Εισαγωγικές εξετάσεις για το Π.Μ.Σ. "Μαθηματικά και Εφαρμογές τους"
28 Μαίου 2021
Διάρκεια $3\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Άσκηση 1.

(1) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

(2) Υπολογίστε το όριο τής ακολουθίας $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}}{n^p + k^p}$, όπου $p > 0$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$.

(2) $\displaystyle\iint\limits_B (x^2 + y^2)\, dxdy$,

όπου $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$, με a, b μη μηδενικές σταθερές.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(1) Αν $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$, δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(2) Αν $f(0) = 0$ και x_n είναι μια ακολουθία μη αρνητικών όρων τέτοια ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n)$ συγκλίνει.

Άσκηση 4.

(1) Αν P είναι ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστο 1, δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = |P(x)|$ έχει λύση.

(2) Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε x, y, δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Άσκηση 5. Ποιο είναι μεγαλύτερο, το e^{π} ή το π^{e}·

Άσκηση 6.

(i) Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με
$$f(x, y, z) = (3x + y + x, 2x + 4y + 2z, -x - y + z)$$
είναι διαγωνοποιήσιμη;

(ii) Βρείτε τον πίνακα B της παραπάνω απεικόνισης ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Ποιό είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(x)$ του πίνακα B; Είναι ο B διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 7. Έστω V διανυσματικός χώρος και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ένας υπόχωρος U του V λέγεται f-αναλλοίωτος αν $f(U) \subseteq U$. Έστω $f, g : V \to V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν $f \circ g = g \circ f$, τότε κάθε ιδιόχωρος της f είναι g-αναλλοίωτος και, αντίστοιχα, κάθε ιδιόχωρος της g είναι f-αναλλοίωτος.

(ii) Έστω $V = W + U$ οπου W, U είναι ιδιόχωροι των f, g αντίστοιχα. Αν ο W είναι g-αναλλοίωτος και ο U είναι f-αναλλοίωτος, να δείξετε ότι $f \circ g = g \circ f$.

Άσκηση 8.

(i) Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ με $T(A) = A^T$ είναι διαγωνοποιήσιμη. (Υπόδειξη: διευκολύνει να υπολογίσετε τον πίνακα της απεικόνισης T ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(ii) Ποιές είναι οι ιδιοτιμές της απεικόνισης T;

Άσκηση 9.

(i) Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με πρώτη στήλη το διάνυσμα $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0)$. (Υπόδειξη: ακόμα και αν δεν θυμάστε την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μπορείτε να βρείτε εναν τέτοιο πίνακα A κατασκευαστικά)

(ii) Ποιός είναι ο A^{-1};

(iii) Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας και $\langle \ , \ \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\Pi = \langle v_1, 2v_2 \rangle + \langle Av_1, Av_2 \rangle + \langle A^{-1}v_1, A^{-1}v_1 \rangle,$$
όπου v_i είναι η i-οστή στήλη του πίνακα A.

Άσκηση 10. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$

(i) Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$;

(ii) Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$;

(iii) Να εκφραστεί ο A^4 ως γραμμικός συνδυασμός των A και I_2.

(iv) Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού το πολύ 1, τέτοιο ώστε
$$A^5 - 3A^4 + 11A^3 - 14A^2 + 23A - 3I_2 = p(A)$$

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα σε μονάδες.

Καλή επιτυχία!