Κεφάλαιο 5

Ορίζουσες

Περιληπτική παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων τους

Έστω A πίνακας $n \times n$. Για κάθε i, j, $1 \leq i, j \leq n$, συμβολίζομε $a_{ij} = (A)_{ij}$, δηλαδή, το στοιχείο του A που βρίσκεται στη γραμμή i και τη στήλη j του A, και με A_{ij} συμβολίζομε τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα, ο οποίος προκύπτει από τον A όταν του διαγράψομε την i-γραμμή και τη j-στήλη..
Συμβολίζομε με $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ τις γραμμές του A και με $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ τις στήλες του. Έτσι, ο A περιγράφεται και με τους εξής τρόπους:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Η *ορίζουσα* $\det A$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, ο οποίος, αναδρομικά, ορίζεται ως εξής:

Αν $n = 2$, τότε $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Αν $n \geq 3$, τότε

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} \det A_{1n}\,.$$

Η ορίζουσα χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες.

1) $\det I_n = 1$

2) Αν B είναι ένας πίνακας, που προκύπτει από την εναλλαγή δύο γραμμών του A, τότε $\det B = -\det A$.
Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες.

3) Αν δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $\det A = 0$.
Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες.

4) Έστω $i \in \{1, \ldots, n\}$ και γ_i' ένα οποιοδήποτε διάνυσμα-γραμμή του $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i + \gamma_i' \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i' \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες. Αν $i \in \{1, \dots, n\}$ και σ_i' ένα οποιοδήποτε διάνυσμα-στήλη του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_i + \sigma_i' & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_i & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_i' & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

5) Έστω $i \in \{1, \dots, n\}$ και λ ένας οποιοδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \lambda\gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \lambda\sigma_i & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_i & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

6) Αν στην i-γραμμή προστεθεί πολλαπλασιο μιας διαφορετικής j-γραμμής, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_i + \lambda\gamma_j \\ \vdots \\ \gamma_j \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_j \\ \vdots \gamma_n \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τις στήλες. Αν στην i-στήλη προστεθεί πολλαπλασιο μιας διαφορετικής j-στήλης, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_i + \lambda\sigma_j & \dots & \sigma_j & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_i & \dots & \sigma_j & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

7) Αν ο A είναι τριγωνικός (άνω είτε κάτω), τότε η $\det A$ ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του A.

8) Αν U είναι ο κλιμακωτός, που προκύπτει από τον A με απαλοιφή Gauss, τότε $\det A = (-1)^k \det U$, όπου k είναι το πλήθος των εναλλαγών γραμμών, που έγιναν κατά την απαλοιφή.

9) Ο A είναι ιδιόμορφος αν και μόνο αν $\det A = 0$.

10) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

11) $\det(A^T) = \det A$.

12) Για κάθε $i = 1, \dots, n$ ισχύει η σχέση (*ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά την i-γραμμή*.)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \,,$$

όπου $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ είναι ο *συμπαράγων* ή *αλγεβρικό συμπλήρωμα* του a_{ij}.
Ανάλογα έχομε το *ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά την j-στήλη:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \,,$$

Ο *Προσαρτημένος* ή *συζυγής* του A συμβολίζεται $\operatorname{adj} A$ και κατασκευάζεται ως εξής: Πρώτα σχηματίζομε τον $n \times n$ πίνακα, του οποίου το (i, j)-στοιχείο είναι C_{ij} και μετά παίρνομε τον ανάστροφό του, άρα

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji}\,.$$