ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2012

Ασκήσεις για προσωπική μελέτη

Είναι απολύτως απαραίτητο να μπορείτε να τις λύνετε, τουλάχιστον τις υπολογιστικές!

1. Έστω ότι A, B, C είναι γενικοί 2×2 πίνακες, δηλαδή,
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$
και ανάλογα για τους B, C. Υπολογίστε τους πίνακες $(A \cdot B) \cdot C$ και $A \cdot (B \cdot C)$ και δείξτε ότι είναι ίσοι.
Ανάλογο ζήτημα αν οι A, B, C είναι διαστάσεως 2×3, 3×2 και 2×2, αντιστοίχως.

2. Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω πίνακες. Στους πίνακες αυτούς, οι στήλες, πλην της τελευταίας, δίνουν τους συντελεστές των αγνώστων, ενώ η τελευταία στήλη δίνει τα δεξιά μέλη των αντιστοίχων εξισώσεων.
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$
Απαντήσεις: Οι λύσεις είναι $(3, 1, 0)$, $(3, -2, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$.

3. Θεωρήστε το σύστημα
$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y + bz &= 11 \\ 2x + 3y - 4z &= b \end{aligned}$$
όπου a, b είναι παράμετροι. Εφαρμόστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss προκειμένου να φέρετε το σύστημα σε τέτοια μορφή, που να μπορείτε εύκολα να απαντήσετε στα εξής ερωτήματα: Για ποιες τιμες αυτών των παραμέτρων το σύστημα έχει μία, ακριβώς, λύση, για ποιες τιμες καμμία και για ποιες τιμες άπειρες λύσεις. Στην τελευταία περίπτωση, δώστε τη γενική λύση.
Απαντήσεις: Για $b \neq -5$ το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση. Άν $b = -5$ και $a \neq -16$, το σύστημα δεν έχει λύση. Αν $b = -5$ και $a = -16$, το σύστημα έχει λύση $x = -43 - 7z$, $y = 27 + 6z$, όπου z οποιοσδήποτε αριθμός.

4. Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + by - z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

όπου b είναι παράμετρος. Αποδείξτε ότι για μία, ακριβώς, τιμή του b το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, που εκφράζονται συναρτήσει μιας παραμέτρου, ενώ για όλες τις υπόλοιπες τιμές το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση, την οποία να υπολογίσετε.

Απαντήσεις: Αν $b = -2$, τότε η λύση είναι $(x, y, z) = (-t, -t, t)$, όπου t οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Για $b \neq -2$, μοναδική λύση είναι η $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

5. Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 3x + 3y - z &= 6 \\ x + ay + z &= -1 \end{aligned}$$

όπου a είναι παράμετρος. Ακολουθώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, αποδείξτε ότι για μία, ακριβώς, τιμή του a το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ για όλες τις υπόλοιπες τιμές το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση, εκφραζόμενη συναρτήσει του a, την οποία να υπολογίσετε.

Απαντήσεις: Αν $a = 1$, το σύστημα είναι αδύνατο. Αν $a \neq 1$, μοναδική λύση είναι η $(x, y, z) = (\frac{a-2}{a-1}, \frac{1}{a-1}, -3)$.

6. Έστω

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι N^2 είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλαδή, όλα τα στοιχεία του είναι 0. Μετά, με επαγωγή, αποδείξτε ότι N^k είναι ο μηδενικός πίνακας για κάθε $k \geq 2$. Αποδείξτε ότι

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix},$$

και, γενικά (επαγωγική απόδειξη), για $k \geq 2$,

$$M^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix},$$

7. Θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ποια από τα 6 γινόμενα ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA ορίζονται; Υπολογίστε τα, στη συνέχεια.

Απαντήσεις:

$$ABC = \begin{bmatrix} 50 & -90 & 20 \\ -68 & 97 & -32 \\ -30 & 54 & -12 \end{bmatrix}, \quad BCA = \begin{bmatrix} 25 & -192 \\ -18 & 110 \end{bmatrix}, \quad CAB = \begin{bmatrix} -82 & -48 & 82 & 196 \\ 78 & 46 & -78 & -186 \\ -55 & -45 & 55 & 115 \\ -50 & -32 & 50 & 116 \end{bmatrix}$$

8. Στην άσκηση αυτή όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες P_{ij} και $E_{ij}(t)$ είναι διαστάσεως 5×5.

- Αποδείξτε ότι $P_{45}E_{53}(t)P_{45} = E_{43}(t)$ και συμπεράνατε ότι $P_{45}E_{53}(t) = E_{43}(t)P_{45}$.
- Αποδείξτε ότι $P_{45}E_{52}(t)P_{45} = E_{42}(t)$ και συμπεράνατε ότι $P_{45}E_{52}(t) = E_{42}(t)P_{45}$.
- Αποδείξτε ότι $P_{45}E_{51}(t)P_{45} = E_{41}(t)$ και συμπεράνατε ότι $P_{45}E_{51}(t) = E_{41}(t)P_{45}$.
- Αποδείξτε ότι $P_{45}E_{21}(t)P_{45} = E_{21}(t)$ και συμπεράνατε ότι $P_{45}E_{21}(t) = E_{21}(t)P_{45}$.

Βάσει των παραπάνω αποδείξτε ότι

$$P_{45}E_{53}(t_1)E_{52}(t_2)E_{51}(t_3)E_{21}(t_4) = E_{43}(t_1)E_{42}(t_2)E_{41}(t_3)E_{21}(t_4)P_{45}.$$

Έστω $M = E_{43}(t_1)E_{42}(t_2)E_{41}(t_3)E_{21}(t_4)$. Υπολογίστε τον αντίστροφο του M, δηλαδή, πίνακα A, τέτοιον ώστε $AM = I_4$ και $MA = I_4$.

Απάντηση:

$$A = E_{21}(-t_4)E_{41}(-t_3)E_{42}(-t_2)E_{43}(-t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -t_3 & -t_2 & -t_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Με τη βοήθεια της διαδικασίας Gauss-Jordan για την εύρεση του αντιστρόφου πίνακα, βρείτε τις τιμές του c για τις οποίες ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίστε τον αντίστροφό του όταν $c = 4$.

Απάντηση στο δεύτερο ερώτημα: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 22 & 7 & 6 \\ 13 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

10. Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 & -12 \\ -1 & -6 & 8 & 13 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

11. Με τη μέθοδο Gauss-Jordan υπολογίστε τους αντιστρόφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Απαντήσεις: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$, μη αντιστρέψιμος, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

12. Στην άσκηση αυτή οι πίνακες τύπου $E_{ij}(\lambda)$ είναι 4×4 και οι πίνακες A και U έχουν διάσταση $4 \times n$. Ο U είναι κλιμακωτός. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε $4{\times}4$ κάτω τριγωνικό πίνακα L και $4{\times}4$ πίνακα μετάθεσης P (ο P μπορεί να είναι και ταυτοτικός), έτσι ώστε $PA = LU$.

(α′) $E_{43}(2)E_{42}(-1)P_{34}E_{31}(2)A = U$.

(β′) $E_{42}(3)P_{34}E_{31}(2)P_{34}E_{21}(1)A = U$.

(γ′) $E_{43}(3)P_{34}E_{31}(-1)E_{21}(2)A = U$.

Απαντήσεις:

(α′): $P = P_{34},\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (β′): $P = I_4,\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(γ′): $P = P_{34},\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Δώστε την πλήρη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + 5z &= 4\,. \end{aligned}$$

Λύση: $x_1 = -3 - 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 2,\ \ t \in \mathbb{R}$.

14. Δώστε την πλήρη λύση του συστήματος

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Λύση: $x_1 = 7a - 3b - 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = s,\ x_4 = -2a + b,\ \ s, t \in \mathbb{R}$.

15. Υπάρχει μία, ακριβώς, τιμή του c για την οποία το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ -x - 3y + 8z &= c \end{aligned}$$

έχει λύση. Ποια είναι αυτή η τιμή του c και ποια είναι τότε η γενικη λύση του συστήματος;

Απάντηση: $c = -4$. Γι' αυτή την τιμή του c, η γενική λύση είναι $x_1 = 1 - 7t,\ x_2 = 1 + 5t,\ x_3 = t$.

16. Για καθέναν από τους πίνακες A_i, $(i = 1, \ldots, 5)$ βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A_i)$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: Επειδή η βάση του $\mathcal{N}(A_i)$ δεν είναι μονοσημάντως ορισμένη, εκτός κι αν $\mathcal{N}(A_i) = \{\mathbf{0}\}$, για αυτόν τον λόγο, στην περίπτωση που $\mathcal{N}(A_i) \neq \{\mathbf{0}\}$, δίδεται μόνο η διάσταση του $\mathcal{N}(A)$. Αν, (1) η δική σας απάντηση συμφωνεί ως προς τη διάσταση του $\mathcal{N}(A_i)$ και (2) ελέγξτε ότι διανύσματα της βάσης του $\mathcal{N}(A_i)$, τα οποία βρήκατε είναι λύσεις του συστήματος $A_iX = \mathbf{0}$, τότε η λύση σας είναι σωστή.

$\dim \mathcal{N}(A_1) = 4$, $\mathcal{N}(A_2) = \{\mathbf{0}\}$, $\dim \mathcal{N}(A_3) = 3$, $\dim \mathcal{N}(A_4) = 1$, $\mathcal{N}(A_5) = \{\mathbf{0}\}$.

17. Με τους πίνακες A_i όπως στην άσκηση 16, αποφασίστε ποια από τα παρακάτω μη ομογενή συστήματα έχουν λύση και, για εκείνα που έχουν, δώστε την πλήρη λύση τους. Υπενθυμίζεται ότι, η πλήρης λύση ενός μη ομογενούς συστήματος είναι το άθροισμα μιας οποιασδήποτε *ειδικής* λύσης του συν τη *γενική* λύση του αντιστοίχου ομογενούς συστήματος (την οποία θα έχετε βρει έχοντας λύσει πρώτα την άσκηση 16).

$$(1) \quad A_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2) \quad A_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3) \quad A_2\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix},$$

$$(4) \quad A_3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad (5) \quad A_3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad (6) \quad A_4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(7)\quad A_4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (8)\quad A_5\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9)\quad A_5\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Απαντήσεις: Σύστημα (1): Έχει άπειρες λύσεις. Στη γενική λύση υπεισέρχονται δύο παράμετροι. Σύστημα (2): Αδύνατο. Σύστημα (3): Ακριβώς μία λύση. Συστήματα (4), (5), (6): Αδύνατα. Σύστημα (7): Άπειρες λύσεις. Στη γενική λύση υπεισέρχεται μία παράμετρος. Σύστημα (8): Ακριβώς μία λύση. Σύστημα (9): Αδύνατο.

18. Έστω ότι v_1, v_2, v_3 είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

    (α′) Αν τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αποδείξτε ότι και τα διανύσματα $v_1 + 2v_2 + v_3$, $-v_1 + v_2$, $v_1 - 3v_2 + v_3$ είναι, επίσης, γραμμικώς ανεξάρτητα.

    (β′) Αν $-v_1 + v_2 + 5v_3 = \mathbf{0}$, αποδείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 + 2v_2 + v_3$, $-v_1 + v_2$, $v_1 - 3v_2 + v_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

19. Να υπολογιστούν βάσεις για τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 & -7 & -6 \end{bmatrix},$$

    δηλαδή, για τον χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, τον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$, τον μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ και τον αριστερό μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A^T)$.

    Απάντηση (μερική): Η τάξη του A είναι 2, άρα, η βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^4$, η βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ αποτελείται από δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^5$, η βάση του $\mathcal{N}(A)$ αποτελείται από τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^5$ και η βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ αποτελείται από δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^4$. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να βρείτε συγκεκριμένα διανύσματα βάσης.

20. Έστω A ένας πίνακας διαστάσεως $m\times n$, για τον οποίον είναι γνωστό ότι οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και παράγουν τον $\mathbb{R}^m$. Αποδείξτε ότι $m = n =$ τάξη του A.

21. (α′) Έστω ότι V και W είναι τρισδιάστατοι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$. Αποδείξτε ότι η τομή τους περιέχει μη μηδενικά διανύσματα.

    Υπόδειξη. Θεωρήστε μια βάση του V, μια βάση του W και την ένωση των δύο βάσεων. Τα διανύσματα αυτής της ένωσης είναι γραμμικώς εξαρτημένα (γιατί·), άρα ....

(β′) Τροποποιώντας ελαφρά την απόδειξη του (α′), αποδείξτε ότι, V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$ διαστάσεως n και k, αντιστοίχως, και $n + k > m$, τότε η τομή των V και W περιέχει μη μηδενικά διανύσματα.

22. Αποδείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει πίνακας A διαστάσεως 2×3 με την ιδιότητα, το διάνυσμα $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ να ανήκει συγχρόνως και στον χώρο γραμμών του A και στον μηδενόχωρό του. Με ελαφρά τροποποίηση της απόδειξής σας, αποδείξτε ότι αυτό ισχύει για κάθε πίνακα διαστάσεως $m \times 3$.

23. Στην άσκηση αυτή, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι τα διανύσματα της standard βάσης του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.
Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, που προκύπτει από τη σύνθεση τριών στροφών, ως εξής: Πρώτα στρέφεται το (x, y)-επίπεδο κατά γωνία 90^o περί τον άξονα των z, έτσι ώστε το $\mathbf{e}_1$ να συμπέσει με το $\mathbf{e}_2$· ύστερα στρέφεται το (z, x)-επίπεδο κατά γωνία 90^o περί τον άξονα των y, έτσι ώστε το $\mathbf{e}_3$ να συμπέσει με το $\mathbf{e}_1$· τέλος, στρέφεται το (y, z)-επίπεδο κατά γωνία 90^o περί τον άξονα των x, έτσι ώστε το $\mathbf{e}_2$ να συμπέσει με το $\mathbf{e}_3$. Υπολογίστε τον πίνακα της f και τον ‘τύπο’ της (δηλαδή, εκφράστε το $f(x, y, z) =$ συναρτήσει των x, y, z).
Υπόδειξη. Κάθε μία από τις τρεις στροφές υπολογίστε πού ‘πάει’ καθένα από τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Παρατηρήστε ότι, όταν έχομε στροφή περί έναν άξονα, τα διανύσματα του άξονα ‘μένουν ακίνητα’. Με αυτόν τον τρόπο θα βρείτε τον πίνακα κάθε μιας στροφής. Άρα, ο πίνακας της $f \ldots$;
Απάντηση: (Πίνακας της f) = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x, y, z) = (z, -y, x)$.

24. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα

$$f(1, 1, 1) = (1, 0, 1) \quad \text{και} \quad f(0, 1, -1) = (2, 1, 3) \quad \text{και} \quad f(1, 2, 1) = (1, 1, 2).$$

Για αυτή τη γραμμική απεικόνιση f κάνετε τα εξής:

(α′) Υπολογίστε τον πίνακα A της f.
Απάντηση: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(β′) Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}^3)$ είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.
Υπόδειξη: $f(\mathbb{R}^3)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (γιατί;). Αρκεί να δείξετε ότι η διάστασή του είναι 2

(γ′) Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 με την ιδιότητα $f(V) = f(\mathbb{R}^3)$.

Υπόδειξη: Στο προηγούμενο ερώτημα πρέπει να βρήκατε κάποια συγκεκριμένη βάση, έστω w_1, w_2 του $f(\mathbb{R}^3)$. Αρκεί τώρα να βρείτε δύο διανύσματα v_1, v_2 του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $f(v_1) = w_1$ και $f(v_2) = w_2$.

(δ′) Υπολογίστε την αντίστροφη εικόνα του $\{\mathbf{0}\}$.

Υπόδειξη: $f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (γιατί;). Παρατηρήστε ότι αυτός ο διανυσματικός υπόχωρος δεν είναι άλλος από τον μηδενόχωρο του A.

(ε′) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $f(v) = (6, -1, 5)$.

Απάντηση: $(2, 1, 0)$.

(ϛ′) Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2, τέτοιον ώστε ο υπόχωρος $f(W)$ να είναι η ευθεία με διεύθυνση αυτή του διανύσματος $(6, -1, 5)$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι W είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου λ είναι παράμετρος. Όταν λύσετε το σύστημα θα διαπιστώσετε ότι υπάρχουν δύο συγκεκριμένα διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε κάθε διάνυσμα του W (δηλαδή, κάθε λύση του παραπάνω συστήματος) είναι της μορφής $\lambda v_1 + \mu v_2$.

25. Έστω η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(α′) Δείξτε ότι η L_A είναι ‘επί’.

(β′) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο, ώστε $f(v) = (-2, 5)$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι το ερώτημα ανεται στην επίλυση ενός απλού συστήματος.

(γ′) Βρείτε το σύνολο $L_A^{-1}(\{\mathbf{0}\})$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $L_A^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \mathcal{N}(A)$, άρα βρείτε μια βάση για τον μηδενόχωρο του A.

(δ′) Η L_A έχει δεξιό ή αριστερό αντίστροφο; Ποιος είναι ο πίνακάς του;

Απάντηση (μερική): Η τάξη του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του, άρα ο A έχει δεξιό αντίστροφο (βλ. σχετική θεωρία). Άρα υπάρχει 3×2 πίνακας B, τέτοιος ώστε $A \times B = I_2$. Τότε, η απεικόνιση $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι αντίστροφη από δεξιά της L_A, δηλαδή, $L_A \circ L_B = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Ο πίνακας B δεν είναι μοναδικός, άρα, ούτε και η L_B είναι μοναδική. Μπορείτε να βρείτε έναν τέτοιο πίνακα B λύνοντας τα συστήματα $AX = \mathbf{e}_1$ και $AX = \mathbf{e}_2$. Μια λύση του πρώτου συστήματος θα σας δώσει την πρώτη στήλη του B και μια λύση του δευτέρου συστήματος θα σας δώσει τη δεύτερη στήλη του B. Βρείτε κάποιον συγκεκριμένο B και την αντίστοιχη L_B.

26. Έστω ότι V, W είναι μη μηδενικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_k$ μια οποιαδήποτε βάση του V και $w_1, \ldots, w_l$ μια οποιαδήποτε βάση του W. Αποδείξτε ότι $V \perp W$ αν και μόνο αν $v_i \perp w_j$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και $j = 1, \ldots, l$.

27. Έστω ότι V, W είναι μη μηδενικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, και $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Αποδείξτε ότι $V \perp W$ αν και μόνο αν $w \perp v_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

28. Έστω $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας A και $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Αποδείξτε ότι η i-γραμμή του A και η j-στήλη του A^{-1} είναι ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα. Γιατί αποκλείεται η i-γραμμή του A να είναι ορθογώνια προς την i-στήλη του A^{-1};

29. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας A, του οποίου ο χώρος γραμμών να περιέχει τα διανύσματα $(1, 2, -3)$ και $(2, -3, 5)$, και ο μηδενόχωρός του να περιέχει το διάνυσμα $(1, 1, 1)$.

   Υπόδειξη: Θυμηθείτε ποια σχέση έχουν μεταξύ τους αυτοί οι υπόχωροι του A.

30. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας A, του οποίου το άθροισμα των γραμμών να ισούται με $[1 \;\; 1 \;\; 1]$ και το άθροισμα των στηλών με $[0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

   Υπόδειξη: Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ ανήκει και στον χώρο γραμμών του A και στον μηδενόχωρό του. Μετά, θυμηθείτε ποια σχέση έχουν μεταξύ τους αυτοί οι υπόχωροι.

31. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει 3×3 πίνακας A, τέτοιος ώστε το σύστημα $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ να έχει λύση και $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Υπόδειξη: Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ ανήκει και στον χώρο στηλών του A και το διάνυσμα $(1, 0, 0)$ ανήκει στον δεξιό μηδενόχωρό του. Μετά, θυμηθείτε ποια σχέση έχουν μεταξύ τους αυτοί οι υπόχωροι.

32. Υπολογίστε μια βάση του διανυσματικού υποχώρου V του $\mathbb{R}^4$, ο οποίος αποτελείται από όλα τα διανύσματα, που είναι ορθογώνια στα διανύσματα $(1, 4, 4, 1)$ και $(2, 9, 8, 2)$.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε τον πίνακα A με γραμμές τα $(1, 4, 4, 1)$ και $(2, 9, 8, 2)$. Ο V ταυτίζεται με κάποιον από τους τέσσερις υποχώρους του A.

33. Στην άσκηση αυτή τα σύμβολα με 'παχείς' χαρακτήρες είναι στήλες.
   Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$. Μετά δείξτε ότι $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ αν και μόνο αν

$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Ως πόρισμα αποδείξτε ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι ρόμβος αν και μόνο αν οι διαγώνιοί του είναι κάθετες.

34. Στον $\mathbb{R}^4$, ποιο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του τετριμμένου διανυσματικού υποχώρου $\langle \mathbf{0} \rangle$; Ποιο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανυσματικού υποχώρου $\langle (0,0,0,1) \rangle$;

    Απαντήσεις: Στο πρώτο ερώτημα, $\mathbb{R}^4$. Στο δεύτερο ερώτημα, $\langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$.

35. Στην άσκηση αυτή τα σύμβολα με 'παχείς' χαρακτήρες είναι στήλες.
    Έστω $m \times n$ πίνακας A και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Τότε, αποδείξτε ότι *ακριβώς ένα* από τα παρακάτω ισχύει.

    (α′) Υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

    (β′) Υπάρχει $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

    Γενική παρατήρηση και υπόδειξη: Όταν μας δίδονται δυο προτάσεις p και q και μας ζητείται ν' αποδείξομε ότι μία *τουλάχιστον* απ' τις δύο αληθεύει, τότε, ή θα υποθέσομε ότι η p δεν ισχύει και θ' αποδείξομε ότι ισχύει η q, ή θα υποθέσομε ότι η q δεν ισχύει και θ' αποδείξομε ότι ισχύει η p.
    Αν μας ζητείται ν' αποδείξομε ότι μία *ακριβώς* απ' τις δύο αληθεύει, τότε αποδεικνύομε, όπως παραπάνω, ότι τουλάχιστον μία απ' τις δύο ισχύει και μετά, υποθέτομε ότι ισχύουν *και οι δύο* και καταλήγομε σε άτοπο.
    Στη συγκεκριμένη άσκηση θα κάνετε χρήση του *Θεμελιώδους Θεωρήματος της Γραμμικής Άλγεβρας*.

36. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
    Φέρετε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή, μέσω της απαλοιφής Gauss, και υπολογίστε την ορίζουσά του. Μετά κάντε το ανάπτυγμα της $\det A$ ως πρός τη δεύτερη γραμμή, καθώς και ως προς την τρίτη στήλη και διαπιστώστε θα βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα.

    Απάντηση: Και με τους τρεις τρόπους υπολογισμού πρέπει να βρείτε $\det A = -6$.

37. Αν η ορίζουσα του 4×4 πίνακα A ισούται με 1/2, υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων $2A$, $-A$, A^2, A^{-1}, A^TA.

    Απάντηση: $\det(2A) = 8$, $\det(-A) = 1/2$, $\det(A^2) = 1/4$, $\det(A^{-1}) = 2$, $\det(A^TA) = 1/4$.

38. Αν η ορίζουσα του 3×3 πίνακα A ισούται με -2, υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων $\frac{1}{2}A$, $-A$, A^2, A^{-1}, $A^T A$.

    Απάντηση: $\det(\frac{1}{2}A) = -1/4$, $\det(-A) = 2$, $\det(A^2) = 4$, $\det(A^{-1}) = -1/2$, $\det(A^T A) = 4$.

39. Αφού πρώτα καταμετρήσετε τις εναλλαγές γραμμών, οι οποίες απαιτούνται για να μετασχηματισθεί καθένας από τους παρακάτω πίνακες στον ταυτοτικό πίνακα, υπολογίστε τις ορίζουσές τους:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    Απάντηση: Για τον πρώτο πίνακα απαιτείται άρτιο πλήθος εναλλαγών γραμμών, οπότε η ορίζουσά του ισούται με $+1$, ενώ για τον δεύτερο πίνακα απαιτείται περιττό πλήθος εναλλαγών γραμμών και η ορίζουσά του ισούται με -1.

40. Αποδείξτε ότι, αν οι $n \times n$ πίνακες A και B είναι, ο μεν πρώτος αντιστρέψιμος, ο δε δεύτερος ιδιόμορφος, τότε ο AB είναι ιδιόμορφος.

41. Έστω ο $n \times n$ πίνακας A, ο οποίος έχει την εξής ιδιότητα: Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι $\det A = 0$.

42. Έστω ο $n \times n$ πίνακας A, ο οποίος έχει την εξής ιδιότητα: Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι 1. Αποδείξτε ότι $\det(A - I_n) = 0$.

43. Αποδείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\,.$$

44. Υπολογίστε τον $\mathrm{adj}A$ (προσαρτημένο, ή συζυγή πίνακα) του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση: $\begin{bmatrix} 18 & -26 & 86 & 58 \\ 59 & -213 & 333 & 254 \\ -21 & 107 & -177 & -106 \\ -43 & 11 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

45. Έστω M ο $n \times n$ πίνακας, που προκύπτει απ' τον ταυτοτικό I_n όταν η j-στήλη του αντικατασταθεί από μια τυχαία $n \times 1$ στήλη $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Εξηγείστε, χωρίς καθόλου πράξεις, μόνο με ιδιότητες των οριζουσών, γιατί $\det(M) = a_j$.

46. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα a, b, c, d για να έχει το σύστημα

$$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

μία ακριβώς λύση; Στην περίπτωση που αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, βρείτε τη λύση του συστήματος χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer. Επαληθεύστε για να βεβαιωθείτε ότι η λύση σας είναι σωστή.

47. Με τον κανόνα του Cramer λύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 4y \quad -z &= 1 \\ x + y \quad +z &= 0 \\ 2x \qquad +3z &= 0 \end{aligned}$$

και επαληθεύστε για να βεβαιωθείτε ότι η λύση σας είναι σωστή.