Γραπτή εξέταση για τους υποψηφίους για τα δύο μεταπτυχιακά προγράμματα του ΤΜΕΜ.

18 Ιουλίου 2017

Λύστε σε δύο ώρες όσα περισσότερα θέματα μπορείτε με πλήρεις, σαφείς και σύντομες αιτιολογήσεις.

1. Δύο σημειακά οχήματα A, B κινούνται πάνω σε μία ευθεία κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[t_1, t_2]$. Τη στιγμή t_1 το A βρίσκεται δεξιά του B και τη στιγμή t_2 το A βρίσκεται αριστερά του B. Αποδείξτε μέσω αναγωγής στο κατάλληλο θεώρημα του απειροστικού λογισμού ότι κάποια στιγμή τα δύο οχήματα θα συμπέσουν.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(2) = 3$ και $f'(x) \leq 1$ για κάθε x. Δώστε την καλύτερη άνω εκτίμηση για το $\int_2^5 f(x)\,dx$.

3. Έστω ότι η $f : [1, 5] \to [2, 4]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής με $f(1) = 2$, $f(5) = 4$. Γνωρίζουμε ότι τότε η $f^{-1} : [2, 4] \to [1, 5]$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα και συνεχής. Βρείτε (π.χ. γεωμετρικά) την αριθμητική τιμή τού $\int_1^5 f(x)\,dx + \int_2^4 f^{-1}(y)\,dy$.

4. Για ποιές τιμές του $a > 0$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^a n}$.

5. Έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$ και, αν ναι, ποιές είναι αυτές;

6. Υποθέτουμε ότι το συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι τέτοιο ώστε σε κάθε σημείο της κλειστής επιφάνειας S ενός χωρίου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ να εφάπτεται στην S. Ποιά είναι η αριθμητική τιμή τού $\iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$;

7. Δίνονται τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Εξετάστε αν το διάνυσμα z ανήκει στον γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα u, w και y.
   Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $L(u) = 2$, $L(w) = 5$ και $L(z) = 7$;

8. Υποθέτουμε ότι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές $0, 2, 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, w, z.
   Βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.
   Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = w + z$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.
   Αποδείξτε ότι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

9. Στον γραμμικό χώρο $C([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$ θεωρούμε τους γραμμικούς υποχώρους X των σταθερών συναρτήσεων και Y των συναρτήσεων g για τις οποίες ισχύει $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$. Αποδείξτε οτι X και Y είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $C([0, 1])$, δηλαδή ότι $C([0, 1]) = X \oplus Y$.