Εισαγωγικές εξετάσεις για το Π.Μ.Σ. “Μαθηματικά και Εφαρμογές τους”
23 Ιουνίου 2020
Διάρκεια $3\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Άσκηση 1. Για κάθε $n \geq 2$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n.$$

Άσκηση 2. Έστω $a > 0$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x+1)^a - x^a \right].$$

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

Άσκηση 4. Έστω a, b μη αρνητικά και $p \geq 1$. Δείξτε ότι $(a+b)^p \geq a^p + b^p$.

Άσκηση 5. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} \, dx = n!.$$

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx < +\infty.$$

Άσκηση 7. Έστω $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Προσδιορίστε τις τιμές τού $a > 0$ ώστε

$$\iint_A \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^a} \, dxdy < +\infty.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Άσκηση 8. Δινονται τα διανύσματα $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$. Αν οποιαδήποτε n από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, να δείξετε ότι

(i) υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$

(ii) αν υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \neq 0$ για τα οποία $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ και $\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda_i = c\mu_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$.

Άσκηση 9. Δίνονται διαφορετικοί ανα δύο πραγματικοί αριθμοί a, b, c και τα στοιχεία $\varphi_1(t) = (t-a)^2$, $\varphi_2(t) = (t-b)^2$, $\varphi_3(t) = (t-c)^2$ του χώρου $\mathbb{R}_2[t]$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 με πραγματικούς συντελεστές.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}_2[t]$

(ii) Εστω ότι $a = 1, b = 0$ και $c = -1$. Να εκφράσετε το $\varphi(t) = t^2 + t + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$.

Άσκηση 10. (i) Δινεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε εναν αντιστρέψιμο πίνακα P και έναν διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $A = PDP^{-1}$.

(ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{100}.

(iii) Να βρείτε έναν πίνακα $B \neq \pm A$ τέτοιον ώστε $B^2 = A$.

Σημείωση: στα (ii), (iii) χρησιμοποιήστε τον αντίστροφο P^{-1} χωρίς να τον υπολογίσετε.

Άσκηση 11. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με συντελεστες από το $\mathbb{R}$ και τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : V \to V$ με $T(p(t)) = p(t) + p'(t)$, για $p(t) \in V$.

(i) Υπολογίστε τον πίνακα A του T ως προς τη διατεταγμένη βάση $(1, t, t^2, t^3)$ του χώρου V.

(ii) Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

(iii) Χρησιμοποιώντας την απάντηση που βρήκατε στο (ii), βρείτε πολυώνυμο $p(t) \in V$ τέτοιο ώστε $p(t) + p'(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

Καλή επιτυχία!