Εισαγωγικές μεταπτυχιακές εξετάσεις
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

22 Μαΐου 2019

Διάρκεια 3.5 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(**1**) Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $0 < a \leq b < c$. Δείξτε ότι η εξίσωση $a^x + b^x = c^x$ έχει μοναδική λύση ως προς $x \in \mathbb{R}$.

(**2**) Δείξτε ότι για κάθε $p \in [0, 1]$ και $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι

$$(x + y)^p \geq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

(**3**) Έστω ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί

$$x_n \leq x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει.

(**4**) Έστω

$$a_n = \frac{\int_n^{n+1} e^{t^2}\, dt}{e^{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ και εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ συγκλίνει.

(**5**) Εξετάστε αν το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

(**6**) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

(**7**) Δείξτε ότι μεταξύ των ορθογωνίων κουτιών όγκου 1, αυτό με το ελάχιστο εμβαδό είναι ο κύβος.

(**8**) Δίνεται ο διανυσματικός χώρος V που αποτελείται από όλους τους 2×2 πίνακες A τέτοιους ώστε $A^T = A$.

(i) Να βρείτε μια βάση του V.
Δεν χρειάζεται να αποδείξετε τίποτα σε αυτό το μέρος της άσκησης.

(ii) Να αποδείξετε ότι η απάντησή σας στο μέρος (i) είναι σωστή.

(**9**) Δίνεται ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι ο χώρος στηλών του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ και ότι $W = \mathbb{R}^2$. Δίνεται και η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ με τύπο $L(x) = Ax$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(i) Να βρείτε μια διατεταγμένη βάση του V.

(ii) Να βρείτε τον πίνακα της L από την βάση του μέρους (i) προς την κανονική βάση του W.

(**10**) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ καθώς και η συνήθης βάση e_1, e_2, e_3, e_4 του $\mathbb{R}^4$.

Δίνεται και το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε $< e_i, e_j >= a_{ij}$ όπου a_{ij} είναι ο αριθμός στη γραμμή i και στήλη j του A.

Να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.

(**11**) Σε αυτό το πρόβλημα θα λέμε ότι ένας πίνακας είναι «αποδεκτός» και θα εννοούμε ότι είναι της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 4a & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ με $a \in \mathbb{R}, a \leq -6$. Να βρείτε το σύνολο των θετικών ιδιοτιμών όλων των αποδεκτών πινάκων.
