Εισαγωγικές μεταπτυχιακές εξετάσεις
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

31 Μαΐου 2022

Διάρκεια 4 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(**1**) (i) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}.$$

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία

$$x_n = \frac{(n!)^{10}}{2^{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι *τελικά* φθίνουσα.

(**2**) Εξετάστε αν υπάρχει

(i) Ακολουθία θετικών (x_n) τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x_n) < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$.

(ii) Ακολουθία θετικών (x_n) τέτοια ώστε $x_{n+1} > 2x_n$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.

(**3**) Δείξτε ότι κάθε συνεχής $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί $f(x) = f(x^2)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι σταθερή. Δείξτε ότι υπάρχει μη σταθερή συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.

(**4**) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\ln^4(t)}{2+\cos t}dt, \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2} \int_n^{n+1} e^{t^2} dt.$$

(**5**) (i) Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{(1-y)^2} dy \right) dx.$$

(**6**) (*i*) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας $n \times n$ διαγωνίσιμος (=διαγωνοποιήσιμος) πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ και I_n ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^{100} - 2A^3 + I_n$ είναι διαγωνίσιμος.

(*ii*) Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ που έχει ως μοναδικές ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$ το -2 και το 3. Να αποδειχθεί ότι $(A + 2I_n)^{n-1}(A - 3I_n)^{n-1} = 0_{n \times n}$.

(**7**) Θεωρούμε τους διανυσματικούς υπόχωρους V και W του $\mathbb{R}^4$, με $W \subseteq V$ που ορίζονται ως

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 2(x_1 - x_3) = x_4 - x_2\},$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_3 \text{ και } x_2 = x_4\}.$$

(*i*) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του W.

(*ii*) Επεκτείνετε την παραπάνω βάση σε ορθοκανονική βάση του V.

(**8**) Συμβολίζουμε ως $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $\leq n$.

(*i*) Δείξτε ότι το $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμου με σταθερά.

(*ii*) Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

(*iii*) Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ με $\phi(f(x)) = f'(x)$ δεν είναι διαγωνίσιμη, δηλ. ο αντίστοιχος πίνακάς της ως προς κάποια βάση δεν είναι διαγωνίσιμος (=διαγωνοποιήσιμος).

(**9**) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n και έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $\dim \operatorname{Ker} \phi = n - 1$. Δείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις γραμμικές απεικονίσεις $1 + f$, $1 - f$ είναι ισομορφισμός, όπου 1 είναι η ταυτοτική απεικόνιση του V.

(**10**) (*i*) Έστω $C(\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$. Δείξτε ότι το $C(\mathbb{R})$, με πράξεις την πρόσθεση συναρτήσεων και τον πολλαπλασισαμό συνάρτησης με σταθερά, είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης.

(*ii*) Έστω

$$V = \{f \in C(\mathbb{R}),\ f \text{ σταθερή συνάρτηση}\}$$

και

$$W = \{f \in C(\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}.$$

Δείξτε ότι τα V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $C(\mathbb{R})$.

(*ii*) Δείξτε ότι $C(\mathbb{R}) = V \oplus W$.
