Εισαγωγικές εξετάσεις μεταπτυχιακών τμημάτων του ΤΜΕΜ
19 Ιουνίου 2018
Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(**1**) Βρείτε για ποια $a \in (0, \infty)$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \log(n+1)}.$$

(**2**) Έστω P πολυώνυμο το οποίο δεν είναι ταυτοτικά 0. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = |P(x)|$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

(**3**) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(**4**) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με μη αρνητικούς όρους που ικανοποιεί $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$. Δείξτε ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ συγκλίνει.

(**5**) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

(**6**) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $(0,0)$ τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

για $a = 1$ **και** για $a = 1/2$.

(**7**) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int\int_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

όπου το χωρίο Ω ορίζεται από τις σχέσεις $1 < x^2 + y^2 < 2^2$, $x < 0$, $y > 0$.

(**8**) Δίνονται διανύσματα x, y, z ενός διανυσματικού χώρου V. Αν αληθεύει, αποδείξτε το, αλλιώς δώστε αντιπαράδειγμα:

(**i**) Αν τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το z δεν είναι ούτε πολλαπλάσιο του x ούτε πολλαπλάσιο του y,τότε τα x, y, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(**ii**) Αν τα x, y, z είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε κάθε ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(**9**) Δίνεται ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ και ότι $W = \mathbb{R}^2$. Δίνεται και η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ με τύπο $L(x) = Ax$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(**i**) Να βρείτε μια διατεταγμένη βάση του V.

(**ii**) Να βρείτε τον πίνακα της L από τη βάση που βρήκατε στο μέρος (i) προς την κανονική βάση του W.

(**10**) Δίνεται ένας θετικός ακέραιος n και δύο $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών A_1 και A_2. Για $j = 1, 2$, δίνονται και ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα λ_j και x_j του A_j. Να δείξετε ότι αν $A_2 = A_1^T$ τότε ή $\lambda_1 = \lambda_2$ ή τα x_1, x_2 είναι ορθογώνια.

(**11**) Δίνονται θετικοί ακέραιοι $m > n$ και ένας $m \times n$ πίνακας A. Να δείξετε ότι $\det(AA^T) = 0$.
