Εισαγωγικές μεταπτυχιακές εξετάσεις
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

23 Μαΐου 2023

Διάρκεια 4 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(**1**) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \cos(n^2x)\,dx$.

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+2)-\log n)$.

(**2**) (*i*) Έστω ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί

$$x_{n+1}-x_n \geq \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(*ii*) Έστω *άνω φραγμένη* ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί

$$x_{n+1}-x_n \geq -\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.

(**3**) Έστω $0<a<b<c$. Δείξτε ότι η εξίσωση $a^x+b^x=c^x$, $x\in\mathbb{R}$, έχει

(*i*) Τουλάχιστον μία λύση.

(*ii*) Ακριβώς μία λύση.

(**4**) (*i*) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\log x-\log(x+1)+\frac{1}{x+1}, \quad x>0,$$

είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και ικανοποιεί $f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

(*ii*) Δείξτε ότι η ακολουθία

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n, \quad n\in\mathbb{N},$$

συγκλίνει.

(**5**) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y)=(x+y)\,e^{-x^2-y^2}, \quad x,y\in\mathbb{R},$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

(**6**) Έστω A ένας 2×2 μιγαδικός πίνακας που έχει διαφορετικές ιδιοτιμές και για τον οποίο ισχύει ότι $A^2 + I_2 = 0$, όπου I_2 ο ταυτοτικός (μοναδιαίος) 2×2 πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος 2×2 μιγαδικός πίνακας B με

$$A = B \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}.$$

(**7**) Συμβολίζουμε ως $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $\leq n$. Το $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμου με σταθερά (δεν χρειάζεται να το αποδείξετε).

(i) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως $V_a = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ με $p(a) = 0\}$. Δείξτε ότι το V_a είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

(ii) Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του V_a.

(iii) Έστω $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Βρείτε γραμμικώς ανεξάρτητα πολυώνυμα $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ με $f_i(a) = c$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$.

(**8**) Έστω A ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας και k θετικός ακέραιος.

(i) Δείξτε ότι αν το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A, τότε το λ^k είναι ιδιοτιμή του A^k.

(ii) Δείξτε ότι αν $A^k = 0$, τότε η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$ (στοιχειώδης απόδειξη - χωρίς επίκληση θεωρήματος).

(iii) Δείξτε ότι αν $A^k = 0$, τότε και $A^n = 0$.

(**9**) Εστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\phi, \psi : V \to V$ γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε $\phi + \psi = \mathrm{id}_V$, όπου id_V η ταυτοτική απεικόνιση.

(i) Δείξτε ότι $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$, όπου Ker = ο πυρήνας της απεικόνισης.

(ii) Δείξτε ότι $\mathrm{dimKer}(\phi) + \mathrm{dimKer}(\psi) \leq n$.

(iii) Δείξτε ότι αν στην παραπάνω σχέση ισχύει η ισότητα τότε $\phi \circ \psi = 0_V$ (0_V= η μηδενική απεικόνιση) και, επίσης, $\phi^2 = \phi$. (*Υπόδειξη:* Πάρτε βάσεις των $\mathrm{Ker}(\phi)$ και $\mathrm{Ker}(\psi)$).

(**10**) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ και έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Έστω $\chi_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Δείξτε ότι ο πίνακας $f(A)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν τα $f(x)$ και $\chi_A(x)$ δεν έχουν κοινή μιγαδική ρίζα.
