοια που} \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)\}$$

και

$$\operatorname{Im} T = \{y \in \mathbb{R}^4 \quad \text{τέτοια που} \quad \exists\, x \in \mathbb{R}^4 \quad \text{έτσι ώστε} \quad T\,x = y\}$$

και να χαρακτηρισθεί ο τελεστής $T$ ως προς την αντιστρεψιμότητα.

*(Α΄ τρόπος, δίχως την επιλογή συγκεκριμένης βάσης)*

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\ker T$: Από τον ορισμό του τελεστή $T$,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0) \quad &\Rightarrow \quad (x_1 + x_2\,,\, x_2\,,\, x_3 + x_4\,,\, x_4) = (0,0,0,0) \Rightarrow \\ & \quad\;\; x_1 + x_2 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0 \quad \text{και} \quad x_3 + x_4 = 0 \quad \text{και} \quad x_4 = 0 \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ που σημαίνει ότι $\ker T = \{(0,0,0,0)\}$. Άρα ο τελεστής $T$ είναι "1-1" απεικόνιση.

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\operatorname{Im} T$: Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι για έναν τελεστή $T$ οι προτάσεις

- ο $T$ είναι "1-1" απεικόνιση
- ο $T$ είναι "επί" απεικόνιση
- ο $T$ είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση

είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Οπότε ο $T$ είναι και "επί" απεικόνιση. Συνεπώς $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^4$.

Αλλιώς (άν δεν θυμόμαστε την προηγούμενη ισοδυναμία), από το θεώρημα της διάστασης γνωρίζουμε ότι

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \tag{1}$$

Είναι προφανές ότι $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ και $\dim \ker T = 0$. Οπότε από την σχέση (1) έχουμε ότι $\dim \operatorname{Im} T = 4$ και επειδή $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^4$, αναγκαστικά έχουμε ότι $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^4$. Δηλαδή ο $T$ είναι "επί" απεικόνιση.

Και οι δυό αιτιολογήσεις μας οδηγούν προφανώς στο συμπέρασμα ότι ο $T$ είναι και αντιστρέψιμη απεικόνιση.

*(Β΄ τρόπος, επιλέγοντας συγκεκριμένη βάση)*

Ο πίνακας του τελεστή $T$ στη συνηθισμένη βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του $\mathbb{R}^4$ έχει τη μορφή

$$[T]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\ker T$: Για το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή η μοναδική λύση είναι η μηδενική. Άρα $\ker T = \{(0,0,0,0\}$ και συνεπώς ο $T$ είναι "1-1" απεικόνιση.

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\mathrm{Im}\, T$: Για το παρακάτω γραμμικό σύστημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 + x_4 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_4 \end{array}$$

δηλαδή για κάθε $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια λύση για το παραπάνω σύστημα, οπότε το τυχαίο $y \in \mathrm{Im}\, S$ είναι της μορφής $y_1\, e_1 + y_2\, e_2 + y_3\, e_4 + y_4\, e_4$, άρα $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^4$ και συνεπώς ο $T$ είναι "επί" απεικόνιση.

Η παραπάνω ανάλυση μας πληροφορεί ότι ο $T$ είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγούμαστε άμεσα και μετά από τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα του τελεστή $T$ που είναι ίση με $1 \neq 0$.

**β)** Ζητείται να βρεθούν οι υπόχωροι $\ker\, S$ και $\mathrm{Im}\, S$ όπου $S = T - Id$ δηλ.

$$\ker\, S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{τέτοια που} \quad S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)\}$$

και

$$\mathrm{Im}\, S = \{y \in \mathbb{R}^4 \quad \text{τέτοια που} \quad \exists\, x \in \mathbb{R}^4 \quad \text{έτσι ώστε} \quad S\, x = y\}$$

και να χαρακτηρισθεί ο τελεστής $S$ ως προς την αντιστρεψιμότητα.

Πρώτα βρίσκουμε τον τύπο του τελεστή $S$. Έχουμε

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (T - Id)(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= T(x_1, x_2, x_3, x_4) - Id(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (x_1 + x_2\, ,\, x_2\, ,\, x_3 + x_4\, ,\, x_4) - (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (x_2, 0, x_4, 0). \end{aligned}$$

*(Α΄ τρόπος, δίχως την επιλογή συγκεκριμένης βάσης)*

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\ker\, S$: Από τον ορισμό του τελεστή $S$,

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0) \quad &\Rightarrow \quad (x_2\, , 0\, ,\, x_4\, , 0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \\ & \quad\; x_2 = x_4 = 0 \quad \text{και} \quad x_1, x_3 \quad \text{αυθαίρετοι πραγματικοί} \end{aligned}$$

Οπότε ο υπόχωρος $\ker S$ παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,0,0)$ και $(0,0,1,0)$, δηλ. $\ker S = \{\, a(1,0,0,0) + b(0,0,1,0), a, b \in \mathbb{R}\,\}$ και είναι γενικά διαφορετικός από $\{(0,0,0,0)\}$. Οπότε ο τελεστής $S$ δεν είναι "1-1" απεικόνιση και άρα δεν είναι και αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε τον υπόχωρο $\mathrm{Im}\, S$: Έχουμε

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \Rightarrow (x_2, 0, x_4, 0) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Οπότε όλα τα $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{Im}\, S$ έχουν την μορφή $\kappa(1,0,0,0) + \lambda(0,0,1,0)$, δηλαδή $\mathrm{Im}\, S = \ker S$.

*(Β΄ τρόπος, επιλέγοντας συγκεκριμένη βάση)*
Αφήνεται στον αναγνώστη.

**γ)** Ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή $T$. Επειδή $\mathrm{Im}\, S = \ker S$ τότε για το τυχαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^4$, έχουμε $S\, x \in \mathrm{Im}\, S$ άρα και $S\, x \in \ker S$ και οπότε $S^2 x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, δηλαδή $S^2 = 0$ και επειδή $S = T - Id$ έχουμε ότι $(T - Id)^2 = 0$ και συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$ του $T$ είναι $m(z) = (z-1)^2$.

Αλλιώς, ο πίνακας του τελεστή $T$ είναι σε μορφή Jordan με μοναδική ιδιοτιμή $1$ και με μέγιστο υπο-block Jordan διάστασης $2 \times 2$, οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m(z) = (z-1)^2$.

**Θέμα 2**

**α)** Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $T$ στη συνηθισμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,0)\,, &(2)\\ T(0,1,0) &= (1,1,0)\,, &(3)\\ T(0,0,1) &= (3,0,2)\,. &(4) \end{aligned}$$

Οπότε

$$[T]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A$ είναι άνω τριγωνικός, άρα οι ιδιοτιμές βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο με αλγεβρική πολλαπλότητα η κάθε μία ίση με τις φορές που εμφανίζεται στην κύρια διαγώνιο. Οπότε υπάρχουν δύο ιδιοτιμές οι $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και η οι $\lambda_2 = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(z)$ του τελεστή $T$ είναι

$$\chi(z) = (z-1)^2\,(z-2)$$

**β)** Για την εύρεση της βάσης Jordan έχουμε:

<u>Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$: Υπολογισμός (γενικευμένων) ιδιοδιανυσμάτων</u>

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει $x_2 = x_3 = 0$ και $x_1$ αυθαίρετος πραγματικός **διαφορετικός** του 0. Άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1 είναι το

$$u_1 = (1,0,0)$$

Για τον υπολογισμό ενός γενικευμένου $x_2$ ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_2' + 3x_3' &= 1 \\ 0 &= 0 \\ x_3' &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_2' &= 1 \\ 0 &= 0 \\ x_3' &= 0 \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει $x_1'$ αυθαίρετος πραγματικός, $x_2' = 1$, και $x_3 = 0$. Δηλαδή έχουμε ένα νέο, (γενικευμένο) ιδιοδιάνυσμα το

$$u_2 = (0,1,0)$$

<u>Ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$: Υπολογισμός ιδιοδιανύσματος</u>

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + 3y_3 &= 0 \\ -y_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 3y_3 \\ y_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει $y_3$ αυθαίρετος πραγματικός **όχι** μηδέν, $y_2 = 0$, και $y_1 = 3y_3$ και συνεπώς το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι το

$$u_3 = (3,0,1)$$

Συνοψίζοντας έχουμε κατασκευάσει μια βάση Jordan για τον τελεστή $T$, η οποία αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, u_2, u_3\}$.

**γ)** Για την κανονική μορφή Jordan που αντιστοιχεί στην βάση $\{u_1, u_2, u_3\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} T\,u_1 &= u_1 \\ T\,u_2 &= u_1 + u_2 \\ T\,u_3 &= 2\,u_3 \end{aligned}$$

Άρα η κανονική μορφή Jordan του τελεστή $T$ έχει την μορφή

$$[T]_{\{J\}} = \qquad \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

και ο πίνακας ομοιότητας (ή αλλαγής βάσης) δίνεται από τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος παράγεται βάζοντας για στήλες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε προηγουμένως και έτσι έχουμε

$$[T]_{\{e\}} = P\ [T]_{\{J\}}\, P^{-1}$$

**Θέμα 3**

**α)** Ζητείται να βρεθούν τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα $m(z)$ για έναν μιγαδικό πίνακα $4 \times 4$ που

$$A^3 - A^2 = A - I \tag{5}$$

και ο οποίος δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Γενικά υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για τα ελάχιστα πολυώνυμα: η δράση τους στον τελεστή $T$ να αντιστοιχεί στην συνθήκη γραμμικής εξάρτησης των παρακάτω διανυσματικών χώρων πινάκων

$$\begin{array}{cc} (i) & \{I, A\} \\ (ii) & \{I, A, A^2\} \\ (iii) & \{I, A, A^2, A^3\} \end{array}$$

Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται γιατί οδηγεί σε διαγωνοποιήσιμο πίνακα (πολλαπλάσιος του μοναδιαίου πίνακα), οπότε αρκεί να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $(ii)$ και $(iii)$.

Περίπτωση $(ii)$

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το μονικό πολυώνυμο

$$m(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

οπότε έχουμε $m(A) = 0$ δηλ.

$$A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \Rightarrow A^3 + a_1 A^2 + a_0 A = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} (a_1 + 1)A^2 + (a_0 + 1)A - I = 0$$

Θα πρέπει $a_1 + 1 \neq 0$ γιατί στην αντίθετη περίπτωση ο πίνακας θα ήταν διαγωνοποιήσιμος, οπότε έχουμε

$$\begin{array}{r} A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \\ (a_1+1)A^2 + (a_0+1)A - I = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \\ A^2 + \frac{a_0+1}{a_1+1}A - \frac{1}{a_1+1}I = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \\ a_1 = \frac{a_0+1}{a_1+1}, a_0 = -\frac{1}{a_1+1} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \\ (a_0+1)^2(a_0-1) = 0, a_1 = -(\frac{1}{a_0}+1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A^2 + a_1 A + a_0 I = 0 \\ a_0 = -1, a_1 = 0 \quad \text{ή} \quad a_0 = 1, a_1 = -2 \end{array}$$

οπότε για την περίπτωση $(ii)$ έχουμε δυο πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα

$$m_1(z) = (z-1)^2 \qquad m_2(z) = (z-1)(z+1)$$

Το $m_2(z)$ απορρίπτεται γιατί οδηγεί σε πίνακα διαγωνοποιήσιμο, οπότε μας μένει μέχρι τώρα το $m_1(z)$

Περίπτωση $(iii)$

Εύκολα βρίσκουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$m_3(z) = (z-1)^2(z+1)$$

που δεν είναι άλλο από το μονικό πολυώνυμο που προκύπτει από την (5).

Συνοψίζοντας έχουμε βρεί δυο πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα, τα $m_1$ και $m_3$

**β)** Ζητείται για κάθε ένα από τα προηγούμενα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα να δωθούν οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan

Για το $m_1 = (z-1)^2$:
Η μοναδική ιδιοτιμή του $A$ είναι $1$ και το μέγιστο Jordan υπο-block είναι διάστασης $2 \times 2$, οπότε έχουμε δύο πιθανές κανονικές μορφές Jordan για τον $A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για το $m_3 = (z-1)^2(z+1)$:
Οι ιδιοτιμές του $A$ είναι $1, -1$ και το μέγιστο Jordan υπο-block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1$ είναι διάστασης $2 \times 2$, ενώ το μέγιστο Jordan υπο-block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-1$ είναι διάστασης $1 \times 1$ οπότε έχουμε τις εξής κανονικές μορφές Jordan για τον $A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Θέμα 4**

Ένα σημείο που χρίζει ιδιαίτερης προσοχής στο θέμα αυτό είναι ότι μας δίνεται ένας **μιγαδικός** διανυσματικός χώρος και όχι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

**α)** Μας ζητείται να βρούμε τον συζυγή τελεστή του τελεστή $T$ και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι μιγαδικές παράμετροι $a, b, c$ έτσι που ο τελεστής $T$ να είναι αυτοσυζυγής.

Εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας του τελεστή $T$ στην συνηθισμένη και **ορθοκανονική** βάση του $\mathbb{C}^3$ είναι ο

$$[T]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Άρα ο πίνακας του συζυγούς τελεστή $T^*$ του $T$ είναι ο

$$[T^*]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{b} & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

όπου με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή του $z \in \mathbb{C}$. Οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι ο συζυγής τελεστής του $T$ δίνεται από τον τύπο

$$T^*(z_1, z_2, z_3) = (\bar{a}\, z_2, \bar{b}\, z_1, \bar{c}\, z_3)$$

Ο τελεστής $T$ είναι αυτοσυζυγής αν $T = T^*$, οπότε θα πρέπει οι παράμετροι $a, b, c$ να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a = \bar{b}, \quad c = \bar{c}$$

**β)** Μας ζητείται να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*\,T$. Πρώτα υπολογίζουμε τον τελεστή $T^*\,T$. Εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας τελεστή $T^*\,T$ στην ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι

$$[T^*T]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} b\bar{b} & 0 & 0 \\ 0 & a\bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & c\bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |a|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |c|^2 \end{bmatrix}$$

όπου με $|\ |$ συμβολίζουμε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού, δηλ. $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}},\ z \in \mathbb{C}$. Οπότε έχουμε

$$T^*T(z_1, z_2, z_3) = (|b|^2 z_1, |a|^2 z_2, |c|^2 z_3)$$

Άρα η τετραγωνική ρίζα του τελεστή $T^*T$ είναι ο

$$\sqrt{T^*T}(z_1, z_2, z_3) = (|b| z_1, |a| z_2, |c| z_3)$$

και ο πίνακας του τελεστή $\sqrt{T^*T}$ στη βάση $\{e\}$ δίνεται από τη σχέση

$$[\sqrt{T^*T}\,]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} |b| & 0 & 0 \\ 0 & |a| & 0 \\ 0 & 0 & |c| \end{bmatrix}$$

**γ)** Μας ζητείται να βρούμε τελεστή $S$ τέτοιο που $T = S\sqrt{T^*T}$ και να αποδείξουμε ότι ο $S$ είναι ισομετρία. Στα παρακάτω εργαζόμαστε στην συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^3$.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας του αντίστροφου $(\sqrt{T^*T})^{-1}$ του τελεστή $\sqrt{T^*T}$ είναι ο

$$[(\sqrt{T^*T})^{-1}]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|a|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|c|} \end{bmatrix}$$

οπότε

$$[S]_{\{e\}} = [T]_{\{e\}}[(\sqrt{T^*T})^{-1}]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|a|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|c|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{|a|} & 0 \\ \frac{b}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{|c|} \end{bmatrix}$$

Όπως γνωρίζουμε από την θεωρία, μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο τελεστής $S$ ισομετρία είναι $S^*S = Id$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$[S^*]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{b}}{|b|} & 0 \\ \frac{\bar{a}}{|a|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{c}}{|c|} \end{bmatrix}$$

και συνακόλουθα

$$[S^*]_{\{e\}}[S]_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{b}}{|b|} & 0 \\ \frac{\bar{a}}{|a|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{c}}{|c|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{|a|} & 0 \\ \frac{b}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{|c|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b\bar{b}}{|b|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\bar{a}}{|a|^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\bar{c}}{|c|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα $S^*S = Id$, οπότε ο τελεστής $S$ είναι ισομετρία.