Εκδόσεις
Κάλλιπος
2021

Αλγεβρικές Καμπύλες,

Μια εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Y} \times_{\mathbf{Spec(A)}} \mathbf{Spec(B)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Y} \arrow[d] \\
\mathbf{Spec(B)} \arrow[r] & \mathbf{Spec(A)}
\end{tikzcd}$$

$$X^n + Y^n = Z^n$$

Ιωάννης Α. Αντωνιάδης,
Αριστείδης Ι. Κοντογεώργης

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ

ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ Ι. ΚΟΝΤΟΓΕΩΡΓΗΣ

Αλγεβρικές Καμπύλες, μια εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Αλγεβρικές Καμπύλες, μια εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία

Συγγραφή

Ιωάννης Α. Αντωνιάδης

Αριστείδης Ι. Κοντογεώργης

Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Δημήτριος Καλλιάρας

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Αριστείδης Ι. Κοντογεώργης

ISBN: 978-618-85370-1-9
Έκδοση 1.1 – 10 Σεπτεμβρίου 2021

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική Αναφορά: Κοντογεώργης, Α., Αντωνιάδης, Ι. (2021). *Αλγεβρικές Καμπύλες* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://hdl.handle.net/11419/8009

Αφιερώνεται στις οικογένειές μας.

Αλγεβρικές Καμπύλες

Ιωάννης Α. Αντωνιάδης, Αριστείδης Ι. Κοντογεώργης

10 Σεπτεμβρίου 2021

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η αλγεβρική γεωμετρία ξεκίνησε από τη μελέτη των αλγεβρικών συνόλων, δηλαδή του γεωμετρικού τόπου των σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων. Αρκετά νωρίς έγινε σαφές ότι οι γεωμετρικές ιδιότητες τέτοιων συνόλων βρίσκονται κρυμμένες μέσα στις συναρτήσεις που ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο πάνω στα αντικείμενα αυτά. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε με τη σειρά της και στην αντίστροφη διαδικασία: Αν μας δοθεί ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, ποιο είναι το γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο θα μπορούσαμε να του αντιστοιχίσουμε; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από τη θεωρία των σχημάτων όπως αναπτύχθηκε από τον A. Grothendieck.

Αυτή η ιδέα αποδείχθηκε ιδιαίτερα γόνιμη σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και ιδιαίτερα στη θεωρία αριθμών και στα διοφαντικά προβλήματα, δημιουργώντας ένα σύνολο τεχνικών και εργαλείων το οποίο είναι γνωστό σήμερα ως «Αριθμητική Αλγεβρική Γεωμετρία», [8].

Η αλγεβρική γεωμετρία, όπως έχει αναπτυχθεί σήμερα, έχει τη φήμη ενός δύσκολου και απαιτητικού αντικειμένου, το οποίο προϋποθέτει πολλές τεχνικές από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, όπως αντιμεταθετική άλγεβρα, ομολογική άλγεβρα, θεωρία κατηγοριών, ενώ η γεωμετρική εποπτεία συχνά χάνεται. Αποτελεί άποψη των συγγραφέων ότι η θεωρία των σχημάτων είναι απαραίτητη γνώση για σχεδόν κάθε μαθηματικό που θέλει να ασχοληθεί γενικά με την περιοχή. Έτσι, στο τρίτο κεφάλαιο ο αναγνώστης εισάγεται στη θεωρία σχημάτων, ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε τα σχήματα κατηγορικά και εισάγουμε την έννοια του συναρτητή σημείων. Με τη βοήθεια της κατηγορικής οπτικής μελετάται ο εφαπτόμενος χώρος, αλλά και τα γινόμενα και η σημαντική ιδιότητα του διαχωρισμού. Ως εφαρμογή αναπτύσσεται και η έννοια του σχήματος ομάδας. Στο έκτο κεφάλαιο επιχειρούμε μια σύντομη εισαγωγή στην συνομολογία των sheaves κάνοντας χρήση της θεωρίας του Chech χωρίς τη χρήση παραγόμενων συναρτητών, ακολουθώντας τις σημειώσεις του Gathman [1].

Στην περιοχή των αλγεβρικών καμπυλών μπορούμε να δώσουμε μια καλύτερη γεωμετρική εποπτεία των κατασκευών. Μάλιστα την περιοχή αυτή μπορούμε να την προσεγγίσουμε με πολλούς διαφορετικούς ισοδύναμους τρόπους. Είναι γνωστό, και θα το αποδείξουμε, ότι η θεωρία των αλγεβρικών προβολικών καμπυλών πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς είναι ισοδύναμη με αυτή των συμπαγών επιφανειών Riemann. Στη θεωρία των επιφανειών Riemann μπορούμε να έχουμε μια καλύτερη γεωμετρική εποπτεία, ενώ μπορεί να γίνει σαφής η αλληλεπίδραση και με την αλγεβρική τοπολογία. Έτσι, στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε σχεδόν από την αρχή τη θεωρία την πρωταρχικής ομάδας, όπως και τη θεωρία των καλυπτικών απεικονίσεων.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναπτύσσουμε τη θεωρία των συμπαγών επιφανειών Riemann κυρίως με χρήση εργαλείων μιγαδικής ανάλυσης. Από τη θεωρία των διακλαδιζόμενων καλυμμάτων μεταξύ επιφανειών Riemann προκύπτει με σαφή τρόπο η σχέση με τη θεωρία επεκτάσεων των σωμάτων μερόμορφων συναρτήσεων. Αυτή η σχέση έδωσε το έναυσμα σε μία εντελώς διαφορετική προσέγγιση των αλγεβρικών καμπυλών, αυτή των σωμάτων συναρτήσεων.

Η τελευταία μάλιστα θεωρία μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά και αναδεικνύει τη σχέση και την ομοιότητα των αλγεβρικών καμπυλών με τη θεωρία των αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων. Ο H. Hasse μάλιστα ήταν ίσως ο πρώτος που ανέπτυξε και τις δύο θεωρίες παράλληλα, [3]. Για μία σύγχρονη και ενοποιημένη μελέτη της αλγεβρικής γεωμετρίας των καμπυλών και των αλγεβρικών σωμάτων αριθμών παραπέμπουμε στο βιβλίο του D. Lorenzini [4].

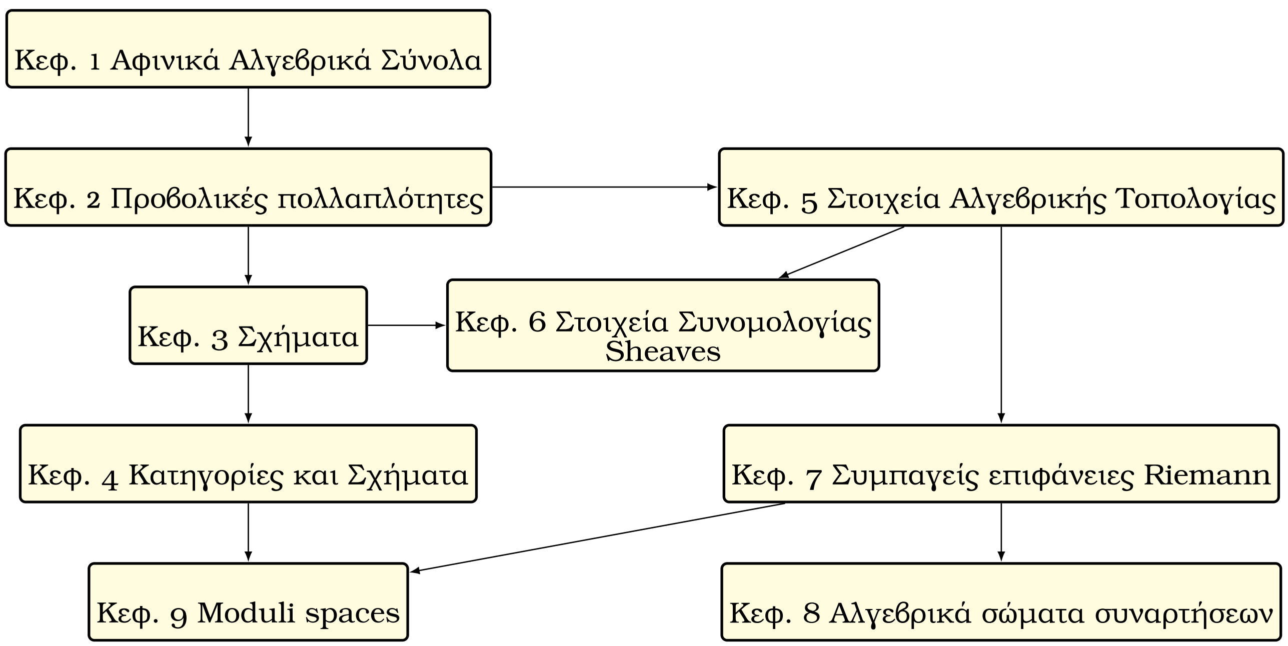
Στο 8ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία των αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων πάνω από οποιοδήποτε σώμα και μάλιστα αποδεικνύται η ισοδυναμία με τις αλγεβρικές καμπύλες μέσω της θεωρίας των προβολικών εμφυτεύσεων.

Στο ένατο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία των moduli spaces, χρησιμοποιώντας την έννοια της αναπαραστασιμότητας. Αναπτύσσεται επίσης η θεωρία των παραμορφώσεων, η οποία αποτελεί ένα ευκολότερο και τοπικό πρόβλημα της θεωρίας των moduli spaces. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι η κατηγορική προσέγγιση είναι αναπόφευκτη ακόμα και αν κάποιος ενδιαφέρεται αποκλειστικά για κλασική αλγεβρική γεωμετρία πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Υπάρχουν αρκετά εξαιρετικά (ξενόγλωσσα) βιβλία αλγεβρικής γεωμετρίας αυτή τη στιγμή τα οποία μπορεί όμως να τρομάξουν τον αναγνώστη με το μέγεθός τους. Πέρα από τα κλασικά και καλογραμμένα βιβλία του Grothendieck, αλλά και τα κλασικά βιβλία των Mumford, [5] και Hartshorne [2], υπάρχουν και αρκετά νέα βιβλία, όπως το υπέροχο βιβλίο του R. Vakil [7]. Η συστηματική μελέτη των παραπάνω απαιτεί μια σημαντική επένδυση σε χρόνο. Διαλέξαμε να ακολουθήσουμε μία σύντομη πορεία προς τη θεωρία των σχημάτων ακολουθώντας το βιβλίο του Ueno [6] τουλάχιστον στα τέσσερα πρώτα κεφάλαια του βιβλίου τα οποία παρουσιάζουν τη θεωρία των σχημάτων.

Εξαρτήσεις των κεφαλαίων, Προτάσεις διδασκαλίας

Το βιβλίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για μια γρήγορη εισαγωγή στη θεωρία των σχημάτων καλύπτοντας τα κεφάλαια 1,2,3,4,6,9, όπως και σε μια εισαγωγή στις αλγεβρικές καμπύλες ακολουθώντας τα κεφάλαια 1,2,5,7 και 8.



Βιβλιογραφία

[1] Gathmann, A. *Algebraic Geometry*. Lecture Notes, 2020. URL: `https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2019/alggeom-2019.pdf`.

[2] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[3] Hasse, H. *Zahlentheorie*. Dritte berichtigte Auflage. Akademie-Verlag, Berlin, 1969, pp. xvi+611.

[4] Lorenzini, D. *An invitation to arithmetic geometry*. Vol. 9. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, pp. xvi+397. ISBN: 0-8218-0267-4. URL: `https://doi.org/10.1090/gsm/009`.

[5] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*. expanded. Vol. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. x+306. ISBN: 3-540-63293-X. URL: `https://doi.org/10.1007/b62130`.

[6] Ueno, K. *Algebraic geometry. 1*. Vol. 185. Translations of Mathematical Monographs. From algebraic varieties to schemes, Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: `https://doi.org/10.1090/mmono/185`.

[7] Vakil, R. *The rising sea*. 2017, p. 775.

[8] Αντωνιάδης, Ι. Α. & Κοντογεώργης, Α. *Αριθμητική Γεωμετρία, Ιστορία, Επιτεύγματα και μέλλον. Τόμος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τα 100 χρόνια από την ίδρυσή της* (2018).

I

Αφινικά Αλγεβρικά σύνολα

I.1 Αλγεβρικά Σύνολα και ιδεώδη

Έστω σώμα k, αναζητούμε λύσεις του συστήματος

$$f_a(x_1, \dots, x_n) = 0, a = 1, \dots, \ell, f_a \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Αν το σώμα k δεν είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε το σύνολο λύσεων μπορεί να είναι το κενό, για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = -1$$

δεν έχει καμία λύση $(x, y) \in \mathbb{R}$. Στην κλασική αλγεβρική γεωμετρία το σώμα είναι το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{R}$, ενώ για μελέτη προβλημάτων σχετικών με τη θεωρία Αριθμών το k μπορεί να είναι το $\mathbb{Q}$ ή μία αλγεβρική του επέκταση.

Ορισμός I.1.1. *Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{A}_k^n$ τη λεγόμενη ομοπαραλληλική ή αφινική πολλαπλότητα (affine variety) η οποία αποτελείται από*

$$\mathbb{A}_k^n = \{(a_1, \dots, a_n), \text{ με } a_i \in k\}.$$

Ας θεωρήσουμε μία συλλογή πολυωνύμων $(f_i)_{i\in I}$, $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, τότε ορίζεται το *αλγεβρικό σύνολο*

$$V((f_i)_{i\in I}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n | f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το *ιδεώδες* $A \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ το οποίο παράγεται από τα $(f_i)_{i\in I}$. Ένα τυχαίο στοιχείο του ιδεώδους A γράφεται ως εξής:

$$g = \sum_{i\in I} g_i(x_1, \dots, x_n) f_i(x_1, \dots, x_n),$$

όπου $g_i(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$, όλα μηδέν εκτός από πεπερασμένα.

Λήμμα I.1.2. *Αν $I \subset J$, τότε $V(I) \supset V(J)$.*

Απόδειξη. Αν ένα σημείο $P \in V(J)$, τότε $f(P) = 0$ για κάθε $f \in J$ άρα $f(P) = 0$ για κάθε $f \in I$. □

Παρατηρούμε ότι

$$V((f_i)_{i\in I}) = V(A),$$

δηλαδή το αλγεβρικό σύνολο που ορίζεται από το ιδεώδες που παράγουν τα f_i ταυτίζεται με το αλγεβρικό σύνολο που ορίζεται από τα f_i.

Γενικά για ένα ιδεώδες $J \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ ορίζουμε το αντίστοιχο αλγεβρικό σύνολο

$$V(J) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : g(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ για κάθε } g \in J\}.$$

Παράδειγμα I.1.3. *Υπολογίζουμε ότι*

1. $V\langle 0\rangle = \mathbb{A}_k^n$
2. $V(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$

Θεώρημα I.1.4 (Βάσης του Hilbert). *Κάθε ιδεώδες* $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ *είναι πεπερασμένα παραγόμενο, δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα* $f_1, \ldots, f_s$ *ώστε* $= \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$.

Απόδειξη. Επαγωγική απόδειξη βασισμένη στο ότι αν ο R είναι δακτύλιος της Noether, τότε και ο $R[x]$ είναι δακτύλιος της Noether. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether και έστω ένα ιδεώδες $\mathfrak{a} \lhd R[x]$. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο, συνεπώς υπάρχει ακολουθία στοιχείων

$$\{f_0, f_1, \ldots, f_m \ldots\},$$

όπου $\mathfrak{b}_n = \langle f_0, \ldots, f_{n-1}\rangle$ και $f_n \in \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{b}_n$, την οποία μπορούμε να την επιλέξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε το στοιχείο f_n να είναι ελάχιστου βαθμού στο σύνολο $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{b}_n$. Είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\deg f_n \leqslant \deg f_{n+1}.$$

Θεωρούμε τους leading terms $a_n = \mathrm{Lead}(f_n)$ των πολυωνύμων $f_n \in R[x]$, και σχηματίζουμε την ακολουθία ιδεωδών του δακτυλίου R

$$\langle a_0\rangle \subset \langle a_0, a_1\rangle \subset \cdots \subset \langle a_0, a_1, \ldots, a_s\rangle \subset$$

η οποία είναι τελικά σταθερή, δηλαδή

$$\langle a_0, \ldots, a_{N-1}\rangle = \langle a_0, \ldots, a_N\rangle = \langle a_0, \ldots, a_N, a_{N+1}\rangle = \cdots$$

αφού ο R είναι δακτύλιος της Noether. Θεωρούμε το σταθερό ιδεώδες της ακολουθίας $\mathfrak{b} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}\rangle$ και έχουμε ότι $a_N \in \mathfrak{b}$, δηλαδή

$$a_N = \sum_{i<N} u_i a_i, u_i \in R.$$

Θεωρούμε το στοιχείο

$$g = \sum_{i<N} u_i x^{\deg f_N - \deg f_i} f_i,$$

το οποίο έχει leading term ίσο με αυτό του f_N. Προφανώς $g \in \mathfrak{b}_N$, $f_N \notin \mathfrak{b}_N$ συνεπώς $f_N - g \notin \mathfrak{b}_N$. Όμως $\deg(f_N - g) < \deg f_N$, άτοπο από τον τρόπο επιλογής του f_N. □

Ορισμός I.1.5. *Έστω* $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *μια οικογένεια ιδεωδών. Θα συμβολίζουμε με* $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *το ιδεώδες που παράγεται από την οικογένεια ιδεωδών* (I_λ).

Ορισμός I.1.6. *Έστω ιδεώδες* $I \lhd R$ *θα συμβολίζουμε με* $\sqrt{I}$ *το ιδεώδες*

$$\sqrt{I} = \{f \in R : \text{ ώστε υπάρχει } m \in \mathbb{N} \text{ με } f^m \in I\},$$

και θα το ονομάζουμε το ριζικό ιδεώδες του I.

Άσκηση I.1.7. *Δείξτε ότι το* $\sqrt{I}$ *είναι ιδεώδες του* R.

Πρόταση I.1.8. *Έστω* I, J, J_λ, $\lambda \in \Lambda$ *ιδεώδη του* $k[x_1, \ldots, x_n]$. *Τότε*

1. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$
2. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$
3. *Αν* $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$, *τότε* $V(I) \supset V(J)$.

Απόδειξη. Το λήμμα Ι.1.2 έχει ως συνέπεια $V(I \cap J) \supset V(I)$ και $V(I \cap J) \supset V(J)$ οπότε $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$. Αντιστρόφως, αν $P \in V(I \cap J)$ και $P \notin V(I)$, τότε υπάρχει $f \in I$ με $f(P) \neq 0$. Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο $g \in J$, τότε $h = f \cdot g \in I \cap J$ και συνεπώς $h(P) = f(P)g(P) = 0$ και αφού $f(P) \neq 0$ αναγκαστικά $g(P) = 0$ για κάθε $g \in J$, οπότε $P \in V(J)$. Συνεπώς, $V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$.

Για το (2): Αφού $I_\mu \subset \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ έχουμε ότι

$$V(I_\mu) \supset V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$$

και συνεπώς

$$\bigcap_{\mu \in \Lambda} V(I_\mu) \supset V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right).$$

Αντιστρόφως, για κάθε $\lambda \in \Lambda$ εκφράζουμε το $I_\lambda = \langle h_{\lambda,1}, \ldots, h_{\lambda,t_\lambda} \rangle$. Ένα στοιχείο $P \in \bigcap_{\mu \in \Lambda} V(I_\mu)$ μηδενίζει όλους τους παραπάνω γεννήτορες, δηλαδή

$$h_{\lambda,s}(P) = 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \Lambda, 1 \leqslant s \leqslant t_\lambda.$$

Από την άλλη πλευρά, τα στοιχεία $h_{\lambda,s}$ παράγουν το ιδεώδες $V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$ και συνεπώς $P \in V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$.

Για το (3): Αρκεί να δείξουμε ότι $V(I) = V(J)$. Είναι σαφές ότι $I \subset \sqrt{I}$, συνεπώς $V(\sqrt{I}) \subset V(I)$. Αντιστρόφως, αν $f \in \sqrt{I}$, τότε $f^m \in I$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Αν $P \in V(I)$, τότε $f(P)^m = 0$ και κατά συνέπεια $f(P) = 0$, δηλαδή $P \in V(\sqrt{I})$. □

Πόρισμα Ι.1.9. *Ας θεωρήσουμε το πεπερασμένο σύνολο ιδεωδών* $I_1, \ldots, I_s$. *Ισχύει*

$$\bigcup_{j=1}^{s} V(I_j) = V\left(\bigcap_{j=1}^{s} I_j\right).$$

Παρατηρούμε ότι αν το παραπάνω πλήθος είναι άπειρο, το πόρισμα δεν ισχύει. Πράγματι αν $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ αριθμήσιμη άπειρη συλλογή στοιχείων, διάφορων ανά δύο, ενός άπειρου σώματος k και $I_j = \langle x - c_j \rangle$, τότε $I_{j_1} \cap \cdots \cap I_{j_s} = \prod_{i=1}^{s} \langle x - c_{j_i} \rangle$. Από την άλλη $\cap_{j=1}^{\infty} I_j = \langle 0 \rangle$ και έχουμε

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} V(I_j) = \{c_1, c_2, \ldots\} \subsetneq V(\cap_{j=1}^{\infty} I_j) = V(\langle 0 \rangle) = \mathbb{A}_k^1.$$

Θα ακολουθήσουμε τώρα την αντίστροφη διαδικασία: Ξεκινούμε με ένα υποσύνολο $V \subset \mathbb{A}_k^n$. Ορίζουμε το ιδεώδες των πολυωνύμων που μηδενίζονται σε αυτό:

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \text{ για κάθε } P \in V\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $V = V(J)$ για κάποιο ιδεώδες J του $k[x_1, \ldots, x_n]$, τότε

$$J \subset I(V(J)).$$

Πράγματι αν $f \in J$, τότε το $V(J)$ αποτελείται από όλα τα σημεία $P \in \mathbb{A}_k^n$ τα οποία μηδενίζονται στο J και εξ ορισμού το $f \in J$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $V(J)$, άρα ανήκει στο $I(V(J))$.

Όμως $V(f^2) = V(f)$, άρα δεν μπορούμε να έχουμε ισότητα για $J = \langle f^2 \rangle$, αφού $I(V(f^2)) = \langle f \rangle$.

I.1.1 Το θεώρημα ριζών του Hilbert (Nullstellensatz)

Θεώρημα I.1.10. *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Αν I ιδεώδες με $1 \notin I$, τότε $V(I) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Το ιδεώδες I είναι ένα γνήσιο ιδεώδες του δακτυλίου $k[x_1, \ldots, x_n]$ και συνεπώς υπάρχει ένα μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ ώστε $I \subset \mathfrak{m}$, όπως μπορούμε να αποδείξουμε είτε με το λήμμα του Zorn [1, cor. 1.4] είτε χρησιμοποιώντας ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether [1, chap. 6]. Τότε $V(I) \supset V(\mathfrak{m})$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

Γνωρίζουμε ότι το $k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m}$ είναι σώμα, που περιέχει το k. Αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό, το λήμμα I.1.12 που θα αποδείξουμε παρακάτω θα μας δώσει ότι

$$k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} = k.$$

Άρα $x_j \mod \mathfrak{m} = a_j \in k$. Συνεπώς $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$ και έτσι το ιδεώδες $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subset \mathfrak{m}$. Το πηλίκο $k[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle = k$, δηλαδή το ιδεώδες $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ είναι μέγιστο και ίσο με το $\mathfrak{m}$. Έτσι

$$V(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

□

Πόρισμα I.1.11 (Ασθενές Nullstellensatz). *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τα μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου $k[x_1, \ldots, x_n]$ έχουν τη μορφή $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$.*

Λήμμα I.1.12. *Έστω R ακέραια περιοχή πεπερασμένα παραγόμενη υπέρ σώματος K (όχι κατ' ανάγκη αλγεβρικά κλειστού). Αν η R είναι σώμα, τότε κάθε στοιχείο της R είναι αλγεβρικό υπέρ το K.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $R = K[z_1, \ldots, z_m]$. Θα αποδείξουμε ότι τα $z_1, \ldots, z_m$ είναι αλγεβρικά υπέρ το K. Αν $m = 1$ και αν το z_1 δεν είναι αλγεβρικό, τότε είναι υπερβατικό και το R δεν είναι σώμα.

Αν $m \geqslant 2$, $z_1 \in R$, τότε το $K(z_1)$ είναι υπόσωμα του R και μάλιστα $R = K(z_1)[z_2, \ldots, z_m]$. Η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι $z_2, \ldots, z_m$ είναι αλγεβρικά υπέρ το $K(z_1)$. Δηλαδή για κάθε z_j υπάρχει $f_j \in K(z_1)[x]$ με συντελεστές στο σώμα $K(z_1)$ που να έχει το z_j ως ρίζα. Πολλαπλασιάζοντας με στοιχείο του $K(z_1)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $2 \leqslant j \leqslant m$

$$f_j(x) = A_j(z_1)x^{n_j} + B_j^{(1)}(z_1)x^{n_j-1} + \cdots B_j^{(n_j)}(z_1) \text{ με } A_j(z_1), B_j^{(\ell)} \in K[z_1]. \tag{I.1}$$

Θέτουμε

$$A(z_1) = \prod_{j=2}^{m} A_j(z_1)$$

και ορίζουμε $S \subset R$ και $S = K[z_1, \frac{1}{A(z_1)}]$. Το R είναι σώμα, και το $\frac{1}{A(z_1)} \in R$ και το S είναι υποδακτύλιος του R. Έχουμε ότι $R = S[z_2, \ldots, z_m]$. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (I.1) με $A(z_1)/A_j(z_1)$ και διαιρουμε με $A(z_1)$. Τότε

$$g_j(x) = x^{n_j} + b_j^{(1)}x^{n_j-1} + \cdots + b_j^{(n_j)}$$

είναι μονικό πολυώνυμο με συντελεστές στον S και το z_j είναι ακέραιο υπέρ το S. Τα ακέραια στοιχεία αποτελούν υποδακτύλιο [1, cor. 5.3], άρα κάθε στοιχείο του R είναι S-ακέραιο.

Θα δείξουμε ότι αφού το R είναι σώμα και το S είναι σώμα. Πράγματι, έστω $a \in S$ μη μηδενικό, συνεπώς $a^{-1} \in R$ και συνεπώς a^{-1} είναι ρίζα μονικού πολυωνύμου με συντελεστές από το S, δηλαδή

$$a^{-\ell} + b_1 a^{-\ell+1} + b_2 a^{-\ell+2} + \cdots + b_\ell = 0 \text{ με } b_j \in S.$$

Καταλήγουμε στο ότι
$$1 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_\ell a^\ell = 0,$$
συνεπώς
$$a^{-1} = -(b_1 + b_2 a + \cdots + b_\ell a^{\ell-1}) \in S,$$
δηλαδή το S είναι επίσης σώμα.

Αν το z_1 ήταν υπερβατικό υπέρ το K, τότε το $K[z_1]$ είναι πολυωνυμικός δακτύλιος υπέρ το K και κάθε $a \in K[z_1, 1/A(z_1)]$ γράφεται ως
$$a = \frac{F(z_1)}{A(z_1)^m}, \text{ με } F(z_1) \in K[z_1].$$
Αν το a διαλεχτεί με τρόπο ώστε τα $F(z_1)$ και $A(z_1)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, δεν μπορούμε να εκφράσουμε το $a^{-1} = A(z_1)^m/F(z_1)$ ως
$$\frac{G(z_1)}{A(z_1)^s}, \text{ με } G(z_1) \in K[z_1].$$
Πράγματι, η ισότητα
$$A(z_1)^m/F(z_1) = \frac{G(z_1)}{A(z_1)^s} \Leftrightarrow A(z_1)^{m+s} = G(z_1) \cdot F(z_1),$$
αφού ο δακτύλιος πολυωνύμων πάνω από σώμα είναι μονοσήμαντης ανάλυσης οδηγεί στο $F(z_1) = A(z_1)^\ell$, άτοπο.

Σε αυτή την περίπτωση το $S = K[z_1, 1/A(z_1)]$ δεν μπορεί να είναι σώμα. Αφού λοιπόν το S είναι σώμα, θα πρέπει το z_1 ναι είναι και αυτό αλγεβρικό υπέρ το K.

□

Θεώρημα I.1.13 (Hilbert's Nullstellensatz). *Αν $J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ και το σώμα k είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε $I(V(J)) = \sqrt{J} \supset J$.*

Απόδειξη. Προφανώς $\sqrt{J} \subset I(V(J))$ από τον ορισμό, αφού αν $f \in \sqrt{J}$, τότε $f^m \in J$ και $f^m(P) = 0$ για κάθε $P \in V(J)$, συνεπώς $f(P) = 0$ για κάθε $P \in V(J)$.

Αντιστρόφως, έστω $f \in I(V(J))$, θα δείξουμε ότι $f \in \sqrt{J}$, δηλαδή ότι $f^m \in J$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το x_0 ως μια νέα μεταβλητή και τον δακτύλιο $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, όπως και το ιδεώδες $\widetilde{J} \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ το οποίο παράγεται από τα $1 - x_0 f$ και J.

Αν το $V(\widetilde{J}) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $(a_0, \ldots, a_n) \in V(\widetilde{J}) \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$ και είναι σαφές ότι $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$ αφού $J \subset \widetilde{J}$. Άρα $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Συνεπώς, αφού $1 - x_0 f(x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{J}$, έχουμε ότι $0 = 1 - a_0 f(a_1, \ldots, a_n) = 1$, άτοπο. Συνεπώς $V(\widetilde{J}) = \emptyset$. Σε αυτή την περίπτωση από το Nullstellensatz έχουμε ότι $1 \in \widetilde{J}$. Έχουμε
$$1 = g_0(x_0, \ldots, x_n) \cdot (1 - x_0 f(x_1, \ldots, x_n)) + \sum_{j=1}^{\ell} g_j(x_0, \ldots, x_n) f_j(x_1, \ldots, x_n),$$
όπου $f_j \in J$ και $g_j \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Σε κάθε x_0 αντικαθιστούμε με $1/f$ για να πάρουμε:
$$1 = g_0\left(\frac{1}{f}, \ldots, x_n\right) \cdot \left(1 - \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f}\right) + \sum_{j=1}^{\ell} g_j\left(\frac{1}{f}, \ldots, x_n\right) f_j(x_1, \ldots, x_n).$$
Μπορούμε τώρα να πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλη δύναμη του f^N ώστε να φύγουν όλοι οι παρονομαστές για να έχουμε ότι
$$f^N = \sum_{j=1}^{\ell} g_j'(x_1, \ldots, x_n) f_j(x_1, \ldots, x_n),$$
δηλαδή το ζητούμενο. □

Ορισμός I.1.14. *Ένα ιδεώδες J θα λέγεται reduced ή ριζικό αν $\sqrt{J} = J$.*

Είναι σαφές ότι μπορούμε να παράγουμε κάθε αλγεβρικό σύνολο με reduced ιδεώδη. Όμως, όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, το να συμπεριλάβουμε και non-reduced ιδεώδη είναι απαραίτητο σε προβλήματα τομών, διαταραχών κτλ.

I.1.2 Τοπολογία Zariski

Εφαρμογή I.1.15. *Έστω V, W υποσύνολα του $\mathbb{A}^n_k$ με $V \supset W$. Να αποδειχθεί ότι $I(V) \subset I(W)$ και ότι αν $V(J_1) = V \supsetneq W = V(J_2)$, τότε $\sqrt{J_1} \subsetneq \sqrt{J_2}$.*

Απόδειξη. Αν $f \in I(V)$, τότε εξ ορισμού $f(P) = 0$ για κάθε $P \in V \supset W$, συνεπώς $f(P) = 0$ για κάθε $P \in W$, οπότε $f \in I(W)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $V(J_1) = V \supsetneq W = V(J_2)$. Έχουμε

$$\sqrt{J_1} = I(V(J_1)) \subset I(V(J_2)) = \sqrt{J_2}.$$

Αν είχαμε $\sqrt{J_1} = \sqrt{J_2}$, τότε θα είχαμε $V = W$, άτοπο. □

Πρόταση I.1.16. *Αν $V(I)$ δεν είναι ούτε $\emptyset$ ούτε $\mathbb{A}^n_k$, τότε το συμπλήρωμα $V(I)^c$ δεν είναι αλγεβρικό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπήρχε $J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ ώστε $V(I)^c = V(J)$. Θα είχαμε

$$V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k \text{ και } V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k.$$

Συνεπώς $\sqrt{I \cap J} = \langle 0 \rangle = I(\mathbb{A}^n_k)$. Τότε $I \cap J = \langle 0 \rangle$ αφού $I \cap J \subset \sqrt{I \cap J}$. Αν $I \neq \langle 0 \rangle$ και $J \neq \langle 0 \rangle$, τότε υπάρχει $f \in I, g \in J$, με $f, g \neq 0$ και $f \cdot g \in I \cap J = \langle 0 \rangle$, δηλαδή $f \cdot g = 0$, άτοπο. Άρα $I = \langle 0 \rangle$ ή $J = \langle 0 \rangle$. □

Πρόταση I.1.17. *Θεωρούμε το σύνολο των συμπληρωμάτων όλων των αλγεβρικών συνόλων*

$$\mathcal{T} = \{V(I)^c : I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στο $\mathbb{A}^n_k$, δηλαδή έχει τις ιδιότητες:

1. $\emptyset, \mathbb{A}^n_k \in \mathcal{T}$
2. *Αν $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, τότε $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.*
3. *$\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$, αν όλα τα $O_\lambda \in \mathcal{T}$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $V\langle 0 \rangle = \mathbb{A}^n_k$, $V(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$. Επιπλέον αν $O_1 = V(J_1), O_2 = V(J_2)$, τότε

$$O_1 \cap O_2 = (V(J_1) \cup V(J_2))^c = V(J_1 \cap J_2)^c \in \mathcal{T}$$

Τέλος αν $O_\lambda = V(J_\lambda)^c$, τότε

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V(J_\lambda) \right)^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(J_\lambda) \right)^c = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \right)^c \in \mathcal{T}.$$

□

Θέλουμε να ορίσουμε μία τοπολογία στα σύνολα $\mathbb{A}^n_k$. Παρατηρούμε ότι $V(f) = f^{-1}\langle 0\rangle$, συνεπώς αν υποθέσουμε ότι τα σημεία είναι κλειστά και ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, τότε το $V(f)$ είναι κλειστό. Επιπλέον αν $I = \langle f_1, \dots, f_s\rangle$, τότε και το

$$V(I) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)$$

είναι κλειστό.

Ορισμός I.1.18. *Η τοπολογία Zariski στο $\mathbb{A}^n_k$ είναι αυτή στην οποία τα αλγεβρικά σύνολα είναι κλειστά. Η τοπολογία Zariski στο $V(I) \subset \mathbb{A}^n_k$ είναι η επαγόμενη από τον περιβάλλοντα χώρο.*

Παράδειγμα I.1.19. *Τα κλειστά στην τοπολογία Zariski του $\mathbb{A}^1_k$ είναι τα πεπερασμένα σημεία. Η τοπολογία Zariski στο $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k$ δεν είναι η τοπολογία γινόμενο, αφού για παράδειγμα περιέχει περισσότερα κλειστά από τα πεπερασμένα γινόμενα σημείων, όπως για παράδειγμα το $V(x^2 + y^2 - 1)$.*

Επίσης η τοπολογία Zariski δεν είναι Hausdorff, όπως εύκολα παρατηρούμε από το $\mathbb{A}^1_k$ όταν το k είναι άπειρο σύνολο.

Ορισμός I.1.20. *Ένα αλγεβρκό σύνολο $V \subset \mathbb{A}^n_k$ θα λέγεται μη-ανάγωγο (reducible) αν και μόνο αν $V = V_1 \cup V_2$ με $V_1 \neq V, V_2 \neq V$. Αν δεν είναι μη-ανάγωγο, θα λέγεται ανάγωγο (irreducible).*

Έστω $V = V(J) = V(J_1) \cup V(J_2)$, με $V(J) \neq V(J_1)$, $V(J) \neq V(J_2)$. Αφού $V(J) \supsetneq V(J_i)$ έχουμε $\sqrt{J} = I(V(J)) \subsetneq I(V(J_i)) = \sqrt{J_i}$ για $i = 1, 2$. Συνεπώς υπάρχουν $f_1 \in \sqrt{J_1}, f_2 \in \sqrt{J_2}$ με $f_1, f_2 \notin \sqrt{J}$. Όμως το $f_1 f_2$ μηδενίζεται στο $V(J)$, άρα $f_1 f_2 \in \sqrt{J}$. Άρα το $\sqrt{J}$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα ιδεώδες I είναι πρώτο αν $a \cdot b \in I$, τότε $a \in I$ ή $b \in I$.

Πρόταση I.1.21. *Ένα αλγεβρικό σύνολο V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $I(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Αποδείξαμε ήδη ότι το $I(V)$ δεν είναι πρώτο για μη-ανάγωγα σύνολα. Συνεπώς αν $I(V)$ πρώτο, τότε V ανάγωγο.

Αντιστρόφως, έστω V ανάγωγο και $I(V)$ όχι πρώτο, συνεπώς υπάρχουν f_1, f_2 με $f_1, f_2 \notin I(V)$ και $f_1 f_2 \in I(V)$. Έστω J_i το ιδεώδες που παράγεται από το $I(V)$ και το f_i. Αφού $f_i \notin I(V)$ έχουμε ότι $V(J_1) \subsetneq V$ και $V(J_2) \subsetneq V$. Όμως $f_1 f_2 \in I(V)$, συνεπώς για κάθε $P \in V$ έχουμε $f_1(P) = 0$ ή $f_2(P) = 0$, άρα $P \in V(J_1) \cup V(J_2)$, δηλαδή $V = V(J_1) \cup V(J_2)$, άτοπο. □

Παρατηρούμε ότι το μηδενικό ιδεώδες $\langle 0\rangle$ είναι πρώτο, συνεπώς το $\mathbb{A}^n_k$ είναι ανάγωγο. Αυτό δίνει και μία εναλλακτική απόδειξη της πρότασης I.1.16.

Παράδειγμα I.1.22. *Ας θεωρήσουμε το κύριο ιδεώδες $I = (f) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$, το οποίο είναι πρώτο αν και μόνο αν το πολυώνυμο f είναι ανάγωγο.*

Ορισμός I.1.23. *Για ένα αλγεβρικό σύνολο V ο δακτύλιος*

$$k[V] = \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$$

θα λέγεται ο δακτύλιος συντεταγμένων.

Πόρισμα I.1.24. *Το V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $k[V]$ είναι ακεραία περιοχή.*

Είναι φυσιολογικό να θεωρήσουμε ως συναρτήσεις $\mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^1_k$ τον δακτύλιο των πολυωνύμων $k[x_1, \dots, x_n]$. Στη συνέχεια, ως συναρτήσεις στο υποσύνολο $V \subset \mathbb{A}^n_k$ θεωρούμε τον περιορισμό των πολυωνύμων στο V. Είναι σαφές ότι δύο πολυώνυμα $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ επάγουν με περιορισμό την ίδια συνάρτηση στο V αν και μόνο αν $f - g \in I(V)$.

Ορισμός I.1.25. *Θεωρούμε τα αλγεβρικά σύνολα* $V \subset \mathbb{A}_k^m$ *και* $W \subset \mathbb{A}_k^n$*. Μια συνάρτηση* $\phi : V \to W$ *θα λέγεται μορφισμός αλγεβρικών συνόλων αν υπάρχουν πολυώνυμα* $f_j \in k[x_1, \dots, x_m]$, $j = 1, \dots n$*, ώστε κάθε* $P = (a_1, \dots, a_m) \in V$ *να απεικονίζεται στο*

$$\phi(P) = (b_1, \dots, b_n) = \big(f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m)\big).$$

Στον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα $f_1, \dots, f_n$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Θα επανέλθουμε σύντομα με έναν ορισμό βασισμένο στους δακτύλιους συντεταγμένων.

Παράδειγμα I.1.26. *Θεωρούμε το* $C = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}_k^2$*. Ορίζουμε τον μορφισμό*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k^1 &\to C \subset \mathbb{A}_k^2 \\ a &\mapsto (a^2, a^3). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο $(b_1, b_2) = (a^2, a^3)$ *ικανοποιεί την εξίσωση ορισμού της* C*, δηλαδή η εικόνα όπως ορίστηκε ανήκει στο* C.

Επίσης παρατηρούμε ότι ο μορφισμός $\phi : \mathbb{A}_k^1 \to C$ *ορίζει έναν ομομορφισμό δακτυλίων*

$$\begin{aligned} \phi^{\#} : k[C] = k[x, y]/(y^2 - x^3) &\to k[\mathbb{A}_k^1] = k[t] \\ \overline{f}(x, y) = f(x, y) + (y^2 - x^2) &\mapsto f(t^2, t^3) \end{aligned}$$

ο οποίος εκφράζει τα πολυώνυμα $f(x, y)$ *ως συναρτήσεις του* t.

Επιπλέον ορίζεται ο μορφισμός

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}^{\#} k[\mathbb{A}_k^2] = k[x, y] &\to k[\mathbb{A}_k^1] = k[t] \\ f(x, y) &\mapsto f(t^2, t^3) \end{aligned}$$

Ο πυρήνας του $\widetilde{\phi}^{\#}$ *είναι ακριβώς το ιδεώδες που παράγεται από* $y^2 - x^3$*. Έτσι έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} k[x,y] \arrow[r, "i^{\#}"] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{\phi}^{\#}"'] & k[x,y]/(y^2 - x^3) \arrow[r, "\phi^{\#}"] & k[t] \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα I.1.27. *Θεωρούμε τα αλγεβρικά σύνολα*

$$V_1 = V(y^2 - x^3 + 1) \subset \mathbb{A}_k^2 \text{ και } V_2 = V(x_2^2 - x_1^3 + 1, x_3 - x_1^2) \subseteq \mathbb{A}_k^3.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ (a, b) &\longmapsto (a, b, a^2) \end{aligned}$$

Ορίζεται έτσι ένας μορφισμός:

$$\begin{aligned} k[V_2] = k[x_1, x_2, x_3]/\langle x_2^3 - x_1^3 + 1, x_3 - x_1^2\rangle &\longrightarrow k[V_1] = k[x, y]/\langle y^3 - x^3 + 1\rangle \\ g(x_1, x_2, x_3) + \langle x_2^3 - x_1^3 + 1, x_3 - x_1^2\rangle &\mapsto g(x, y, x^2) + \langle y^3 - x^3 + 1\rangle \end{aligned}$$

η οποία μπορεί να επεκταθεί στην

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}^{\#} : k[\mathbb{A}_k^3] = k[x_1, x_2, x_3] &\longrightarrow k[\mathbb{A}_k^2] = k[x, y] \\ g(x_1, x_2, x_3) &\longmapsto g(x, y, x^2) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο του δακτυλίου συντεταγμένων $k[V]$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση $V \to \mathbb{A}^1_k$. Έτσι θα ορίσουμε μορφισμό με βάση τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{ccc} k[W] & \longrightarrow & K[V] \\ & & \\ f & \longmapsto & f\circ\phi = \phi^{\#}(f) \end{array}$$

Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε τον εξής ορισμό (που είναι ισοδύναμος με τον πρώτο):

Ορισμός Ι.1.28. *Η συνάρτηση $\phi : V \to W$ είναι μορφισμός αν η επαγώμενη συνάρτηση (pull-back) $\phi^{\#} : k[W] \to k[V]$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.*

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την υλοποίησή του μέσω μη μοναδικά ορισμένων πολυωνύμων. Στην πραγματικότητα, μία υλοποίηση μέσω πολυωνύμων προϋποθέτει ότι το $V \subset \mathbb{A}^n_k$ (και με αυτό τον τρόπο το $I(V) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$), δηλαδή είναι εμβαπτισμένο μέσα σε ένα μεγαλύτερο περιβάλλον. Όπως στη θεωρία των διαφορισίμων πολλαπλοτήτων ορίζουμε πολλαπλότητες (και συνεπώς συναρτήσεις μεταξύ τους) ανεξάρτητα από κάποια εμβάπτισή τους σε κάποιον χώρο $\mathbb{R}^n$ έτσι θα κάνουμε και στην περίπτωση των αλγεβρικών συνόλων.

Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των δύο ορισμών, γράφουμε τις πεπερασμένα παραγόμενες k-άλγεβρες $k[V]$, $k[W]$ ως πηλίκα

$$\pi_1 : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I \text{ και } k[y_1, \ldots, y_m] \to k[W] = k[y_1, \ldots, y_m]/J$$

το οποίο προϋποθέτει ότι $V \subseteq k[V]$ και $W \subseteq k[W]$. Αν $\phi : k[W] \to k[V]$ είναι ομομορφισμός, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα $\phi(\pi_1)(y_i) \in k[V]$, άρα

$$(\phi \circ \pi_1)(y_i) = f_i(x_1, \ldots, x_n) + I$$

τα πολυώνυμα $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ είναι αυτά τα οποία ορίζουν συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n_k \supset V &\xrightarrow{\phi_0} W \subset \mathbb{A}^m_k \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_m(a_1, \ldots, a_n)) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η επιλογή των αντιπροσώπων f_i στην κλάση $f_i + I$ δεν επηρεάζει τον ϕ_0.

Αντιστρόφως, έχουμε ήδη δείξει ότι ένας μορφισμός όπως ορίστηκε στο Ι.1.25 ορίζει μέσω του pull-back έναν μορφισμό $\phi^{\#}$ ανάμεσα στους δακτύλιους συντεταγμένων. Πράγματι αν ϕ μορφισμός ώστε

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_m(a_1, \ldots, a_n)),$$

τότε ορίζεται ο $\phi^{\#} : k[y_1, \ldots, y_m]/I \to k[x_1, \ldots, x_n]/J$ με

$$g(y_1, \ldots, y_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) + J.$$

Ορισμός Ι.1.29. *Αν ο μορφισμός $\psi : V \to W$ είναι συνάρτηση 1-1 και επί και η επαγώμενη συνάρτηση στους δακτυλίους συντεταγμένων $\phi^{\#} : k[W] \to k[V]$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων, τότε τα αλγεβρικά σύνολα V, W θα ονομάζονται ισόμορφα.*

Ι.1.3 Σημεία και μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου συντεταγμένων

Έχουμε ήδη δει ότι σε κάθε σημείο $P = (a_1, \ldots, a_n)$ του V (ορισμένου πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k) αντιστοιχεί ένα μέγιστο ιδεώδες του $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$ του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ας συμβολίζουμε με $\bar{x}$ την κλάση του x σύμφωνα με τον επιμορφισμό

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{I(V)} = k[V].$$

Τότε το $\langle \bar{x}_1 - a_1, \ldots, \bar{x}_n - a_n \rangle$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$. Αντιστρόφως, αν $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$, τότε θα δείξουμε σε λίγο ότι το $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Έτσι $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) = \langle x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n \rangle$. Θα δείξουμε ότι το $(b_1, \ldots, b_n) \in V$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\langle x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n \rangle \supseteq I(V)$, άρα κάθε $f \in I(V)$ μηδενίζεται στα $(b_1, \ldots, b_n)$, άρα $(b_1, \ldots, b_n) \in V$. Πράγματι $0 + \mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$ και $i^{-1}(0 + \mathfrak{m}) = I(V)$, οπότε $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \supset i^{-1}\langle 0 \rangle = I(V)$.

Λήμμα I.1.30. *Έστω $\phi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και P πρώτο ιδεώδες του S, τότε το ιδεώδες $\phi^{-1}(P)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ορίζεται η συνάρτηση:

$$R/\phi^{-1}(P) \to S/P$$

η οποία είναι και μονομορφισμός. Συνεπώς το $R/\phi^{-1}(P)$ είναι ισόμορφο με υποδακτύλιο ακέραιας περιοχής και συνεπώς είναι πρώτο. □

Παρατήρηση I.1.31. *Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : R \to R'$ και $\mathfrak{m}$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του R', τότε το $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ δεν είναι κατ' ανάγκη μέγιστο ιδεώδες του R. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον εγκλεισμό $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Το ιδεώδες $\langle 0 \rangle \lhd \mathbb{Q}$ είναι μέγιστο και το $i^{-1}(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle$ δεν είναι μέγιστο.*

Γενικά το λήμμα I.1.30 εξασφαλίζει ότι τα μέγιστα ιδεώδη αντιστρέφονται σε πρώτα ιδεώδη, αφού κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι και πρώτο.

Στην περίπτωση όμως που οι δακτύλιοί μας είναι k-άλγεβρες για κάποιο σώμα k, έχουμε ότι οι αντίστροφες εικόνες μεγίστων ιδεωδών είναι μέγιστα ιδεώδη.

Λήμμα I.1.32.
1. *Αν A είναι ακέραια περιοχή ώστε κάθε $a \in A$ να είναι αλγεβρικό υπέρ του σώματος k, τότε το A είναι σώμα.*
2. *Αν ένα σώμα πηλίκων $\mathrm{Quot}(A)$ μιας ακεραίας περιοχής A περιέχεται σε affine k-άλγεβρα, τότε κάθε $a \in A$ είναι αλγεβρικό υπέρ το k.*

Απόδειξη. Έστω $a \in A$. Αφού το a είναι αλγεβρικό υπεράνω του k, το ιδεώδες των πολυωνύμων του $k[x]$ που μηδενίζονται στο a είναι μη κενό. Έστω f ο γεννήτορας αυτού του κύριου ιδεώδους. Αφού $k[x]/\langle f \rangle \cong k[a] \subset A$, το f είναι ανάγωγο και το αντίστοιχο ιδεώδες πρώτο και μέγιστο. Στη γλώσσα της αλγεβρικής γεωμετρίας $\langle f \rangle = I(\{a\})$ με $\{a\} \subset \mathbb{A}^1_k$.

Αν το f είναι βαθμού 1, τότε το $a \in k$ και συνεπώς αντιστρέφεται. Διαφορετικά θεωρούμε το σώμα $k[a] \cong k[x]/(f)$ και συνεπώς υπάρχει πολυώνυμο $g \in k[x]$ με $g \cdot x \equiv 1 \mod (f)$. Το $g(a)$ είναι το αντίστροφο του a.

Το δεύτερο μέρος του λήμματος προκύπτει από το λήμμα I.1.12.

□

Πρόταση I.1.33. *Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\psi : k[V] \to k[W]$ ανάμεσα σε δακτύλιους συντεταγμένων και υποθέτουμε ότι το $k[V]$ είναι ακεραία περιοχή.*

Έστω $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$. Τότε το $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι πρώτο ιδεώδες του $k[V]$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $k[V]/\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow k[W]/\mathfrak{m}$, συνεπώς κάθε στοιχείο του $R = k[V]/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι αλγεβρικό υπέρ το k και επιπλέον το R είναι ακέραια περιοχή που περιέχεται στο σώμα $k[W]/\mathfrak{m}$. Άρα το R είναι σώμα και το $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι μέγιστο. □

Πρόταση I.1.34. *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Για ένα αλγεβρικό σύνολο V υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του V και το σύνολο $\mathrm{Spm}(k[V])$, δηλαδή το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών του $k[V]$.*

$$V \ni (a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow (x - a_1, \ldots, x - a_n).$$

Έστω $\mathfrak{m}_a$ το μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$ που ορίζεται από τα $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Το $(\phi^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_a)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$ που παράγεται από τα $\langle y_1 - b_1, \ldots, y_m - b_m \rangle$, με $b_j = f_j(a_1, \ldots, a_n)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots f_m(a_1, \ldots, a_n),$$

τότε

$$\phi^{\#}(y_1, \ldots, y_m) = g\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m)\big).$$

Παρατηρούμε ότι

$$y_j - b_j = f_j(x_1, \ldots, x_n) - f_j(a_1, \ldots, a_n)$$

μηδενίζεται στο $(a_1, \ldots, a_n)$, συνεπώς $y_j(\overline{x}) - b_j \in I(V(\mathfrak{m}_a)) = \mathfrak{m}_a$. Συνεπώς $y_j - b_j \in (\phi^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_a)$. Δηλαδή το μέγιστο ιδεώδες $\langle y_1 - b_1, \ldots, y_m - b_m \rangle$ περιέχεται στο μέγιστο ιδεώδες $(\phi^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_a)$, άρα

$$\langle y_1 - b_1, \ldots, y_m - b_m \rangle = (\phi^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_a)$$

Ορισμός Ι.1.35. *Έστω V ένα αλγεβρικό σύνολο με δακτύλιο συντεταγμένων $k[V]$. Το ζευγάρι $(V, k[V])$ θα λέγεται αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Μία συνάρτηση

$$(\phi, \phi^{\#}) : (V, k[V]) \longrightarrow (W, k[W])$$

μεταξύ αφινικών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων αποτελείται από μία απεικόνιση $\phi : V \to W$ μεταξύ των αλγεβρικών συνόλων μαζί με έναν ομομορφισμό k-αλγεβρών

$$\phi^{\#} : k[W] \to k[V]$$

ώστε $(\phi^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_a) = \mathfrak{m}_b$, όπου $b = \phi(a)$ και $\mathfrak{m}_a, \mathfrak{m}_b$ είναι μέγιστα ιδεώδη των $k[V], k[W]$ αντίστοιχα.

Αν ο ϕ είναι 1-1 και επί και ο $\phi^{\#}$ ισομορφισμός, τότε θα λέμε ότι τα $(V, k[V]$ και $(W, k[W])$ είναι ισόμορφα.

Ο παραπάνω ορισμός έχει το πλεονέκτημα ότι δεν προϋποθέτει εμφύτευση σε κάποιον αφινικό χώρο. Αρκεί να ορίσουμε ένα σύνολο σημείων V μαζί με μια k-άλγεβρα κανονικών συναρτήσεων στο V.

Παρατηρούμε ότι οι δακτύλιοι κανονικών συναρτήσεων δεν έχουν μηδενοδύναμα στοιχεία, αφού μπορούν να γραφούν ως $k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ και το $\sqrt{I(V)} = I(V)$. Ας προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την έννοια της αλγεβρικής πολλαπλότητας τώρα.

Ορισμός Ι.1.36. *Για κάθε αντιμεταθετικό δακτύλιο R, θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Spm}R$ το σύνολο των μέγιστων ιδεωδών του.*

Ορισμός Ι.1.37. *Θεωρούμε μια πεπερασμένα παραγόμενη k-άλγεβρα R, χωρίς να απαιτούμε ότι δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία. Το ζευγάρι $(\mathrm{Spm}(R), R)$ θα λέγεται μια γενικευμένη αφινική πολλαπλότητα.*

Ένας ομομορφισμός μεταξύ γενικευμένων αφινικών πολλαπλοτήτων είναι ένα ζευγάρι (ψ^a, ψ) που αποτελείται από έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\psi : S \longrightarrow R$$

και μία επαγώμενη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \psi^a : \mathrm{Spm}(R) &\longrightarrow \mathrm{Spm}(S) \\ \mathfrak{m} &\mapsto \psi^{-1}\mathrm{m}_a. \end{aligned}$$

Ο δακτύλιος R είναι ο δακτύλιος των κανονικών συναρτήσεων στο $\mathrm{Spm}(R)$.

Παρατήρηση I.1.38. *Ο όρος κανονικές συναρτήσεις είναι δικαιολογημένος, αφού κάθε στοιχείο* $r \in R$ *ορίζει συνάρτηση:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Spm}(R) &\to k \\ \mathfrak{m} &\mapsto R/\mathfrak{m} = k. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε για παράδειγμα ότι για μία συνάρτηση που ορίζεται από το πολυώνυμο $f(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *ο προσδιορισμός της τιμής στο* $(a_1, \ldots, a_n)$ *δίνεται από την αναγωγή στο* $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$*, δηλαδή*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \mod \mathfrak{m}.$$

Ο γενικότερος αυτός ορισμός επιτρέπει τη μελέτη αφινικών πολλαπλοτήτων όπως το

$$(\mathrm{Spm}(k[x]/\langle x^n \rangle), k[x]/\langle x^n \rangle).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{Spm}(k[x]/\langle x^n \rangle) = \mathrm{Spm}(k[x]/\langle x \rangle) = \{\langle x \rangle / \langle x^n \rangle\}.$$

Πράγματι τα ιδεώδη του δακτυλίου $k[x]/\langle x^n \rangle$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα ιδεώδη του δακτυλίου $k[x]$ τα οποία περιέχουν το $\langle x^n \rangle$. Δηλαδή ο δακτύλιος $k[x]/\langle x^n \rangle$ έχει τα εξής ιδεώδη:

$$\langle x \rangle / \langle x^n \rangle \supset \langle x^2 \rangle / \langle x^n \rangle \supset \cdots \langle x^n \rangle / \langle x^n \rangle,$$

από τα οποία προκύπτει ότι το μέγιστο είναι το $\langle x \rangle / \langle x^n \rangle$.

Δηλαδή τα σύνολα μεγίστων ιδεωδών των παραπάνω δακτυλίων, ανεξαρτήτως του φυσικού αριθμού n, αποτελούνται από ένα μόνο σημείο. Παρόλα αυτά, είναι διαφορετικές γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες, αφού έχουν διαφορετικούς δακτυλίους κανονικών συναρτήσεων.

Η δυνατότητα να έχουμε μηδενοδύναμα στοιχεία μας επιτρέπει να μελετήσουμε απειροστές περιοχές αλγεβρικών πολλαπλοτήτων, ενώ οι δακτύλιοι $k[x]/\langle x^n \rangle$ είναι γνωστοί στη βιβλιογραφία ως δακτύλιοι n-τάξης απειροστών παραμορφώσεων.

I.1.4 Τοπολογία σε γενικευμένες αφινικές αλγεβρικές πολλαπλότητες

Θεωρούμε μια γενικευμένη αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα $(\mathrm{Spm}(R), R)$ για κάθε $f \in R$ ορίζουμε το σύνολο

$$D(f) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(R) : f \notin \mathfrak{m}\}.$$

Η τοπολογία Zariski στο $\mathrm{Spm}(R)$ έχει ως βάση ανοιχτών τα $D(f)$. Δηλαδή ένα σύνολο U είναι ανοιχτό αν και μόνο αν $U = \cup_{a \in A} D(f_a)$. Επίσης ορίζουμε τις υπερεπιφάνειες

$$V(f) = D(f)^c = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(R) \text{ ώστε } f \in \mathfrak{m}\}.$$

Παρατηρούμε ότι ένα σημείο P είναι στοιχείο ενός αλγεβρικού συνόλου $V(I)$, αν $\{P\} \subset V(I)$, δηλαδή αν $\mathfrak{m} \supset \sqrt{I} = I(V(I))$. Άρα $P \in V(f)$ αν και μόνο αν $\mathfrak{m} \supset \sqrt{\langle f \rangle} \supset \langle f \rangle$, δηλαδή $f \in \mathfrak{m}$.

Επίσης, αν I είναι ιδεώδες του R έχουμε

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f) \qquad V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f).$$

Κάθε ανοιχτό $U \in \mathrm{Spm}(R)$ γράφεται ως $D(J)$ για κάποιο ιδεώδες J του R και κάθε κλειστό γράφεται ως $V(J)$ για κάποιο ιδεώδες J του R.

Παράδειγμα I.1.39. *Έστω ένα στοιχείο* $f \in R$ *το οποίο δεν είναι μηδενοδύναμο. Θεωρούμε το ιδεώδες* $\langle 1 - ft \rangle \subset R[t]$ *και θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$S = R[1/f] = \frac{R[t]}{\langle 1 - ft \rangle}.$$

Αν $R = k[x_1, \dots, x_n]/J$*, δηλαδή ο* R *είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη* k*-άλγεβρα, τότε υπάρχει κανονικός ομομορφισμός* k*-αλγεβρών*

$$\psi : k[x_1, \dots, x_n, t] \to S = \frac{k[x_1, \dots, x_n, t]}{\langle J, 1 - ft \rangle}.$$

Ένα μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ *του* S *δίνεται από το* $(a_1, \dots, a_n, b) \in k^{n+1}$*.*

$$\psi^{-1}(\mathfrak{m}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n, t - b \rangle \tag{I.2}$$

Ισχύει ότι $\mathfrak{m} = \psi\left(\psi^{-1}(\mathfrak{m})\right)$ *(γενικά είναι υποσύνολο, αλλά έχουμε μέγιστα ιδεώδη).*

Θέτουμε

$$\mathfrak{m}' = \langle x - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle.$$

Έχουμε ότι

$$1 \equiv f(a_1, \dots, a_n) b \mod \mathfrak{m}', \tag{I.3}$$

συνεπώς το $f \notin \mathfrak{m}'$*. Αφού* $R/\mathfrak{m}' = k$*,* $f \notin \mathfrak{m}'$ *υπάρχει μοναδικό* $b \in k$ *ώστε να ισχύει η (I.3). Δηλαδή η εικόνα του* $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ *υπό την* ψ *είναι μέγιστο ιδεώδες του* S*. Δηλαδή*

$$\mathrm{Spm}(S) \xleftrightarrow[\textit{επί}]{1-1} D(f) = \{\mathfrak{m}' \in \mathrm{Spm}(R) : f \notin \mathfrak{m}'\}.$$

Δηλαδή το $\big(D(f), S\big)$ *είναι μια γενικευμένη αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Παράδειγμα I.1.40. *Η γενική γραμμική ομάδα* $\mathrm{GL}_n(k)$ *είναι αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα με δακτύλιο συντεταγμένων* $k[x_{i,j}, \det(x_{i,j})^{-1}]$*.*

Αν έχουμε δύο τοπολογικούς χώρους X, Y και έναν ομοιομορφισμό $\phi : X \supset U_X \to U_Y \subset Y$ ανάμεσα σε δύο ανοιχτά υποσύνολα U_X και U_Y των χώρων X, Y, τότε κατασκευάζουμε έναν νέο τοπολογικό χώρο στον οποίο «κολλάμε» τους X, Y κατά μήκος των U_X, U_Y. Ο χώρος αυτός ορίζεται ως ο χώρος πηλίκο

$$\left(X \coprod Y\right) / \sim \ \text{ όπου } x \sim y \text{ αν και μόνο αν } y = f(x).$$

Παράδειγμα I.1.41. *Θεωρούμε* $U_1 = (\mathbb{A}^1_k, k[x])$ *και* $U_2 = (\mathbb{A}^1_k, k[y])$*. Στη συνέχεια, θεωρούμε τα ανοιχτά σύνολα* $U_{01} = (D(x), k[x, 1/x])$ *και* $U_{10} = (D(y), k[y, 1/y])$*. Θεωρούμε τώρα τον ισομορφισμό*

$$\begin{aligned} \psi : k[y, 1/y] &\to k[x, 1/y] \\ f(y, 1/y) &\mapsto f(1/x, y) \end{aligned}$$

και «κολλάμε κατά μήκος του ισομορφισμού» $(\psi^a, \psi) : U_{01} \to U_{10}$*. Δηλαδή έχουμε τον σχηματισμό της προβολικής ευθείας* $\mathbb{P}^1_k$ *κολλώντας τα* $D(x) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ *και* $D(y) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$*,* $b \in D(x) \mapsto \psi^a(b) = 1/b \in D(y)$*.*

Σε επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε περισσότερο με προβολικούς χώρους και ανοιχτές καλύψεις αυτών.

Πρόταση I.1.42. *Για κάθε* $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ *ισχύει* $V(I(Y)) = \overline{Y}$*, όπου* $\overline{Y}$ *είναι η κλειστότητα του* Y*.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $Y \subset V(I(Y))$ το οποίο είναι ένα κλειστό σύνολο, συνεπώς $\overline{Y} \subset V(I(Y))$. Από την άλλη, έστω $W = V(J)$ ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το Y. Αφού $Y \subset V(J)$ έχουμε

$$J \subset \sqrt{J} = I(V(J)) \subset I(Y),$$

συνεπώς

$$W = V(J) \supset V(I(Y)), \text{ άρα } \overline{Y} = \cap W \supset V(I(Y)).$$

$\square$

Ορισμός I.1.43. *Ένας τοπολογικός χώρος X θα λέγεται Noether αν ικανοποιεί τη «φθίνουσα συνθήκη αλυσίδας» για κλειστά σύνολα, δηλαδή για κάθε ακολουθία κλειστών υποσυνόλων*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$$

υπάρχει κάποιος δείκτης r ώστε $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

Παράδειγμα I.1.44. *Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ με τη συνηθισμένη τοπολογία δεν είναι Noetherian, για παράδειγμα $Y_n = [-1/n, 1/n] \subset \mathbb{R}$.*

Παράδειγμα I.1.45. *Ο χώρος $\mathbb{A}^n k$ είναι Noether. Πράγματι, αν*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$$

είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων, τότε η

$$I(Y_1) \subset I(Y_2) \subset \cdots I(Y_n) \subset \cdots$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία ιδεωδών στον δακτύλιο $k[x_1, \ldots, x_n]$ ο οποίος είναι Noehter. Συνεπώς για κάποιο φυσικό $r \in N$ έχουμε $I(Y_r) = I(Y_{r+1}) = \cdots$. Όμως ισχύει ότι $V(I(Y)) = \overline{Y}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση I.1.46. *Σε έναν τοπολογικό χώρο της Noether X κάθε μη κενό κλειστό σύνολο Y γράφεται ως πεπερασμένη ένωση $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ ανάγωγων κλειστών συνόλων. Αν απαιτήσουμε ότι $Y_i \supsetneq Y_j$ για $i \neq j$, τότε τα σύνολα Y_i είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Θα τα ονομάζουμε τις ανάγωγες συνιστώσες του Y.*

Απόδειξη. Στην αρχή θα δείξουμε ότι μια τέτοια διάσπαση υπάρχει. Ας θεωρήσουμε το σύνολο A των μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X τα οποία δεν μπορούν να γραφούν ως πεπερασμένη ένωση ανάγωγων. Αν το $A \neq \emptyset$, τότε θα πρέπει να περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο Y, σύμφωνα με τη συνθήκη Noether. Το Y δεν είναι ανάγωγο, αφού είναι στοιχείο του A. Συνεπώς μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο γνήσια κλειστών υποσυνόλων του $Y = Y' \cup Y''$. Τα σύνολα $Y', Y'' \notin A$, συνεπώς γράφονται ως πεπερασμένη ένωση ανάγωγων κλειστών συνόλων. Το ίδιο και το Y, άτοπο. Αν πετάξουμε έξω μερικά που δεν χρειάζονται, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $Y_i \subsetneq Y_j$ για $i \neq j$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $Y = Y_1' \cup \cdots \cup Y_s'$ είναι μια άλλη αναπαράσταση. Τότε $Y_1' \subset Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$, συνεπώς $Y_1' = \cup(Y_1' \cap Y_i)$. Αφού όμως το Y_1' είναι ανάγωγο, θα πρέπει $Y_1' \subset Y_i$ για κάποιο i και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $Y_1' \subset Y_1$. Με όμοιο τρόπο $Y_1 \subset Y_j'$ για κάποιο j αλλά τότε $Y_1' \subset Y_j'$ το οποίο το έχουμε αποκλείσει. Άρα $Y_1 = Y_1'$. Αν θέσουμε $W = \overline{Y - Y_1}$, έχουμε $W = Y_2 \cup \cdots \cup Y_r = Y_2' \cup \cdots Y_s'$. Συνεχίζουμε επαγωγικά. □

Πόρισμα I.1.47. *Κάθε αλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{A}^n$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα ως ένωση αλγεβρικών συνόλων χωρίς το ένα να περιέχει το άλλο.*

Ορισμός I.1.48. *Σε έναν τοπολογικό χώρο ορίζουμε τη διάσταση του X, την οποία θα τη συμβολίζουμε με $\dim X$ ως το supremum όλων των ακεραίων n για τους οποίους υπάρχει μια αλυσίδα*

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots Z_n$$

διαφορετικών ανάγωγων κλειστών υποσυνόλων του X. Η διάσταση ενός αλγεβρικού αφινικού συνόλου ορίζεται ως η διάστασή του σαν τοπολογικός χώρος με την τοπολογία Zariski.

Παράδειγμα I.1.49. *Η διάσταση του $\mathbb{A}^1$ είναι 1. Πράγματι τα μοναδικά ανάγωγα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{A}^1$ είναι όλος ο χώρος και τα σημεία.*

Ορισμός I.1.50. *Σε έναν δακτύλιο το ύψος (height) ενός πρώτου ιδεώδους είναι το supremum όλων των ακεραίων* n *ώστε να υπάρχει μια αλυσίδα*

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$$

από διαφορετικά πρώτα ιδεώδη. Η διάσταση Krull του δακτυλίου A *ορίζεται ως το supremum όλων των υψών πρώτων ιδεωδών του* A.

Πρόταση I.1.51. *Αν το* Y *είναι ένα αφινικό αλγεβρικό σύνολο, η διάσταση του* Y *είναι ίση με την Krull διάσταση του δακτυλίου συντεταγμένων* $k[Y]$.

Απόδειξη. Αν το $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ είναι ένα αφινικό αλγεβρικό σύνολο, τότε τα κλειστά ανάγωγα υποσύνολά του αντιστοιχούν στα πρώτα ιδεώδη του $k[x_1, \dots, x_n]$ που περιέχουν το $I(Y)$. Αυτά αντιστοιχούν σε πρώτα ιδεώδη του $k[Y]$, σύμφωνα με την άσκηση 5. Συνεπώς το $\dim Y$ είναι το μήκος της μεγαλύτερης αλυσίδας πρώτων ιδεωδών στο $k[Y]$ το οποίο είναι η διάστασή του. ☐

Θεώρημα I.1.52. *Έστω* k *ένα σώμα και* B *ακέραια περιοχή η οποία είναι πεπερασμένα παραγόμενη* k*-άλγεβρα. Τότε*

1. *Η διάσταση του* B *είναι ίση με τον βαθμό υπερβατικότητας του σώματος πηλίκων* $\mathrm{Quot}(B)$ *του* B *υπέρ το* k.

2. *Για κάθε πρώτο ιδεώδες* $P \lhd B$ *ισχύει*

$$\mathrm{height}(P) + \dim B/P = \dim B.$$

Απόδειξη. Αν το k είναι αλγεβρικά κλειστό [1, κεφ. 11] ενώ στη γενική περίπτωση [4, κεφ. 5, παρ 14]. ☐

Παράδειγμα I.1.53. *Η διάσταση του* $\mathbb{A}^n_k$ *είναι* n. *Πράγματι ο βαθμός υπερβατικότητας του σώματος* $k(x_1, \dots, x_n)$ *είναι* n.

Πρόταση I.1.54. *Ένα ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο* $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ *έχει διάσταση* $n-1$ *αν και μόνο αν* $Y = V(f)$, *όπου* $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ *είναι ένα μη-σταθερό ανάγωγο πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Έστω f ανάγωγο πολυώνυμο, τότε το $k[x_1, \dots, x_n]/\langle f \rangle$ είναι ακέραια περιοχή και το $V(f)$ ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο. Το πρώτο ιδεώδες $\langle f \rangle$ έχει ύψος 1 και συνεπώς το $V(f)$ έχει διάσταση n.

Αντιστρόφως, ένα ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο διάστασης $n-1$ αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες ύψους 1. Αυτά, σύμφωνα με το Hauptidealsatz του Krull το οποίο ισχυρίζεται ότι σε δακτυλίους της Noether τα minimal πρώτα ιδεώδη που περιέχουν ένα στοιχείο f που δεν είναι μηδενοδιαιρέτης ούτε μονάδα, έχουν ύψος 1, [1] σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι ακέραιες περιοχές της Noether είναι περιοχές μονοσήμαντης ανάλυσης αν και μόνο αν κάθε πρώτο ιδεώδες ύψους ένα είναι κύριο, [4, σελ. 141], [2, κεφ. 7]. Το ζητούμενο προκύπτει, αφού το $k[x_1, \dots, x_n]$ είναι περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης. ☐

I.2 Ασκήσεις

1. (α΄) Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $Y = V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2_k$. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[Y]$ είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

   (β΄) Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $Z = V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2_k$. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[Z]$ δεν είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

2. Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{(t, t^2, t^3) : t \in k\} \subset \mathbb{A}^3_k$. Να αποδειχθεί ότι είναι αλγεβρικό και να βρεθούν γεννήτορες του ιδεώδους του. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων είναι ισόμορφος με τον πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

3. Να αποδειχθεί ότι μια k-άλγεβρα B είναι ισόμορφη με τον δακτύλιο συντεταγμένων αφινικού αλγεβρικού συνόλου αν και μόνο αν B είναι πεπερασμένα παραγώμενη k-άλγεβρα χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία.

4. Αν το Υ είναι ανάγωγο σύνολο στο Υ, να αποδειχθεί ότι και η κλειστότητα του $\overline{Y}$ είναι επίσης ανάγωγη.

5. Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

   (α΄) Αν I ιδεώδες του R, να αποδείχθεί ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα ιδεώδη του R/I και τα ιδεώδη του R που περιέχουν το I.

   (β΄) Ένα σύνολο S θα λέγεται πολλαπλασιαστικό αν $1 \in S$ και για κάθε $a, b \in S$ έχουμε $ab \in S$. Να αποδειχθεί ότι αν P πρώτο ιδεώδες, τότε $S = R \backslash P$ είναι πολλαπλασιαστικό. Αν $f \in R$ να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S = \{f^n\}_{n \geqslant 0}$ είναι πολλαπλασιαστικό. Θεωρούμε το σύνολο $S^{-1}R = \{r/f\}$, όπου r/f είναι η κλάση ισοδυναμίας από ζευγάρια (a, s), $a \in R, s \in S$ όπου $(a, s) \cong (b, t)$ αν και μόνο αν $(at - bs)u = 0$ για κάποιο $u \in S$. Με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάσαμε το σώμα κλασμάτων μιας ακέραιας περιοχής να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S^{-1}R$ έχει δομή δακτυλίου.

   (γ΄) Να αποδειχθεί ότι τα πρώτα ιδεώδη του $S^{-1}R$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα πρώτα ιδεώδη του R που έχουν κενή τομή με το S. Στην περίπτωση που $S = R \backslash P$ το τελευταίο σύνολο ταυτίζεται με τα πρώτα ιδεώδη του R που περιέχονται στο P.

6. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύνολο $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ το οποίο ορίζεται από τα πολυώνυμα $x^2 - yz$ και $xz - z$. Να δειχθεί ότι το Y είναι ένωση τριών ανάγωγων αλγεβρικών συνόλων για τα οποία να βρεθούν τα πρώτα ιδεώδη τους.

7. Να αποδειχθεί ότι κάθε ανοιχτό σύνολο σε έναν ανάγωγο τοπολογικό χώρο είναι πυκνό και ανάγωγο. Να δειχθεί ότι αν $Y \subset X$ είναι ανάγωγο στην τοπολογία που επάγεται από το X, τότε και το $\overline{Y}$ είναι ανάγωγο.

8. Έστω ένα $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ αλγεβρικό σύνολο διάστασης r. Αν η H είναι υπερεπιφάνεια στο $\mathbb{A}^n_k$ με $Y \not\subset H$, τότε να δειχθεί ότι κάθε ανάγωγη συνιστώσα του $Y \cap H$ έχει διάσταση $r - 1$.

9. Έστω I ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$ ιδεώδες το οποίο παράγεται από r το πλήθος στοιχεία. Να δειχθεί ότι κάθε ανάγωγη συνιστώσα του $V(I)$ έχει διάσταση $\geqslant n - r$.

Βιβλιογραφία

[1] Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, pp. ix+128.

[2] Bourbaki, N. *Commutative Algebra. Chapters 1–7*. Elements of Mathematics (Berlin). Translated from the French, Reprint of the 1972 edition. Berlin: Springer-Verlag, 1989, pp. xxiv+625. ISBN: 3-540-19371-5.

[3] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[4] Matsumura, H. *Commutative algebra*. Second. Vol. 56. Mathematics Lecture Note Series. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980, pp. xv+313. ISBN: 0-8053-7026-9.

[5] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*. expanded. Vol. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. x+306. ISBN: 3-540-63293-X. URL: `https://doi.org/10.1007/b62130`.

[6] Ueno, K. *Algebraic geometry. 1*. Vol. 185. Translations of Mathematical Monographs. From algebraic varieties to schemes, Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: `https://doi.org/10.1090/mmono/185`.

II

Προβολικές πολλαπλότητες

Θεωρούμε το αλγεβρικά κλειστό σώμα k. Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n_k$ είναι το σύνολο πηλίκο

$$k^{n+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\} / \sim$$

όπου $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in k^*$ ώστε $(x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$. Θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $(x_0, \dots, x_n)$ με $[x_0 : \dots : x_n]$.

Θα ορίσουμε υποσύνολα U_j $j = 0, 1, \dots, n$ του $\mathbb{P}^n_k$ με

$$U_j = \{[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n_k \text{ με } a_j \neq 0\}.$$

Αν $[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in U_j$ τότε έχουμε

$$[a_0 : a_1 : \dots : a_n] = \left[\frac{a_0}{a_j} : \frac{a_1}{a_j} : \dots : \frac{a_{j-1}}{a_j} : 1 : \frac{a_{j+1}}{a_j} : \dots : \frac{a_n}{a_j}\right]$$

Συνεπώς ως σύνολα η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathbb{A}^n_k &\longrightarrow U_j \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto [a_1 : \dots : a_j : 1 : a_{j+1} : a_{j+2} : \dots : a_n] \end{aligned}$$

είναι 1-1 και επί. Μέσω της ϕ_j θεωρούμε το U_j ως έναν n-διάστατο αφινικό χώρο $\mathbb{A}^n_k$. Όταν $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi_{jk} = \phi_j^{-1} \circ \phi_k : \phi_k^{-1}(U_j \cap U_k) \to \phi_j^{-1}(U_j \cap U_k).$$

Ας υποθέσουμε ότι $j < k$, τότε

$$\begin{aligned} \phi_k^{-1}(U_j \cap U_k) &= \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k \text{ με } a_{j+1} \neq 0\} \\ \phi_j^{-1}(U_j \cap U_k) &= \{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^n_k \text{ με } b_k \neq 0\} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση ϕ_{jk} γράφεται ως:

$$(a_1, \dots, a_n) \xmapsto{\phi_k} [a_1 : \dots : a_k : 1 : a_{k+1} : \dots : a_n] =$$

$$\left[\frac{a_1}{a_{j+1}} : \dots : \frac{a_j}{a_{j+1}} : 1 : \frac{a_{j+2}}{a_{j+1}} : \dots : \frac{a_k}{a_{j+1}} : \frac{1}{a_{j+1}} : \frac{a_{k+1}}{a_{j+1}} : \dots : \frac{a_n}{a_{j+1}}\right] \xmapsto{\phi_j^{-1}}$$

$$\xmapsto{\phi_j^{-1}} \left(\frac{a_1}{a_{j+1}}, \dots, \frac{a_j}{a_{j+1}}, \frac{a_{j+2}}{a_{j+1}}, \dots, \frac{a_k}{a_{j+1}}, \frac{1}{a_{j+1}}, \frac{a_{k+1}}{a_{j+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{j+1}}\right)$$

Έστω ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων του $\mathbb{A}^n_k$ που αντιστοιχεί στο U_j είναι ο $k[x^{(j)}_1, \ldots, x^{(j)}_n]$ με $j = 0, \ldots, n$. Τότε ο ϕ_{jk} είναι μία συνάρτηση από το ανοιχτό σύνολο $D(x^{(k)}_{j+1}) \subset \mathbb{A}^n_k$ στο ανοιχτό σύνολο $D(x^{(j)}_k) \subset \mathbb{A}^n_k$ και ϕ_{jk} δίνεται μέσω του ισομορφισμού:

$$\phi^{\#}_{jk} : k[x^{(j)}_1, \ldots, x^{(j)}_n, 1/x^{(j)}_k] \to k[x^{(k)}_1, \ldots, x^{(k)}_n, 1/x^{(k)}_{j+1}]$$

$$\frac{1}{\left(x^{(j)}_k\right)^{\ell}} f(x^{(j)}_1, \ldots, x^{(j)}_n) \mapsto \left(x^{(k)}_{j+1}\right)^{\ell} f\left(\frac{x^{(k)}_1}{x^{(k)}_{j+1}}, \ldots, \frac{x^{(k)}_k}{x^{(k)}_{j+1}}, \frac{1}{x^{(k)}_{j+1}}, \frac{x^{(k)}_{k+1}}{x^{(k)}_{j+1}}, \ldots, \frac{x^{(k)}_n}{x^{(k)}_{j+1}}\right)$$

Δηλαδή το $\mathbb{P}^n_k$ είναι μία αλγεβρική πολλαπλότητα η οποία προκύπτει από κολλήματα $n+1$ αφινικών χώρων U_j.

Θεωρούμε τον ομογενή δακτύλιο συντεταγμένων $k[x_0, \ldots, x_n]$ για τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n_k$. Τότε ο δακτύλιος συντεταγμένων γράφεται

$$k[U_j] = k\left[x^{(j)}_1, \ldots, x^{(j)}_n\right] = k\left[\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right]$$

Τότε ο παραπάνω ισομορφισμός προκύπτει αντικαθιστώντας το x_i/x_j με το x_j/x_i.

II.1 Ομογενή πολυώνυμα

Ένα πολυώνυμο
$$f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{k_0+\cdots+k_n=m} \alpha_{k_0,\ldots,k_n} x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$$
θα λέγεται ομογενές πολυώνυμο βαθμού m. Για αυτό το πολυώνυμο ικανοποιείται η σχέση:

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$$

και συνεπώς αν $\lambda \neq 0$ έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ αν και μόνο αν $f(\lambda x) \neq 0$, δηλαδή η ιδιότητά του να μηδενίζεται ή όχι η κλάση $[a_0 : \cdots : a_n]$ στο ομογενές πολυώνυμο $f(x)$ είναι ανεξάρτητη του αντιπροσώπου $(a_0, \ldots, a_n)$.

Θεωρούμε τα ομογενή πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_m$. Μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο

$$\mathbb{P}^n_k \supset V(f_1, \ldots, f_r) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n_k \text{ με } f([a_0 : \cdots : a_n]) = 0\}.$$

Ας θεωρήσουμε το ιδεώδες I το οποίο παράγεται από τα ομογενή πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_r$. Ένα πολυώνυμο $f \in I$ διασπάται ως
$$f = f_d + f_{d+1} + \cdots + f_m$$
δηλαδή ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων με όλα τα $f_d \in I$. Πράγματι, αν

$$f = g_1 f_1 + \cdots + g_k f_r$$

και το $g_i = \sum_\lambda g_{i,\lambda}$, όπου τα $g_{i,\lambda}$ είναι μονώνυμα, τότε

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda} \underbrace{g_{i,\lambda} f_i}_{\text{ομογενές}}$$

Αρκεί λοιπόν στο παραπάνω άθροισμα να συγκεντρώσουμε μαζί τα ομογενή πολυώνυμα ίδιου βαθμού, τα οποία θα είναι στοιχεία του I.

Ορισμός II.1.1. *Ένα ιδεώδες που παράγεται από ομογενή πολυώνυμα θα λέγεται ομογενές.*

Πρόταση II.1.2. *Ένα ιδεώδες* I *είναι ομογενές αν και μόνο αν κάθε* $f \in I$ *διασπάται ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων, ώστε το καθένα από αυτά να είναι στοιχείο του* I.

Απόδειξη. Αποδείξαμε ήδη ότι αν το ιδεώδες I παράγεται από ομογενή πολυώνυμα, τότε κάθε f έχει τη ζητούμενη διάσπαση. Αντιστρόφως, έστω ένα ιδεώδες I: Αφού ο δακτύλιος $k[x_0, \ldots, x_n]$ είναι δακτύλιος Noether, έχουμε ότι είναι πεπερασμένα παραγόμενος από τα πολυώνυμα $f_1, \ldots, f_r$. Το κάθε ένα από αυτά γράφεται ως άθροισμα

$$f_i = \sum_{\lambda=1}^{s_i} f_{i,\lambda},$$

με $f_{i,\lambda} \in I$ ομογενή πολυώνυμα. Είναι σαφές ότι $I \supset \langle f_{i,\lambda} \rangle \supset \langle f_1, \ldots, f_r \rangle = I$. □

Πρόταση II.1.3. *Αν το* I *είναι ομογενές ιδεώδες, τότε και το* $\sqrt{I}$ *είναι ομογενές ιδεώδες.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \sqrt{I}$ και ας υποθέσουμε ότι το $f = \sum f_d$ με τα f_d ομογενή βαθμού d. Θα δείξουμε ότι τα $f_d \in \sqrt{I}$. Γνωρίζουμε ότι $f^m \in I$ συνεπώς

$$f^m = \sum \binom{m}{\nu_1, \ldots, \nu_r} f_{d_1}^{\nu_1} \cdots f_{d_r}^{\nu_r}.$$

Ας θεωρήσουμε τον μεγαλύτερου βαθμού f_d ομογενή παράγοντα του f. Είναι σαφές ότι $f_d^m \in I$, συνεπώς $f_d \in \sqrt{I}$. Τώρα το $f - f_d \in \sqrt{I}$ και έχει χαμηλότερου βαθμού μεγιστοβάθμιο ομογενή όρο. □

Για ένα ομογενές ιδεώδες $I \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ ορίζουμε το $V(I)$. Επιπλέον, έχουμε $V(I) = V(\sqrt{I})$. Αντιστρόφως, για ένα προβολικό σύνολο ορίζουμε το

$$I(V) = \{f \in k[x_0, \ldots, x_r] : f(a_0, \ldots, a_n) = 0, \text{ για κάθε } [a_0 : \ldots : a_r] \in V\}.$$

Το $I(V)$ είναι ομογενές ιδεώδες. Πράγματι το ότι το V είναι προβολικό σύνολο σημαίνει ότι $(a_0, \ldots, a_n) \in V$, τότε $\lambda(a_0, \ldots, a_n) \in V$. Συνεπώς αν $f \in I(V)$, έχουμε

$$f = f_d + \cdots + f_k$$

και για κάθε $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$0 = f(\lambda a) = \lambda^d f_k(a) + \cdots + \lambda^k f_k(a).$$

Αφού το k είναι ένα άπειρο σώμα η παραπάνω εξίσωση δίνει ότι $f_i(a) = 0$, δηλαδή όλα τα $f_i \in I(V)$.

Μία σημαντική διαφορά από τα προβολικά και αφινικά σύνολα είναι η παρακάτω: Το μέγιστο ιδεώδες $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ οδηγεί στο κενό σύνολο αφού το $(0, \ldots, 0)$ δεν είναι στοιχείο του $\mathbb{P}_k^n$.

Επιπλέον, το σημείο $[a_0 : \cdots : a_n]$ χαρακτηρίζεται από το ομογενές ιδεώδες που παράγεται από τα

$$\langle a_j x_i - a_i x_j : 0 \leqslant i < j \leqslant n \rangle.$$

Το Nullstellensatz του Hilbert ισχύει και για την προβολική περίπτωση αρκεί το $V(J) \neq \emptyset$. Η αναγωγησιμότητα ορίζεται παρόμοια και ένα ανάγωγο προβολικό σύνολο λέγεται *προβολική πολλαπλότητα*. Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο μία προβολική πολλαπλότητα είναι το ιδεώδες $I(V)$ να είναι πρώτο. Για ένα προβολικό σύνολο ο δακτύλιος $k[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$ είναι ο ομογενής δακτύλιος συντεταγμένων του V. Επίσης, μπορούμε να ορίζουμε την τοπολογία Zariski στο $\mathbb{P}_k^n$ με παρόμοιο τρόπο όπως και στην αφινική περίπτωση, όπου τα κλειστά θα είναι τα αλγεβρικά προβολικά σύνολα.

Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n_k$ προκύπτει κολλώντας $n+1$ σύνολα ισόμορφα με το $\mathbb{A}^n_k$. Θα δούμε τώρα ότι μια προβολική πολλαπλότητα προκύπτει κολλώντας $n+1$ αφινικές αλγεβρικές πολλαπλότητες. Έστω $f_1, \cdots, f_\ell$ γεννήτορες του ομογενούς ιδεώδους $I = I(V) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$. Κάθε γεννήτορας είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $m_j = \deg f_j$. Θέτουμε

$$f_j^{(i)} = \frac{1}{x_i^{m_j}} f_j(x_0, \ldots, x_m)$$

Ορίζουμε νέες μεταβλητές

$$x_1^{(i)} = \frac{x_0}{x_i}, \ldots, x_i^{(i)} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, x_{i+1}^{(i)} = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, x_n^{(i)} = \frac{x_n}{x_i}.$$

και θεωρούμε το ιδεώδες

$$\left\langle f_1^{(i)}, \cdots, f_\ell^{(i)} \right\rangle \lhd k[x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}].$$

Το $V(f_1^{(i)}, \ldots, f_\ell^{(i)}))$ είναι ένα αλγεβρικό σύνολο στο $U_i = \mathbb{A}^n_k$. Επιπλέον,

$$V_i = V \cap U_i = V(f_1^{(i)}, \ldots, f_\ell^{(i)})).$$

και V είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα που προκύπτει «κολλώντας» τα V_i.

Παράδειγμα II.1.4. *Ας θεωρήσουμε το ομογενές πολυώνυμο* $f = x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0$ *για κάποιο* $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Ορίζει ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο στο* $\mathbb{P}^2_k$. *Έχουμε τις ρητές συναρτήσεις:*

$$\begin{aligned}
f^{(0)} &= \frac{x_0^n + x_1^n + x_2^n}{x_0^n} = 1 + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^n = 1 + \left(x_1^{(0)}\right)^n + \left(x_2^{(0)}\right)^n \\
f^{(1)} &= \frac{x_0^n + x_1^n + x_2^n}{x_1^n} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n + 1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n = \left(x_1^{(1)}\right)^n + 1 + \left(x_2^{(1)}\right)^n \\
f^{(2)} &= \frac{x_0^n + x_1^n + x_2^n}{x_2^n} = \left(\frac{x_0}{x_2}\right)^n + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + 1 = \left(x_1^{(2)}\right)^n + \left(x_2^{(2)}\right)^n + 1
\end{aligned}$$

Παράδειγμα II.1.5 (Επίπεδες αλγεβρικές καμπύλες)**.** *Θεωρούμε τις καμπύλες* $\ell : V(ax+by+c)$ *και* $\ell' : V(ax+by+c')$. *Είναι σαφές ότι αν* $c \neq c'$, *οι παραπάνω καμπύλες δεν τέμνονται. Αν τώρα θεωρήσουμε τις προβολικές συντεταγμένες* x_0, x_1, x_2 *και δούμε τις παραπάνω καμπύλες ως το αφινικό κομμάτι των προβολικών καμπυλών*

$$L : V(ax_1 + bx_2 - cx_0) \qquad L' : V(ax_1 + bx_2 - c'x_0),$$

δηλαδή $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$, *τότε έχουμε ότι οι* L, L' *τέμνονται στο σημείο* $[0 : b : -a] \in \mathbb{P}^2_k$. *Παρατηρούμε ότι το σημείο* $x_0 = 0$ *δεν είναι ένα σημείο του* $\mathbb{A}^2_k$ *και αντιστοιχεί στο* ∞ *ως προς αυτό το αφινικό κομμάτι. Τα σημεία* $[0 : a, b] \in \mathbb{P}^2_k$ *ονομάζονται η ευθεία στο* ∞ *και αποτελούν ένα αντίγραφο του* $\mathbb{P}^1_k$. *Μάλιστα* $\mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \cap \mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^2_k \cup \mathbb{A}^1_k \cup \{\infty\}$.

Γενικά η επιλογή της ευθείας στο ∞ *όπως έγινε παραπάνω είναι αυθαίρετη. Ένας προβολικός μετασχηματισμός, δηλαδή μία συνάρτηση*

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{P}^2_k &\longrightarrow \mathbb{P}^2_k \\
[a_0 : a_1 : a_2] &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_{0j} a_j : \sum_{j=0}^{2} \alpha_{1j} a_j : \sum_{j=0}^{2} \alpha_{2j} a_j\right)
\end{aligned} \tag{II.1}$$

όπου $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, *στέλνει μια ευθεία σε μια οποιαδήποτε άλλη ευθεία. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται οι αυτομορφισμοί των χώρων* $\mathbb{P}^n_k$.

Παράδειγμα II.1.6. *Θεωρούμε τον αυτομορφισμό* $\phi^{\#}$ *του δακτυλίου* $R = k[x_0, x_1, x_2]$ *που είναι ο ομογενής δακτύλιος συντεταγμένων του* $\mathbb{P}^2_k$ *και αντιστοιχεί στον* ϕ *όπως ορίζεται στην εξίσωση (II.1). Παρατηρούμε ότι αν το* $I \lhd R$ *είναι ένα ομογενές ιδεώδες, τότε και το* $\phi^{\#-1}(I)$ *είναι ένα ομογενές ιδεώδες του* R. *Το ομογενές ιδεώδες* $\mathfrak{m} \lhd R$ *που αντιστοιχεί στο σημείο* $[a_0 : a_1 : a_2]$ *έχει γεννήτορες*

$$a_i x_j - a_j x_i \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant 2.$$

Το ομογενές ιδεώδες $\phi^{\#-1}(\mathfrak{m})$ *γεννάται από τα*

$$a_i \phi^{\#-1}(x_j) - a_j \phi^{\#-1}(x_i), \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant 2.$$

Το $\phi^{\#-1}(x_j)$ *είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση στα* x_0, x_1, x_2. *Ο προβολικός μετασχηματισμός καθορίζεται από την* $\mathfrak{m} \mapsto \phi^{\#-1}(\mathfrak{m})$ *όπου ο* $\phi^{\#-1}$ *δίνεται από την εξίσωση:*

$$\phi^{\#-1}(x_i) = \sum_{j=0}^{2} \beta_{ij} x_j, \qquad i = 0, 1, 2$$

ενώ ο πίνακας (β_{ij}) *είναι ο αντίστροφος του* (a_{ij})

Το προβολικό σύνολο $V(F)$ που ορίζεται από το ομογενές πολυώνυμο $F(x_0, x_1, x_2)$ βαθμού m λέγεται επίπεδη καμπύλη βαθμού m.

Αν έχουμε τις επίπεδες καμπύλες $C_1 = V(F)$ και $C_2 = V(G)$ βαθμών m, n, τότε ορίζουμε την πολλαπλότητα τομής

$$C_1 \cdot C_2 = \sum_{i=1}^{\lambda} I_{P_i}(C_1, C_2)$$

όπου P_i είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών, ενώ το $I_{P_i}(C_1, C_2)$ είναι η πολλαπλότητα τομής η οποία ορίζεται σε μία αφινική περιοχή που περιέχει το P_i. Ισχύει το

Θεώρημα II.1.7. *Αν οι καμπύλες* C_1 *και* C_2 *όπως ορίστηκαν παραπάνω δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε*

$$C_1 \cdot C_2 = mn.$$

II.2 Τομές Αλγεβρικών Καμπυλών

Θεωρούμε το σώμα K και $\overline{K}$ την αλγεβρική του κλειστότητα. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές στο K μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \alpha_j)^{n_j}, \qquad a_0 \neq 0.$$

Η πολλαπλότητα της ρίζας α_j του f είναι το n_j. Μπορούμε να διαβάσουμε την τάξη της πολλαπλότητας σε επίπεδο δακτυλίων ως εξής: Για ένα στοιχείο $\alpha \in \overline{K}$ θεωρούμε το υποσύνολο

$$R_a = \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} : f(x), g(x) \in \overline{K}[x], f(\alpha) \neq 0 \right\}$$

του σώματος πηλίκων $\overline{K}(x)$ του πολυωνυμικού δακτυλίου $R = \overline{K}[x]$. Ο R_a είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος $R \subset R_a \subset \overline{k}(x)$. Ταυτίζεται με τον εντοπισμό (localization) του R στο πρώτο ιδεώδες $\langle x - \alpha \rangle$. Για $\beta \in \overline{K}$ με $\beta \neq \alpha$ έχουμε ότι $(x - \beta)^{-1} \in R_a$. Συνεπώς για μία ρίζα α_j του $f(x)$ το ιδεώδες $\langle f(x) \rangle \lhd R_{\alpha_j}$ δίνεται από

$$\langle f(x) \rangle = \langle (x - \alpha_j)^{n_j} \rangle,$$

και
$$R_{\alpha_j}/\langle f(x)\rangle = R_{\alpha_j}/\langle (x-\alpha_j)^{n_j}\rangle.$$
Συνεπώς το παραπάνω πηλίκο ως $\overline{K}$ διανυσματικός χώρος έχει τα στοιχεία $1, x-\alpha_j, (x-\alpha_j)^2, \dots, (x-\alpha_j)^{n_j-1}$ ως βάση. Έτσι
$$\dim_{\overline{K}} R_{\alpha_j}/\langle f(x)\rangle = n_j.$$
Δηλαδή οι πολλαπλότητες των ριζών μπορούν να εκφραστούν με όρους θεωρίας δακτυλίων.

Παρατήρηση II.2.1. *Στον δακτύλιο τυπικών δυναμοσειρών*
$$\overline{K}[[x-\alpha_j]] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha_i)^i$$
έχουμε ότι
$$\langle f(x)\rangle = \langle (x-\alpha_j)^{n_j}\rangle$$
και
$$\dim_{\overline{K}} \overline{K}[[x-\alpha_j]]/\langle f(x)\rangle = n_j.$$

Τώρα θα γενικεύσουμε την κατασκευή αυτή σε ένα σύστημα εξισώσεων. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα από δύο καμπύλες
$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$
και ας υποθέσουμε επιπλέον ότι τα παραπάνω δύο πολυώνυμα δεν έχουν κοινό παράγοντα κάποιο μη τετριμμένο πολυώνυμο. Το παραπάνω σύστημα είναι τα σημεία τομής των δύο αλγεβρικών συνόλων που ορίζει κάθε πολυώνυμο ξεχωριστά. Για κάθε σημείο $P = (a, b)$ θεωρούμε τον εντοπισμό του δακτυλίου πολυωνύμων $R = \overline{K}[x, y]$ $\overline{K}[x, y]$:
$$R_P = \left\{ \frac{G(x,y)}{F(x,y)} : F(x,y), G(x,y) \in R, F(a,b) \neq 0 \right\}.$$
Ο δακτύλιος R_P είναι τοπικός με $m_P = \langle x-a, y-b\rangle$ το μέγιστο ιδεώδες του.

Ορισμός II.2.2. *Ορίζουμε την τοπική πολλαπλότητα τομής στο P ως*
$$I_P(V(f), V(g)) = \dim_{\overline{K}} R_P/\langle f, g\rangle.$$

Παράδειγμα II.2.3. *Αν υποθέσουμε ότι f, g είναι και τα δύο γραμμικά, τότε*
$$\begin{aligned} f &= ax + by = 0 \\ g &= cx + dy = 0 \end{aligned}$$
με $ad - bc \neq 0$ και τα $V(f)$,$V(g)$ έχουν μοναδικό σημείο τομής το $P = (0, 0)$. Θα δείξουμε ότι
$$I_P(V(f), V(g)) = 1.$$
Έχουμε ότι στο R_0 $\langle f, g\rangle = \langle x, y\rangle$ συνεπώς $R_P/\langle x, y\rangle = \overline{K}$ που έχει διάσταση 1.

Παράδειγμα II.2.4. *Έστω $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύστημα*
$$\begin{aligned} f &= y = 0 \\ g_n &= y - x^n = 0 \end{aligned}$$
Παρατηρούμε ότι αν $n = 2$ το $V(f)$ και $V(g)$ έχουν διπλή τομή στο $P = (0, 0)$, ενώ αν $n = 3$ η τομή είναι τριπλή. Γενικά,
$$R_P/\langle y, x^n\rangle = \langle 1, x, \dots, x^{n-1}\rangle_{\overline{K}}.$$

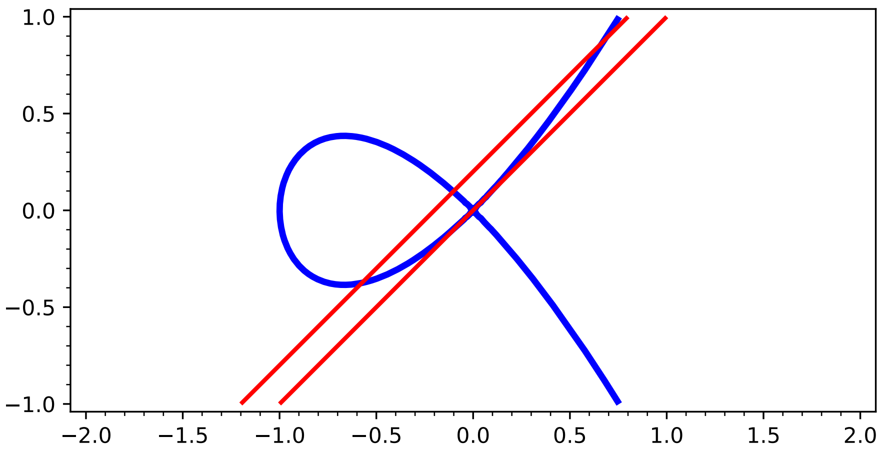
Παράδειγμα II.2.5. *Θεωρούμε τις εξισώσεις*

$$f = y - x + \epsilon = 0$$
$$g = y^2 - x^2(x+1) = 0$$

Αν $\epsilon \in \overline{K}$*, τότε* $V(f), V(g)$ *έχουν 3 σημεία τομής. Όσο το* ϵ *πλησιάζει στο* 0*, τα τρία σημεία πλησιάζουν στο* 0*. Στην οριακή κατάσταση* $\epsilon = 0$ *τα τρία σημεία ταυτίζονται στο* $P = (0,0)$*. Στον δακτύλιο* R_P *έχουμε*

$$\langle f, g \rangle = \langle y - x, y^2 - x^2(x+1) \rangle = \langle y - x, x^3 \rangle.$$

Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε τις κλάσεις $1, x, x^2$ *ως βάση του γραμμικού χώρου* $R_P/\langle f, g\rangle$ *και* $I_P(V(f), V(g)) = 3$.



II.3 Ιδιομορφίες

Τα μη ιδιόμορφα αλγεβρικά σύνολα είναι αυτά τα οποία αντιστοιχούν στην έννοια της «διαφορίσιμης πολλαπλότητας» στη διαφορική γεωμετρία. Η έννοια της ιδιομορφίας σε ένα σημείο είναι τοπική, οπότε θα την ορίσουμε πρώτα για αφινικά αλγεβρικά σύνολα.

Ορισμός II.3.1. *Έστω* $Y \subset \mathbb{A}^n$ *ένα αφινικό σύνολο με ιδεώδες παραγόμενο από τα στοιχεία* $f_1, f_2, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$*. Το* Y *θα λέγεται μη-ιδιόμορφο (non-singular) στο σημείο* $P \in Y$ *αν και μόνο αν η τάξη του Ιακωβιανού πίνακα* $(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j}(P)$ *είναι* $n - r$*, όπου* r *είναι η διάσταση του* Y*. Το* Y *θα λέγεται μη ιδιόμορφο αν είναι μη ιδιόμορφο σε κάθε σημείο* $P \in Y$.

Στον παραπάνω ορισμό η έννοια της παραγώγου δουλεύει για πολυώνυμα ορισμένα πάνω από κάθε σώμα χωρίς να χρειάζεται να περάσουμε από «όρια», απλά χρησιμοποιώντας τους κανόνες της παραγώγισης. Δηλαδή ορίζουμε

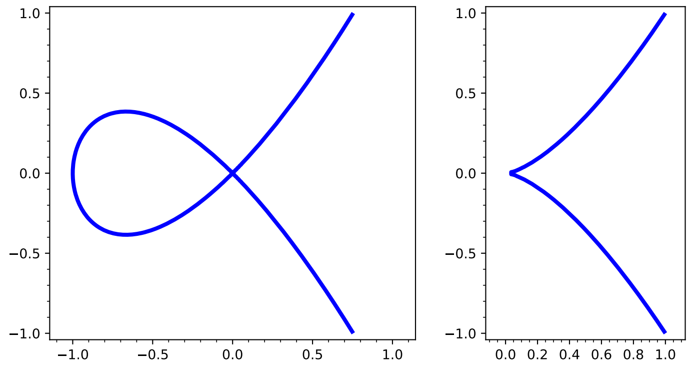
$$\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}, \partial c/\partial x_i = 0, \text{ για κάθε } c \in k$$

και υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο κάθε πολυωνύμου με τους κανόνες

$$\partial(f+g)/\,\partial x_i = \partial(f)/\partial x_i + \partial(g)/\partial x_i,$$

$$\partial(fg)/\partial x_i = f\partial g/\partial x_i + \partial f/\partial x_i g$$

Παράδειγμα II.3.2. *Μία υπερεπιφάνεια* $V(f) \subset \mathbb{A}^n_k$ *είναι ιδιόμορφη στο* P*, αν για κάθε* $1 \leqslant i \leqslant n$ *έχουμε ότι* $\partial f/\partial x_i(P) = 0$*. Έτσι τα αλγεβρικά σύνολα* $y^2 = x^2(x+1)$ *και* $y^2 = x^3$ *έχουν ιδιομορφίες στο σημείο* $(0,0)$.



Ορισμός II.3.3. *Έστω R ένας τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και σώμα υπολοίπων $R/\mathfrak{m} = k$. Ο R θα λέγεται τοπικός κανονικός δακτύλιος (regular local ring) αν και μόνο αν $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$.*

Θεώρημα II.3.4. *Έστω $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ μία αφινική πολλαπλότητα και $P \in Y$. Ο Y θα είναι μη ιδιόμορφος στο P αν και μόνο αν ο τοπικός δακτύλιος $k[Y]_P$ είναι τοπικός κανονικός δακτύλιος.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε το σημείο $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k$ και $\mathfrak{m}_P = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ το αντίστοιχο μέγιστο ιδεώδες του $k[x_1, \dots, x_n]$. Ορίζουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \theta(f) : k[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow k^n \\ f &\longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right) \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι $\theta(x_i - a_i)$ αποτελούν μια βάση του k^n και $\theta(\mathfrak{m}_P^2) = 0$. Συνεπώς επάγεται ένας ισομορφισμός

$$\theta' : \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \to k^n.$$

Έστω $I(Y) \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ το ιδεώδες του Y και έστω $f_1, \dots, f_t$ ένα σύνολο γεννητόρων του. Η τάξη του Ιακωβιανού πίνακα $(\partial f_i \partial x_j)_{i,j}(P)$ είναι η διάσταση του $\theta(I(Y))$ ως υπόχωρο του k^n. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό θ' βλέπουμε ότι αυτό είναι ίσο με τον υπόχωρο $(I(Y)+\mathfrak{m}_P)/\mathfrak{m}_P^2$ του $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Από την άλλη πλευρά. ο τοπικός δακτύλιος $k[Y]_P$ του P είναι ίσος με τον δακτύλιο $k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ εντοπισμένο στο μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_P$. Αφού το P σημείο του Y, έχουμε $\mathfrak{m}_P \supset I(Y)$. Έτσι το μέγιστο ιδεώδες του $\mathfrak{m}$ τοπικού δακτυλίου $k[Y]_P$ είναι το $\frac{\mathfrak{m}_P}{I(Y)} k[Y]_P$. Αν θεωρήσουμε τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\mathfrak{m}_P \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_P}{I(Y)} k[Y]_P = \mathfrak{m} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$$

βλέπουμε ότι ο πυρήνας είναι το $I(Y) + \mathfrak{m}_P^2$ συνεπώς

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}_P/(I(Y) + \mathfrak{m}_P^2).$$

Από την άλλη έχουμε τη μικρή ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \frac{I(Y) + \mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_P}{I(Y) + \mathfrak{m}_P} \longrightarrow 0$$

Υπολογίζοντας διαστάσεις διανυσματικών χώρων έχουμε ότι

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \dim J = n.$$

Έστω r η διάσταση του Y. Τότε $k[Y]_P$ είναι τοπικός δακτύλιος διάστασης r, οπότε ο $k[Y]_P$ είναι τοπικός κανονικός δακτύλιος αν και μόνο αν $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $\mathrm{rank}(J) = n - r$, δηλαδή το P είναι μη ιδιόμορφο σημείο του Y. □

Παρατήρηση II.3.5. *Το θεώρημα αυτό μας δίνει ότι ο ορισμός του αν ένα σημείο είναι μη-ιδιόμορφο ή όχι δεν εξαρτάται από την εμφύτευση $Y \subset \mathbb{A}^n_k$.*

ΙΙ.3.1 Εφαπτόμενοι κώνοι

Ένα πολυώνυμο $F(x_1, \dots, x_n)$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως ένα πεπερασμένο άθροισμα

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_m$$

όπου τα F_i είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού i. Μπορεί κάποιοι από τους αρχικούς όρους να μηδενίζονται. Τον πρώτο μη μηδενικό όρο θα τον ονομάζουμε αρχικό όρο και θα τον συμβολίζουμε με F_*.

Παράδειγμα ΙΙ.3.6. *Ας θεωρήσουμε μία επίπεδη αλγεβρική καμπύλη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, η οποία περνάει από το $(0,0)$ και ορίζεται από το πολυώνυμο $F(x,y)$ το οποίο το υποθέτουμε ότι δεν διαιρείται από τετράγωνο. Γράφουμε το F ως*

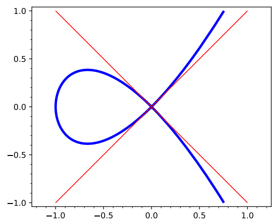
$$F(x,y) = \sum_{\nu \geqslant \nu_0} F_\nu$$

με $F_{\nu_0}(x,y) = F_*(x,y) \neq 0$. Το ομογενές πολυώνυμο παραγοντοποίειται ως

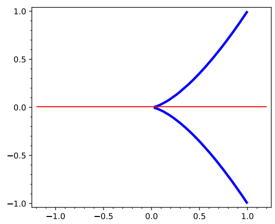
$$F_*(x,y) = cx^{r_0} \prod_i (y - a_i x)^{r_i}.$$

Ο βαθμός $\deg F_* = \nu_0$ θα λέγεται πολλαπλότητα της ιδιομορφίας. Το αλγεβρικό σύνολο $V(F_*)$ θα λέγεται ο γεωμετρικός κώνος της F στο $(0,0)$

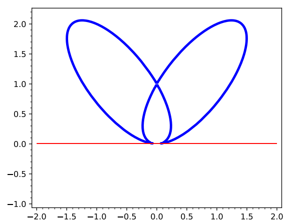
1. $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$. *Ο Εφαπτόμενος κώνος δίνεται από την εξίσωση $y^2 - x^2$ και είναι ένα ζευγάρι γραμμών $y = \pm x$.*



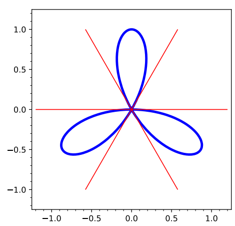
2. $F(x,y) = x^3 - y^2$. *Ο Εφαπτόμενος κώνος δίνεται από την εξίσωση $y^2 = 0$ και είναι μια διπλή οριζόντια ευθεία*



3. $F(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4$. *Ο Εφαπτόμενος κώνος δίνεται από την εξίσωση $y^2 = 0$ και είναι μια διπλή οριζόντια ευθεία*



4. $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$. *Ο Εφαπτόμενος κώνος δίνεται από την εξίσωση $3x^2y - y^3$ και είναι τρεις ευθείες $y = 0, y = \pm\sqrt{3}x$.*

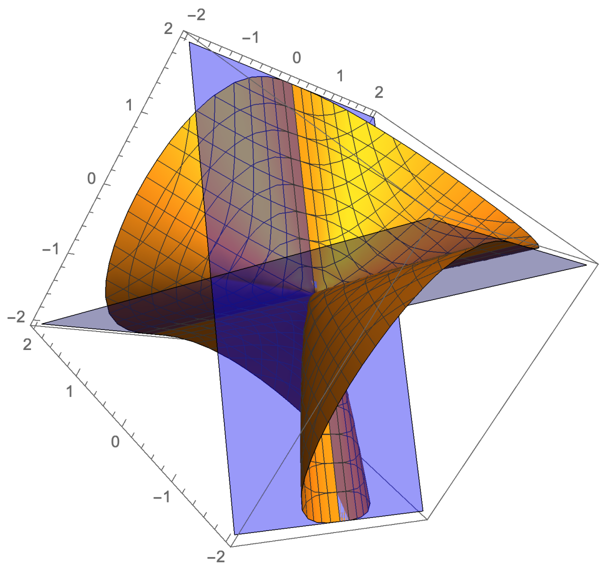


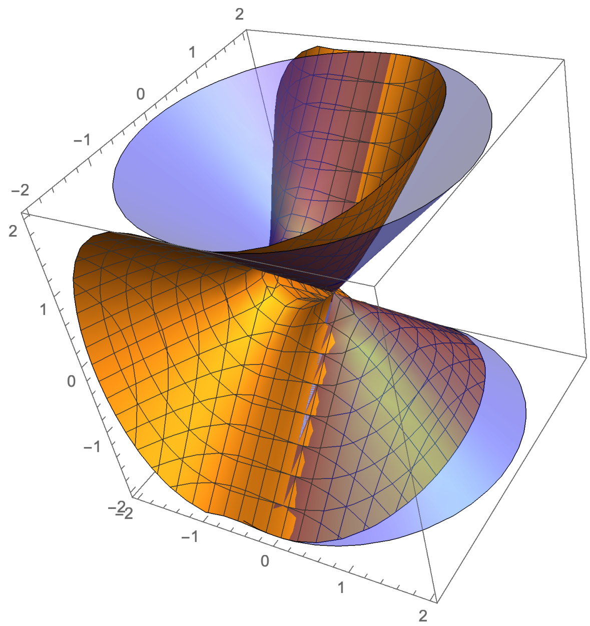
Ορισμός ΙΙ.3.7. *Ο εφαπτόμενος κώνος ενός αλγεβρικού συνόλου V είναι το ζευγάρι*

$$(V(I(V)^*, k[x_1, \dots, x_n]/I(V)^*),$$

όπου $I(V)^*$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από τους αρχικούς όρους f_* για κάθε $f \in I(V)$.

Παράδειγμα II.3.8. *Η υπερεπιφάνεια* $V(x^3+y^2-z^2)$ *μαζί με τον εφαπτόμενο κώνο της* $V(y^2=z^2)$ *(αριστερά) και η υπερεπιφάνεια* $V(x^3+x^2+y^2-z^2)$ *με τον εφαπτόμενο κώνο της* $V(x^2+y^2-z^2)$ *(δεξιά).*





II.4 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί το «ομογενές Nullstellensatz»: Αν το $I \subset S = k[x_0, \ldots, x_n]$ είναι ένα ομογενές ιδεώδες, και f είναι ένα ομογενές ιδεώδες και $f \in S$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $\deg f > 0$ ώστε $f(P) = 0$ για κάθε $P \in V(I) \subset \mathbb{P}^n$, τότε $f^k \in I$ για κάποιο $k > 0$. Υπόδειξη: μετάβαση στον αφινικό χώρο $\mathbb{A}^{n+1}$ ο οποίος έχει ως δακτύλιο συντεταγμένων τον S.

2. Για ένα ομογενές ιδεώδες $I \subset S = k[x_0, \ldots, x_n]$, οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (α') $V(I) = \emptyset$

   (β') $\sqrt{I} = S$ ή $\sqrt{I} = S_+ = \oplus_{d>0} S_d$

   (γ') $I \supset S_d$ για κάποιο $d > 0$.

3. (α') Υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία (που αντιστρέφει τους εγκλεισμούς) ανάμεσα στα αλγεβρικά σύνολα του $\mathbb{P}^n$ και τα ομογενή ριζικά ιδεώδη του $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ που δεν ταυτίζονται με το $S_+ = \oplus_{d>0} S_d$ που δίνονται από το $Y \mapsto I(Y)$ και $I \mapsto V(I)$.

   (β') Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο $Y \subset \mathbb{P}^n$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το $I(Y)$ είναι πρώτο ιδεώδες

   (γ') Αποδείξτε ότι το $\mathbb{P}^n$ είναι ανάγωγο.

4. Για $n, d > 0$ θεωρήστε τα μονώνυμα βαθμού d στις $n+1$ μεταβλητές $x_0, x_1, \ldots, x_n$ τα οποία και ονομάζουμε $M_0, M_1, \ldots, M_N$. Αποδείξτε ότι το πλήθος τους είναι $N + 1 = \binom{n+d}{n}$. Στη συνέχεια θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} r_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ P = [a_0 : a_1 : \cdots : a_n] &\longmapsto [M_0(P) : \cdots : M_N(P)] \end{aligned}$$

   η οποία προκύπτει αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες a_i στα M_k. Αποδείξτε ότι η εικόνα $r_d(\mathbb{P}^n)$ είναι ένα προβολικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^N$ και ότι ο r_d είναι ομοιομορφισμός του $\mathbb{P}^n$ στην εικόνα του r_d.

5. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^N$, $N = rs + r + s$ η οποία δίνεται στέλνοντας $[a_0 : \cdots a_r] \times [b_0 : \cdots : b_s] \to [a_0 b_0 : \cdots : a_i b_j : \cdots : a_r b_s]$, όπου οι προβολικές συντεταγμένες $a_i b_j$ είναι λεξικογραφικά διατεταγμένες. Δείξτε ότι η ψ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Δείξτε ότι η εικόνα είναι ένα προβολικό αλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^N$.

Βιβλιογραφία

[1] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[2] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*. expanded. Vol. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. x+306. ISBN: 3-540-63293-X. URL: https://doi.org/10.1007/b62130.

[3] Ueno, K. *Algebraic geometry. 1*. Vol. 185. Translations of Mathematical Monographs. From algebraic varieties to schemes, Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: https://doi.org/10.1090/mmono/185.

[4] Vakil, R. *The rising sea*. 2017, p. 775.

III

Σχήματα

III.1 Το φάσμα ενός δακτυλίου

Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.

Ορισμός III.1.1. *Ορίζουμε* $\mathrm{Spec}R$ *να είναι το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου* R*, το οποίο εφοδιάζεται με την τοπολογία Zariski στην οποία τα κλειστά σύνολα είναι τα*

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}R \text{ τέτοια ώστε } I \subset P\}.$$

Ο δακτύλιος R μπορεί να θεωρηθεί ως ο δακτύλιος κανονικών συναρτήσεων στο $\mathrm{Spec}R$, όπου κάθε στοιχείο $r \in R$ ορίζει συνάρτηση:

$$\begin{aligned} r : \mathrm{Spec}R &\longrightarrow R/P \\ P &\mapsto r \mod P \end{aligned}$$

Προσοχή! Οι παραπάνω συναρτήσεις δεν παίρνουν τιμές στο ίδιο σώμα όπως είχαμε συνηθίσει στην κλασική περίπτωση. Παίρνουν τιμές στις ακέραιες περιοχές R/P.

Πρόταση III.1.2. *Έστω* $I, J, I_\lambda, \lambda \in \Lambda$ *ιδεώδη του δακτυλίου* R*. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $V(\langle 0\rangle) = \mathrm{Spec}R$, $V(R) = \emptyset$
2. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$
3. $\cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι όλα τα πρώτα ιδεώδη περιέχουν το 0, συνεπώς

$$V(0) = \{P \in \mathrm{Spec}R : 0 \subset P\} = \mathrm{Spec}R.$$

Επίσης,

$$V(R) = \{P \in \mathrm{Spec}R : R \subset P\} = \emptyset$$

Για το (2) παρατηρούμε ότι αν $P \in V(I)$, τότε εξ ορισμού $I \subset P$ συνεπώς αν $P \supset I \cap J$, τότε $P \in V(I \cap J)$. Είναι σαφές ότι

$$V(I) \subset V(I \cap J) \text{ συνεπώς } V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J).$$

Αντιστρόφως, για $P \in V(I \cap J)$ έχουμε από τον ορισμό $I \cap J \subset P$. Αν το I δεν περιέχεται στο P, τότε υπάρχει $a \in I$ με $a \notin P$. Αν $r \in J$ τυχαίο, τότε $a \cdot r \in I \cap J \subset P$, συνεπώς $r \in P$, αφού το P είναι πρώτο.

Για το (3) υποθέτουμε ότι $P \in \cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$, τότε $P \supset I_\lambda$ συνεπώς $P \supset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ άρα $P \in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Αντιστρόφως, αν $P \in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$, τότε εξ ορισμού $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset P$, άρα για κάθε $\lambda \in \Lambda$ το $I_\lambda \subset P$ συνεπώς $P \in V(I_\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ άρα $P \in \cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$. $\square$

Όπως παρατηρήσαμε ήδη, τα $V(I), I \lhd R$ ορίζουν τοπολογία στο $\mathrm{Spec}R$ που έχει αυτά ως κλειστά σύνολα. Τα ανοιχτά είναι της μορφής

$$D(I) = \{P \in \mathrm{Spec}R : I \not\subset P\} = V(I)^C.$$

Το σύνολο $\mathcal{O} = \{D(I), I \lhd R\}$ αποτελεί μια τοπολογία στο $\mathrm{Spec}R$, δηλαδή ικανοποιούνται οι ιδιότητες

- $\emptyset \in \mathcal{O}$, $\mathrm{Spec}R \in \mathcal{O}$.
- Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$
- Αν $U_\lambda \in \mathcal{O}$ για όλα τα $\lambda \in \Lambda$, τότε $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

Πρόταση III.1.3. *Για* $f \in R$, *ορίζουμε* $D(f) = \{P \in \mathrm{Spec}R | f \notin P\}$. *Τότε για* $I \lhd R$

$$D(I) = \bigcup_{f\in I} D(f)$$

Αν $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ *τότε*

$$D(I) = \bigcup_{j=1}^{m} D(f_j).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in I$, αν $f \notin P$, τότε έχουμε ότι $I \not\subset P$ συνεπώς $D(f) \subset D(I)$. Άρα $\cup_{f\in I} D(f) \subset D(I)$.

Αντιστρόφως, αν $P \in D(I)$, τότε $I \not\subset P$. Συνεπώς υπάρχει $f \in I$ ώστε $f \notin P$ και συνεπώς $P \in D(f)$. Άρα $D(I) \subset \cup_{f\in I} D(f)$. $\square$

Δηλαδή τα $\{D(f) | f \in R\}$ αποτελούν βάση ανοιχτών για το σύνολο $\mathrm{Spec}R$. Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether, τότε κάθε ανοιχτό καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος $D(f)$.

Πρόταση III.1.4. *Για* $f \in R$ *έχουμε* $D(f) = \emptyset$ *αν και μόνο αν το* f *είναι μηδενοδύναμο.*

Απόδειξη. Το να έχουμε $D(f) = \emptyset$ σημαίνει ότι το $f \in P$ για όλα τα πρώτα ιδεώδη P. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap_{P\in \mathrm{Spec}R} P.$$

Πράγματι έστω $h \in \sqrt{\langle 0 \rangle}$. Συνεπώς $h^m = 0 \in P$ για κάθε $P \in \mathrm{Spec}R$ και αφού το P είναι πρώτο, έχουμε $h \in P$. Αντιστρόφως, αν $x \in \cap_{P\in\mathrm{Spec}R} P$ και έστω $x^m \notin \langle 0 \rangle$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$S = \{a | a \lhd R, \text{ ώστε } x^n \notin a \quad \forall n \in N\}.$$

Το σύνολο S είναι μη κενό, συνεπώς αφού ο δακτύλιος είναι Noether, έχει ένα μέγιστο στοιχείο q. Το q είναι πρώτο, αφού αν

$$ab \in q \text{ με } a \notin q, b \notin q, \text{ τότε } \langle q, a \rangle \notin S, \langle q, b \rangle \notin S \text{ αφού } S \text{ μέγιστο}.$$

Δηλαδή υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $x^{n_1} \in \langle q, a \rangle$ και $x^{n_2} \in \langle q, b \rangle$. Δηλαδή για κάποια $c_1, c_2 \in R$ έχουμε $x^{n_1} = ac_1 + q_1$ και $x^{n_2} = bc_2 + q_2$, $q_1, q_2 \in q$. Καταλήγουμε στην

$$x^{n_1+n_2} = (ac_1 + q_1)(bc_2 + q_2) = abc_1c_2 + ac_1q_2 + bc_2q_1 + q_1q_2 \in q.$$

Συνεπώς $x^{n_1+n_2} \in q$, άτοπο αφού $q \in S$. $\square$

Παράδειγμα III.1.5.
$$\mathrm{Spec}\mathbb{Z} = \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \ldots, \langle p\rangle, \ldots\}$$
Ένα τυχαίο κλειστό σύνολο
$$V(I) = V(n\mathbb{Z}) = V(p_1^{a_1}\cdot p_\ell^{a_\ell}) = \{P \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z} : I \subset P\} = \{P \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z} : p \mid n\} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$$
$$D(I) = \mathrm{Spec}\mathbb{Z} - \{p_1, \ldots, p_\ell\}.$$
Επιπλέον, $V(P) = \{P\}$*, δηλαδή τα σημεία είναι κλειστά. Από την άλλη* $V(0) = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$*, είναι, δηλαδή το μικρότερο κλειστό που περιέχει το* 0.

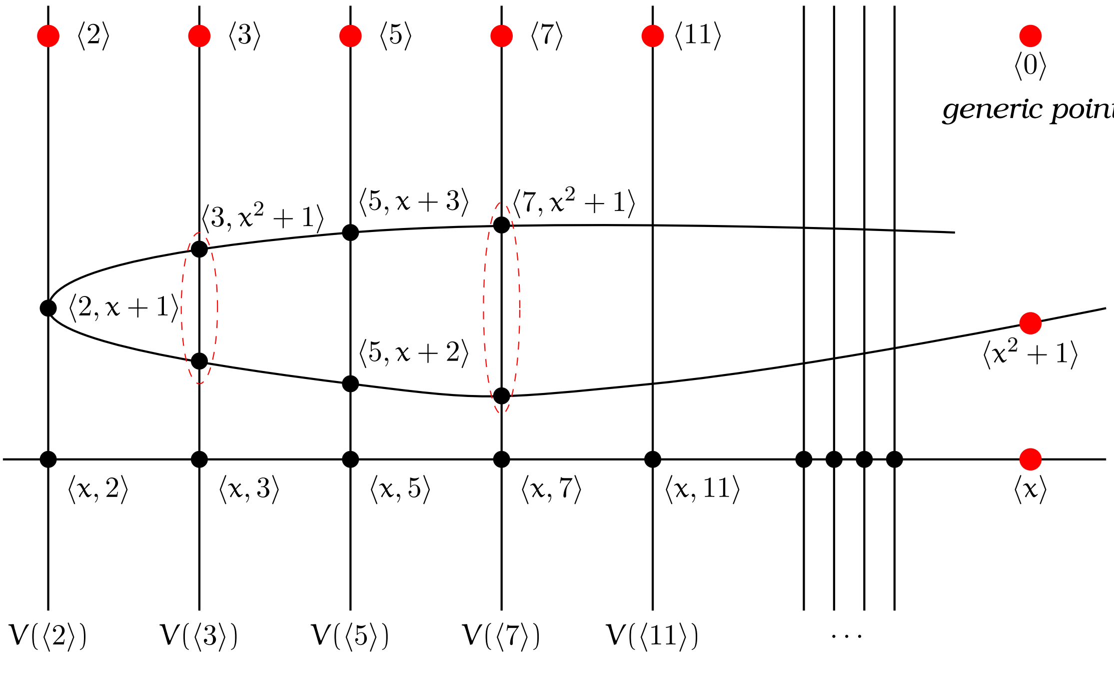
Υπενθυμίζουμε ότι για ένα σύνολο Σ ενός τοπολογικού χώρου X θα συμβολίζουμε με $\overline{\Sigma}$ την κλειστότητα του Σ, δηλαδή το μικρότερο κλειστό υποσύνολο X που περιέχει το Σ.

Ορισμός III.1.6. *Αν* $a \in \mathrm{Spec}R$ *με* $\overline{a} = X$*, τότε το* a *λέγεται generic point.*

Παράδειγμα III.1.7. *Έστω* k *αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τότε*
$$\mathrm{Spec}k[x] = \langle 0\rangle \cup \{\langle x-a\rangle | a \in k\}.$$
δηλαδή είναι το $\mathbb{A}_k^1$ *με ένα επιπρόσθετο generic point.*

Παράδειγμα III.1.8. *Ας θεωρήσουμε το σώμα* $\mathbb{Q}_p$ *των* p*-αδικών αριθμών και* $\mathbb{Z}_p$ *ας είναι οι ακέραιοι* p*-αδικοί. Έχουμε* $\mathrm{Spec}\mathbb{Q}_p = \{\langle 0\rangle\}$, $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}_p = \{\langle p\rangle, 0\}$*. Τα ιδεώδη στο* $\mathbb{Z}_p$ *είναι τα* p^n*. Τα* $\emptyset, \langle p\rangle$ *είναι τα μοναδικά κλειστά. Το* $\langle 0\rangle$ *είναι ανοιχτό αλλά και generic point.*

Παράδειγμα III.1.9. *Πρώτα ιδεώδη του* $\mathbb{Z}[x]$.



Έστω $P \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x]$*. Έστω* $p \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$*. Το* $P \cap \mathbb{Z} = \langle p\rangle$ *αφού η τομή είναι πρώτο ιδεώδες. Στη συνέχεια θεωρούμε τον φυσικό ομομορφισμό*
$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}_p[x],\\ f(x) &\mapsto f(x) \mod p\end{aligned}$$
Θεωρούμε το ιδεώδες $\overline{P}$ *του* $\mathbb{F}_p[x]$ *το οποίο παράγεται από το* $\phi(P)$*, δηλαδή* $\phi(P) = \overline{P}$*. Υπάρχει ένας ισομορφισμός*
$$\mathbb{Z}[x]/P \to \mathbb{F}_p[x]/\overline{P}. \tag{III.1}$$

Αφού P *είναι πρώτο, το* $\mathbb{Z}[x]/P$ *είναι ακέραια περιοχή. Συνεπώς το* $\mathbb{F}_p[x]/\overline{P}$ *είναι ακέραια περιοχή επίσης, δηλαδή το* $\overline{P}$ *είναι πρώτο ιδεώδες και γράφεται στη μορφή* $\overline{P} = \langle g(x)\rangle$*, όπου το* $g(x)$ *είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο του* $\mathbb{F}_p[x]$*. Διαλέγουμε ένα* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *με* $f(x) \mod p = g(x)$*. Ο ισομορφισμός της εξίσωσης (III.1) δίνει ότι*

$$P = \langle p, f(x)\rangle. \tag{III.2}$$

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) \equiv f_1(x) \mod p$*, τότε* $\langle f(x), p\rangle = \langle f_1(x), p\rangle$*. Παρατηρούμε επίσης ότι αν* P *περιέχει έναν πρώτο αριθμό* p*, τότε είναι της μορφής (III.2). Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση έχουμε την παρακάτω ισότητα ως σύνολα*

$$V(\langle p\rangle) = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_p[x].$$

Αν $P \cap \mathbb{Z} = \{0\}$*, όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του* P *αποτελούνται από πολυώνυμα με μη μηδενικούς συντελεστές. Αν* $P \neq \{0\}$ *ας είναι* d_0 *ο μικρότερος βαθμός πολυωνύμου στο* P*. Για* $d \geqslant d_0$ *ορίζουμε*

$$P_d = \{h(x) \in P : \deg h(x) = d\}.$$

Αν $h(x) \in P_d$ *έχουμε* $nh(x) \in P_d$*, όπου το* n *είναι τυχαίος ακέραιος. Ειδικότερα* $h(x) \in P_d$ *δίνει* $-h(x) \in P_d$*. Ας είναι* $f(x)$ *ένα στοιχείο του* P_{d_0} *ώστε ο συντελεστής του* x^{d_0} *να είναι ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος. Γράφουμε*

$$f(x) = ax^{d_0} + a_1x^{d_0-1} + \cdots + a_{d_0}$$

Τότε τα στοιχεία του P_{d_0} *είναι ακέραια πολλαπλάσια του* $f(x)$*. Αυτό συμβαίνει γιατί αν ο συντελεστής* b *του* $g(x) \in P_{d_0}$*,*

$$g(x) = bx^{d_0} + b_1x^{d_0-1} + \cdots + b_{d_0}, \qquad b > 0$$

δεν είναι πολλαπλάσιο του a*, τότε για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη* $c = (a, b)$ *υπάρχουν* $m, n \in \mathbb{Z}$ *με* $ma + nb = c$*, όπου* $1 \leqslant c < a$*. Έχουμε* $mf(x) + ng(x) \in P_{d_0}$*. Συνεπώς ο συντελεστής του* x^{d_0} *θα είναι* c*, το οποίο δεν μπορεί να συμβεί από την επιλογή του* $f(x)$*. Επιπλέον, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των συντελεστών* $a, a_1, \ldots, a_{d_0}$ *του* $f(x)$ *είναι* 1*. Σε διαφορετική περίπτωση αν* $\ell \geqslant 2$ *είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης, τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$f(x) = \ell(a'x^{d_0} + a_1'x^{d_0-1} + \cdots + a_{d_0}'), \qquad a', a_j' \in \mathbb{Z}.$$

Από την υπόθεση $\ell \notin P$ *και* $a'x^{d_0} + a_1'x^{d_0-1} + \cdots + a_{d_0}' \notin P$*. Άρα* $f(x) \notin P$ *αφού* P*, πρώτο, άτοπο. Επίσης, το* $f(x)$ *είναι ανάγωγο αφού αν γραφόταν ως γινόμενο δύο πολυωνύμων το ένα από αυτά θα έπρεπε να ανήκει στο* P*. Το* $f(x)$ *είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο στο* $\mathbb{Z}[x]$ *αλλά και στο* $\mathbb{Q}[x]$*.*

Θα δείξουμε ότι $P = \langle f(x)\rangle$*. Έστω*

$$g(x) = c_0x^d + c_1x^{d-1} + \cdots + c_d \in P,$$

και έστω $b_0 = (a, c_0)$*. Αν* $b_0 \neq a$*, τότε υπάρχουν ακέραιοι* m_0, n_0 *με* $m_0a + n_0c_0 = b_0$*. Τότε*

$$h(x) = m_0x^{d-d_0}f(x) + n_0g(x) \in P_d$$

του οποίου ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι $h(x) = b_0x^d + \cdots$*. Αν θέσουμε* $a = a''b_0$ *έχουμε*

$$a''h(x) - x^{d-d_0}f(x) \in P_{d'} \text{ για κάποιο } d, d' < d. \tag{III.3}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\langle f(x)\rangle \cap P_d = P_d \tag{III.4}$$

με επαγωγή στο d*. Έχουμε αποδείξει την περίπτωση* $d = d_0$*. Ας υποθέσουμε ότι η (III.4) ισχύει μέχρι το* $d - 1$*. Τότε από την (III.3) έχουμε*

$$a''h(x) \in \langle f(x)\rangle.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος b_0 *του* $h(x)$ *δεν είναι πολλαπλάσιο του* a, *τότε όπως προηγουμένως* $h(x) \notin \langle f(x) \rangle$ *και συνεπώς* $a'' \notin \langle f(x) \rangle$, *αφού το ιδεώδες είναι πρώτο. Συνεπώς ο συντελεστής του* x^d *για ένα πολυώνυμο στο* P_d *πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του* a. *Από τα παραπάνω έχουμε ότι* $g(x) \in P_d$ *αλλά* $c_0 = c'a$. *Τότε*

$$g(x) - c'x^{d-d_0}f(x) \in P_{d''} \text{ με } d'' < d.$$

Από την επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε ότι

$$g(x) - c'x^{d-d_0}f(x) \in \langle f(x) \rangle,$$

, *δηλαδή* $g(x) \in \langle f(x) \rangle$. *Συνεπώς* $\langle f(x) \rangle \cap P_d = P_d$ *για κάθε* $d \geqslant d_0$. *Συνεπώς*

$$\langle f(x) \rangle = P.$$

Από την παραπάνω συζήτηση έχουμε ότι ένα πρώτο ιδεώδες $\langle f(x) \rangle$ *του* $\mathbb{Z}[x]$ *είναι ένα πρώτο ιδεώδες του* $\mathbb{Q}[x]$. *Αντιστρόφως, ένα πρώτο ιδεώδες του* $\mathbb{Q}[x]$ *μετά με πολλαπλασιασμό με έναν ακέραιο έχει τη μορφή* $\langle g(x) \rangle$ *όπου*

$$g(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m, \text{ όπου } a_0 \geqslant 1, (a_0, \ldots, a_m) = 1.$$

Για ένα πρώτο ιδεώδες ένα τέτοιο $g(x)$ *είναι μονοσήμαντα ορισμένο.*

Η φυσιολογική εμφύτευση

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}[x], \\ m &\longmapsto m \end{aligned}$$

επάγει συνάρτηση στα φάσματα

$$\begin{aligned} \phi^\# : \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathrm{Spec}\mathbb{Z} \\ p &\mapsto \phi^{-1}(P) = P \cap \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$(\phi^\#)^{-1}(\langle p \rangle) = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_p[x]$$

και

$$(\phi^\#)^{-1}(\langle 0 \rangle) = \mathrm{Spec}\mathbb{Q}[x]$$

Δηλαδή το $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x]$ *μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση των* $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_p[x]$ *και* $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόταση III.1.10. *Ένας ομομορφισμός* $\phi : R \to S$ *επάγει* $\phi^\# : \mathrm{Spec}S \to \mathrm{Spec}R$, *στέλνοντας το* $P \to \phi^{-1}(P)$. *Επιπλέον, η* $\phi^\#$ *είναι συνεχής για την τοπολογία Zariski.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι αν το P είναι πρώτο ιδεώδες του S, τότε το $\phi^{-1}P$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

Επιπλέον, έχουμε $(\phi^\#)^{-1}(V(I)) = V(J)$, όπου J είναι το ιδεώδες που παράγεται από το $\phi(I)$. Πράγματι

$$\begin{aligned} (\phi^\#)^{-1}(V(I)) &= \{Q \in \mathrm{Spec}S : \phi^\#(Q)\} \subset V(I) \\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S : \phi^{-1}(Q)\} \subset V(I) \\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S : I \subset \phi^{-1}(Q)\} \\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S : \phi(I) \subset Q\} \\ &= V(\phi(I)) = V(J) \end{aligned}$$

□

III.2 Αφινικά Σχήματα

Σε κάθε ανοιχτό σύνολο U του $\mathrm{Spec}R$ ορίζουμε έναν δακτύλιο συναρτήσεων που ορίζεται επί του ανοιχτού αυτού U. Για $f \in R$ ορίσαμε ως $D(F)$ το ανοιχτό σύνολο

$$D(f) = \{P \in \mathrm{Spec}R : f \notin P\}.$$

Το σύνολο αυτό θα το συμβολίζουμε και με X_f.

Πρόταση III.2.1. *Για μια οικογένεια $\{f_a\}_{a\in A}$ στοιχείων του R η ισότητα*

$$\mathrm{Spec}R = \cup_{a\in A}(\mathrm{Spec}R)_{f_a}$$

ισχύει αν και μόνο αν το ιδεώδες $\langle f_a\rangle_{a\in A}$ που παράγεται από τα f_a είναι ο δακτύλιος R.

Απόδειξη. Αν ισχύει η ισότητα, τότε για ένα τυχαίο πρώτο ιδεώδες P του R έχουμε ότι $P \in (\mathrm{Spec}R)_{f_a}$ για κάποιο f_a, συνεπώς $f_a \notin P$. Δηλαδή κανένα πρώτο ιδεώδες δεν μπορεί να περιέχει το ιδεώδες που παράγουν τα f_a. Με δεδομένο ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες του R περιέχεται σε ένα μέγιστο,συνεπώς πρώτο ιδεώδες έχουμε ότι μη κενό ιδεώδες $\langle f_a\rangle_{a\in A}$ δεν είναι γνήσιο και συνεπώς είναι ίσο με το R.

Αντιστρόφως, αν $\langle f_a\rangle_{a\in A} = R$, τότε για κάθε πρώτο ιδεώδες P υπάρχει ένα f_a με $f_a \notin P$, δηλαδή $P \in (\mathrm{Spec}R)_{f_a}$. Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\mathrm{Spec}R \subset \bigcup_{a\in A}(\mathrm{Spec}R)_{f_a}.$$

□

Παρατηρούμε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $X = \mathrm{Spec}R$ είναι ένωση ανοιχτών συνόλων της μορφής X_f με $f \in R$. Αν $\langle f_a\rangle_{a\in A} = R$, τότε μπορούμε να διαλέξουμε πεπερασμένα το πλήθος από αυτά ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} g_{a_j} f_{a_j} = 1,$$

και να ικανοποιούν ότι $\langle f_a\rangle_{a\in A} = \langle f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\rangle$. Με αυτό δείξαμε ότι

Πόρισμα III.2.2. *Ο τοπολογικός χώρος $X = \mathrm{Spec}R$ είναι ημισυμπαγής. Δηλαδή για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από αυτά ώς*

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}.$$

Παρατήρηση III.2.3. *Ακολουθώντας τη Γαλλική σχολή, ένας χώρος είναι συμπαγής αν είναι Hausdorff και επιπλέον κάθε ανοιχτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Στην τοπολογία Zariski δεν ισχύει η συνθήκη Hausdorff, συνεπώς οι παραπάνω χώροι είναι ημισυμπαγείς.*

Λήμμα III.2.4. *Έστω $X = \mathrm{Spec}R$, τότε για $f, g \in R$ έχουμε ότι*

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$
2. $X_f \supset X_g$ *αν και μόνο αν* $g \in \sqrt{\langle f\rangle}$.

Απόδειξη. Για το (1) παρατηρούμε ότι αν $P \in X_f \cap X_g$, τότε $f \notin P$ και $g \notin P$. Αφού το P είναι πρώτο ιδεώδες, έχουμε ότι $fg \notin P$ και με αυτό τον τρόπο δείξαμε ότι $X_f \cap X_g \subset X_{fg}$.

Αντιστρόφως, για $P \in X_{fg}$, έχουμε $fg \notin P$, συνεπώς $f \notin P$ και $g \notin P$, συνεπώς $X_{fg} \subset X_f \cap X_g$.

Για το (2) παρατηρούμε ότι
$$\sqrt{\langle f\rangle} = \bigcap_{f\in P\in \mathrm{Spec}R} P.$$
Την παραπάνω σχέση την έχουμε αποδείξει ήδη στην περίπτωση $f=0$. Έστω $h\in\sqrt{\langle f\rangle}$. Εξ ορισμού για κάποιο $m\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι $h^m\in\langle f\rangle$. Για οποιοδήποτε πρώτο ιδεώδες P το $f\in P$ δίνει $\langle f\rangle\subset P$, συνεπώς $h^m\in P$ και $h\in P$. Με αυτό τον τρόπο δείξαμε ότι $\sqrt{\langle f\rangle}\subset\bigcap_{f\in P\in \mathrm{Spec}R} P$.

Αντιστρόφως, έστω
$$h\in\bigcap_{f\in P\in \mathrm{Spec}R} P.$$
Ας υποθέσουμε ότι $h^m\notin\langle f\rangle$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα μέγιστο στοιχείο Q με τη διάταξη του εγκλεισμού στο μη κενό σύνολο
$$S=\{a : a\lhd R \text{ ώστε } f\in a, h^m\notin a, \text{ για κάθε } m\in\mathbb{N}\}.$$
Το Q είναι ένα πρώτο ιδεώδες.

Πράγματι, αν υπήρχαν στοιχεία a,b ώστε $ab\in Q$ με $a\notin Q$, $b\notin Q$, τότε τα $\langle Q,a\rangle$, $\langle Q,b\rangle$ δεν ανήκουν στο S, αφού το Q είναι μέγιστο. Συνεπώς υπάρχουν $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $h^{n_1}\in\langle Q,a\rangle$ και $h^{n_2}\in\langle Q,b\rangle$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε για κάποια $c_1,c_2\in R$
$$h^{n_1}=ac_1+q_1 \text{ και } h^{n_2}=bc_2+q_2 \text{ με } q_1,q_2\in Q.$$
Καταλήγουμε στη σχέση
$$h^{n_1+n_2}=(ac_1+q_1)(bc_2+q_2)=abc_1c_2+ac_1q_2+bc_2q_1+q_1q_2\in Q,$$
το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $Q\in S$. Συνεπώς Q είναι πρώτο. Τότε όμως $f\in Q$ και $h\notin Q$. Άρα υπάρχει m ώστε $h^m\in\langle f\rangle$.

Δηλαδή $g\notin\sqrt{\langle f\rangle}$ αν και μόνο αν υπάρχει πρώτο ιδεώδες P με $f\in P$ και $g\notin P$. Δηλαδή
$$P\notin X_f \text{ και } P\in X_g,$$
, δηλαδή X_f δεν περιέχει το X_g. □

III.3 Εντοπισμός

Ορισμός III.3.1. *Αν ένα υποσύνολο S ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου R δεν περιέχει το 0 και*

- $ab\in S$ *για* $a,b\in S$
- $1\in S$,

, τότε το S λέγεται πολλαπλασιαστικό σύνολο. Εξ ορισμού $ab\neq 0$ *για* $a,b\in S$.

Αν το $f\in R$ δεν είναι μηδενοδύναμο, τότε το σύνολο
$$\{f,f^2,f^3,\dots,f^m,f^{m+1},\dots\}$$
είναι πολλαπλασιαστικό. Επίσης, αν P είναι πρώτο ιδεώδες του R, τότε το σύνολο $R-P$ είναι πολλαπλασιαστικό.

Αν το S είναι πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R, τότε θεωρούμε το σύνολο
$$R_S=\left\{\frac{r}{s} : r\in R, s\in S\right\}$$

το οποίο συχνά το γράφουμε ως $S^{-1}R$. Ορίζουμε ότι

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } s' \in R \text{ ώστε } s'(r_1 s_2 - s_1 r_2) = 0.$$

Στην περίπτωση που το R είναι ακέραια περιοχή, τότε η παραπάνω σχέση είναι η $r_1 s_2 = s_1 r_2$ και σε αυτή την περίπτωση το R_S είναι ένα υποσύνολο του σώματος πηλίκων $\mathrm{Quot}(R)$.

Το R_S μπορεί να εφοδιαστεί με πράξεις

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$$
$$\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$$

και θέλει αρκετή δουλειά να αποδείξει κανείς ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ανεξάρτητες των αντιπροσώπων όπως και το ότι το R_S με τις πράξεις αυτές εφοδιάζεται με τη δομή αντιμεταθετικού δακτυλίου.

Για κάθε σταθερό στοιχείο $s \in S$ έχουμε τον φυσικό ομομορφισμό

$$\phi_S : R \longrightarrow R_S$$
$$r \mapsto \frac{rs}{s}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ομομορφισμός είναι ανεξάρτητος του s. Ο πυρήνας

$$\ker\phi_S = \{r \in R : rs = 0 \text{ για κάποιο } s \in S\}$$

Θεώρημα III.3.2 (Καθολική ιδιότητα εντοπισμού)**.** *Έστω S πολλαπλασιαστικό κλειστό σύνολο στον δακτύλιο R. Ένας δακτύλιος $\widetilde{R}$ μαζί με έναν ομομορφισμό $\phi : R \to \widetilde{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες θα λέγεται εντοπισμός του R στο S*

1. *Για κάθε $s \in S$ το $\phi(s)$ είναι αντιστρέψιμο στο $\widetilde{R}$.*

2. *Για έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\psi : R \to T$ αν το $\psi(s)$ είναι αντιστρέψιμο στο T για κάθε $s \in S$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\nu : R \to T$ ώστε $\psi = \nu \circ \phi$.*

Ο δακτύλιος (R_S, ϕ_S) ικανοποιεί τις δύο παραπάνω συνθήκες και είναι μοναδικός λόγω της καθολικής ιδιότητας.

Μπορούμε στο ανοιχτό σύνολο X_f να αντιστοιχίσουμε τον δακτύλιο κανονικών συναρτήσεων R_f. Πράγματι, τα μηδενοδύναμα στοιχεία ανήκουν σε κάθε πρώτο ιδεώδες και $(\mathrm{Spec}R)_f = \emptyset$. Επίσης, ποσότητες της μορφής r/f είναι καλά ορισμένες και δεν έχουν πόλο στο $(\mathrm{Spec}R)_f$.

III.3.1 Sheaves

Ας θεωρήσουμε τα ανοιχτά σύνολα $X_f \supset X_g$. Έχουμε δείξει στο λήμμα III.2.4 ότι $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$ ή ισοδύναμα $g^n = af$ για κάποιο φυσικό n και κάποιο $a \in R$. Ορίζουμε τη συνάρτηση περιορισμού

$$\rho_{X_f, X_g} : R_f \to R_g$$
$$r/f^m \mapsto a^m r/g^{nm}$$

Όπου R_f και R_g είναι οι εντοπισμοί στα πολλαπλασιαστικά σύνολα $\{f^\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ και $\{g^\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ αντίστοιχα. Ο ομομορφισμός αυτός ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τα R_f και R_g. Αν $g^{n'} = a'f$, τότε η παραπάνω συνάρτηση ορίζεται ως

$$r/f^m = (a')^m r/g^{n'm} = a^m r/g^{nm}.$$

Η συνάρτηση ρ_{X_f, X_g} θα λέγεται συνάρτηση περιορισμού.

Λήμμα III.3.3. *Για διαδοχικούς εγκλεισμούς*

$$X_f \supset X_g \supset X_h$$

έχουμε

$$\rho_{X_h,X_g} \circ \rho_{X_g,X_f} = \rho_{X_h,X_f}.$$

Απόδειξη. Και πάλι από το λήμμα III.2.4 βρίσκουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ και $a, b \in R$ ώστε

$$g^{n_1} = af \text{ και } h^{n_2} = bg$$

Υπολογίζουμε ότι $h^{n_1 n_2} = ab^{n_1} f$. Συνεπώς για $r/f^m \in R_f$ έχουμε

$$\rho_{X_h,X_f}(r/f^m) = a^m b^{mn_1} r/h^{mn_1 n_2}.$$

Από την άλλη έχουμε

$$(\rho_{X_h,X_g} \circ \rho_{X_g,X_f})(r/f^m) = \rho_{X_h,X_g}(a^m r/g^{mn_1}) = a^m b^{mn_1} r/h^{mn_1 n_2}.$$

□

Θεωρούμε τώρα τη συλλογή ανοιχτών συνόλων X_f που περιέχουν το $P \in \mathrm{Spec} R$,

$$U_P = \{X_f : P \in X_f\} = \{X_f : f \notin P\}.$$

Στο σύνολο U_P ορίζουμε διάταξη με τη βοήθεια του εγκλεισμού και γράφουμε $X_f \leqslant X_g$ αν και μόνο αν $X_f \supset X_g$. Δύο τυχαία στοιχεία X_f, X_g έχουν κοινό περιορισμό $X_g \cap X_f = X_{gf}$ και έχουμε ότι

$$X_f \leqslant X_{fg} \qquad X_g \leqslant X_{fg}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το ευθύ όριο (δες X.1.1) $\varinjlim_{X_f \in U_P} R_f$ το οποίο είναι ο δακτύλιος των φύτρων (germs) στο P. Ισχύει ότι

Πρόταση III.3.4.

$$\varinjlim_{X_f \in U_P} R_f = R_P.$$

Απόδειξη. Ένα στοιχείο του R_P γράφεται ως g/f με $f, g \in R$ και $f \notin P$, άρα $P \in X_f$. Στο R_P αν $g/f = g'/f'$ με $f' \notin P$, τότε υπάρχει $s \in R - P$ με $s(f'g - fg') = 0$. Δηλαδή

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'} = \frac{fg'}{ff'} = \frac{f'g}{ff'}.$$

Αφού $P \in X_{f'}$ και $P \in X_{ff'}$, έχουμε ότι (θα συμβολίζουμε με $[\cdot]$ την κλάση στο ευθύ όριο)

$$\left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{fg}{ff'}, X_{ff'}\right)\right] = \left[\left(\frac{g'}{f'}, X_{f'}\right)\right]$$

Δηλαδή ορίζεται μια καλά ορισμένη συνάρτηση

$$\phi : R_P \longrightarrow \varinjlim_{X_f \in U_P} R_f$$

αφού δύο διαφορετικές εκφράσεις στο R_P δίνουν το ίδιο φύτρο. Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση αυτή είναι ομομορφισμός. Ας υποθέσουμε ότι στο R_P έχουμε:

$$\frac{g}{f} + \frac{r}{h} = \frac{gh + fr}{fh}.$$

Τότε

$$\phi(g/f) = \left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{gh}{fh}, X_{fh}\right)\right]$$
$$\phi(r/h) = \left[\left(\frac{r}{h}, X_h\right)\right] = \left[\left(\frac{fr}{fh}, X_{fh}\right)\right]$$

άρα έχουμε

$$\phi(g/f) + \phi(r/h) = \left[\left(\frac{gh}{fh}, X_{fh}\right)\right] + \left[\left(\frac{fr}{fh}, X_{fh}\right)\right] = \left[\left(\frac{gh+fr}{fh}, X_{fh}\right)\right] = \phi(g/f + r/h).$$

Θα ορίσουμε τώρα μια συνάρτηση

$$\psi : \varinjlim_{X_f \in U_P} R_f \longrightarrow R_P$$

με

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] \longmapsto g/f^m.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι καλά ορισμένη. Ας υποθέσουμε ότι

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{r}{h^n}, X_h\right)\right].$$

Τότε αφού

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{f^{m(n-1)}h^{nm}}{(fh)^{mn}}, X_{fh}\right)\right]$$
$$\left[\left(\frac{r}{h^n}, X_h\right)\right] = \left[\left(\frac{f^{mn}h^{(m-1)n}}{(fh)^{mn}}, X_{fh}\right)\right]$$

έχουμε ότι στο R_{fh}

$$\frac{f^{m(n-1)}h^{nm}}{(fh)^{mn}} = \frac{f^{mn}h^{(m-1)n}}{(fh)^{mn}}.$$

Από την άλλη στον δακτύλιο R_P έχουμε

$$\frac{g}{f^m} = \frac{f^{m(n-1)}h^{nm}}{(fh)^{mn}} = \frac{f^{mn}h^{(m-1)n}}{(fh)^{mn}} = \frac{r}{h^n},$$

οπότε η ψ είναι καλά ορισμένη και όπως πριν μπορούμε να δούμε ότι είναι ομομορφισμός. Επίσης,

$$\psi \circ \phi(g/f) = \psi\left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = g/f$$

Ομοίως

$$\phi \circ \psi(g/f) = \psi\left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = \phi(g/f^m) = \psi \circ \phi(g/f) = \psi\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_{f^m}\right)\right] = \psi \circ \phi(g/f) = \psi\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right].$$

□

Παράδειγμα III.3.5. *Έστω* $P \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ *και* $f \in \mathbb{Z}$. *Έχουμε ότι* $\langle p \rangle = P \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}_f$ *αν και μόνο αν* $f \notin P$, *δηλαδή αν και μόνο αν* $p \nmid f$. *Δηλαδή*

$$U_P = \{X_f,\ \text{ώστε } (f,p) = 1\}.$$

Έστω $f = \pm p_1^{a_1} \cdots p_\ell^{a_\ell}$ *με* $a_j \geqslant 1$ *η παραγοντοποίηση του* f *σε πρώτους. Τότε* $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle p_1 \cdots p_\ell \rangle$. *Εκφράζουμε*

$$\frac{r}{f^m} = \frac{r'}{p_1^{c_1} \cdots p_\ell^{c_\ell}}$$

και $p_j \nmid r'$. *Θέτουμε* t *το γινόμενο των πρώτων με εκθέτες μεγαλύτερους της μονάδας, οπότε* $r/f^m = r'/t$ *και στον* $\lim_{\to} \mathbb{Z}_f$ *έχουμε*

$$\left[\left(\frac{r'}{t}, X_t\right)\right] = \left[\left(\frac{r}{f^m}, X_f\right)\right]$$

Δηλαδή ένα στοιχείο του $\lim_{\to} \mathbb{Z}_f$ *μπορεί να γραφεί ως ανάγωγο κλάσμα* r'/t *με* $p \nmid t$. *Αντιστρόφως, αν* $(t,p)=1$, *τότε για το ανάγωγο κλάσμα* s/t *έχουμε το*

$$\left[\left(\frac{s}{t}, X_t\right)\right] \in \lim_{\substack{\to \\ X_f \in \mathcal{U}_P}} \mathbb{Z}_f$$

Έτσι

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{s/t : s/t \text{ ανάγωγο κλάσμα και } (t,p)=1\}$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \lim_{\substack{\to \\ X_f \in \mathcal{U}_P}} \mathbb{Z}_f$$

και

$$\mathbb{Q} = \lim_{\substack{\to \\ X_f \in \mathcal{U}_0}} \mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}_{(0)}.$$

III.3.2 Το Sheaf δομής του φάσματος

Θα ορίσουμε τώρα το sheaf δομής του $X = \mathrm{Spec}R$.

Λήμμα III.3.6. *Αν* $X_f = \bigcup_{a \in A} X_{f_a}$ *και για* $a \in R_f$ *έχουμε*

$$\rho_{X_{f_a}, X_f}(a) = 0,$$

τότε $a = 0$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a = g/f^m$ στοιχείο του R_f, τότε $a = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $f^n g = 0$ στον δακτύλιο R. Ας θεωρήσουμε το ιδεώδες

$$I = \{h \in R : hg = 0\}.$$

Το I είναι ένα ιδεώδες του R. Συνεπώς $a = 0$ στο R_f αν και μόνο αν μία δύναμη του f ανήκει στο I, δηλαδή $f \in \sqrt{I}$. Έχουμε ότι

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset P \in \mathrm{Spec}R} P.$$

Δηλαδή η συνθήκη $f \in \sqrt{I}$ είναι ισοδύναμη ότι για τα πρώτα ιδεώδη του P του R τα οποία περιέχουν το I έχουμε ότι $f \in P$.

Ας υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ στον R_f. Τότε υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες P με $P \supset I$ και $f \notin P$.

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[rr] \arrow[dr] & & R_{f_a} \arrow[dl] \\ & R_P & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Αφού $\rho_{X_{f_a}, X_f}(a) = 0$ η εικόνα του a στο R_P είναι 0. Συνεπώς η εικόνα του $g = f^m a$ στο R_P είναι 0. Δηλαδή υπάρχει $b \in R - P$ με $bg = 0$. Συνεπώς $b \in I$. Από την άλλη αφού $P \supset I$ έχουμε ότι $b \in P$ το οποίο είναι σε αντίφαση με το $b \in R - P$. Συνεπώς το a είναι 0 στο R_f. □

Λήμμα III.3.7. *Ας υποθέσουμε ότι* $X_f = \bigcup_{a\in A} X_{f_a}$ *και έστω ότι υπάρχει* $g_a \in R_{f_a}$ *ώστε για κάθε* $a, b \in A$ *να έχουμε ότι οι περιορισμοί των* g_a, g_b *στο* $X_{f_a} \cap X_{f_b} = X_{f_a \cdot f_b}$ *να ταυτίζονται, δηλαδή*

$$\rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_a}}(g_a) = \rho_{X_{f_a f b}, X_{f_b}}(g_b),$$

τότε υπάρχει $g \in R_f$ *ώστε*

$$g_a = \rho_{X_{f_a}, X_f}(g) \text{ για κάθε } a \in A.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον φυσικό ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \phi_f : R &\longrightarrow R_f \\ r &\longmapsto rf/f \end{aligned}$$

Θα συμβολίζουμε το $\phi_f(r) = \bar{r}$. Όταν $X_f \supset X_g$, έχουμε ότι $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$. Θα δείξουμε ότι οι δακτύλιοι R_g και $(R_f)_{\bar{g}}$ είναι ισόμορφοι. Αφού $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$ μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in R$ ώστε $g^n = af$. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi : R_g &\longrightarrow (R_f)_{\bar{g}} \\ r/g^\ell &\longmapsto \bar{r}/\bar{g}^\ell \end{aligned}$$

με $r \in R$, είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Αντιστρόφως, υπάρχει καλά ορισμένη συνάρτηση η οποία είναι ομοιομορφισμός:

$$\begin{aligned} \psi : (R_f)_{\bar{g}} &\longrightarrow R_g \\ \frac{r/f^k}{\bar{g}^\ell} &\longmapsto \frac{r \cdot a^k}{g^{nk+\ell}} \end{aligned}$$

με $r/f^k \in R_f$ και $r \in R$.

Θεωρούμε τον κανονικό ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{\bar{g}} : R_f &\longrightarrow (R_f)_{\bar{g}} \\ \frac{r}{f^n} &\longmapsto \frac{r \cdot \bar{g}}{f^n \cdot \bar{g}}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\psi \circ \overline{\phi}_{\bar{g}} : R_f \to R_g$ ταυτίζεται με την ρ_{X_g, X_f}:

$$\frac{r}{f^k} \overset{\overline{\phi}_{\bar{g}}}{\longmapsto} \frac{r \cdot \bar{g}}{f^k \cdot \bar{g}} \overset{\psi}{\longmapsto} \frac{r \cdot a^k}{g^{nk}}$$

Από τον ορισμό των ϕ, ψ έχουμε ότι $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{R_g}$ και $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{(R_f)_{\bar{g}}}$. Δηλαδή οι ϕ και ψ είναι ισομορφισμοί.

Θέτουμε $\overline{R} = R_f$ και $\overline{X} = \mathrm{Spec}\overline{R}$ και έστω $\bar{f}_a$ ένα στοιχείο του $\overline{R}$ που καθορίζεται από το f_a. Τότε

$$X_f = \overline{X} \text{ και } X_{f_a} = \overline{X}_{\bar{f}_a}.$$

Συνεπώς χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η υπόθεσή μας γίνεται:

$$X = \bigcup_{a\in A} X_{f_a}.$$

Μπορούμε από το πόρισμα III.2.2 να διαλέξουμε πεπερασμένα το πλήθος $f_1, \ldots, f_\ell$ ανάμεσα στα $\{f_a\}_{a\in A}$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{\ell} X_{f_j}.$$

Επίσης, μπορούμε να εκφράσουμε τα $g_j \in R_{f_j}$ ως

$$g_j = \frac{a_j}{f_j^m} \in R_{f_i}, \text{ για } j = 1, \dots, \ell$$

με την ίδια δύναμη στον παρονομαστή, αφού είναι πεπερασμένες το πλήθος ποσότητες.

Η υπόθεση του ίσου περιορισμού δίνει

$$\rho_{X_{f_i f_j}, X_{f_i}}(g_i) = \frac{f_j^m a_i}{(f_i f_j)^m} = \rho_{X_{f_i f_j}, X_{f_j}}(g_j) = \frac{f_i^m a_j}{(f_i f_j)^m}.$$

Συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε $n_{ij} \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(f_i f_j)^{n_{ij}}(f_j^m a_i - f_i^m a_j) = 0 \text{ για } 1 \leqslant i < j \leqslant \ell.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $N > m + n_{ij}$ για όλα τα $1 \leqslant i < j \leqslant 1$. Για ένα τυχαίο $1 \leqslant k \leqslant \ell$ μπορούμε να γράψουμε $g_k = a_k'/f_k^N$ και να καταλήξουμε στη σχέση

$$a_i' f_j^N - a_j' f_i^N = 0 \text{ για } 1 \leqslant i < j \leqslant \ell. \tag{III.5}$$

Από την άλλη $X_{f_j} = X_{f_j^N}$ οπότε έχουμε

$$X = \bigcup_{j=1}^{\ell} X_{f_j^N}.$$

Μπορούμε να διαλέξουμε από την πρόταση III.2.1 στοιχεία $b_j \in R$ τα οποία να ικανοποιούν

$$\sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N = 1. \tag{III.6}$$

Θέτουμε

$$g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j a_j' \in R.$$

Τότε από τις εξισώσεις (III.5) και (III.6) έχουμε ότι

$$f_i^N g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_i^N a_j' = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N a_i' = a_i',$$

και αυτό δίνει ότι

$$\rho_{X_{f_i}, X}(g) = \frac{a_i'}{f_i^N} = g_i.$$

Τέλος για ένα τυχαίο $a \in A$ θέτουμε

$$h_a = g_a - \rho_{X_{f_a}, X}(g)$$

και έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant i \leqslant \ell$

$$\begin{aligned}
\rho_{X_{f_i f_a}, X_{f_a}}(h_a) &= \rho_{X_{f_i f_a}, X_{f_a}}(g_a) - \rho_{X_{f_i f_a}, X}(g) \\
&= \rho_{X_{f_i f_a}, X_{f_i}}(g_i) - \rho_{X_{f_i f_a}, X}(g) \\
&= \rho_{X_{f_i f_a}, X}(g) - \rho_{X_{f_i f_a}, X}(g) = 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς από το λήμμα III.3.6 έχουμε ότι $h_a = 0$ και

$$g_a = \rho_{X_{f_a}, X}(g), \text{ για κάθε } a \in A.$$

□

III.3.3 Ορισμός Sheaf

Ορισμός III.3.8. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε ανοιχτό $U \subset X$ ορίζουμε το $\mathcal{F}(U)$ να είναι μία προσθετική ομάδα (ή ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, module κτλ.). Θα λέμε ότι έχουμε ένα presheaf αν για κάθε ζευγάρι ανοιχτών συνόλων $U \supset V$ υπάρχει ένας ομομορφισμός*

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

ώστε

1. $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$
2. *Για τρία διαδοχικά ανοιχτά σύνολα $W \subset V \subset U$ του X έχουμε*

$$\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$$

Ο ομομορφισμός $\rho_{V,U}$ λέγεται η συνάρτηση περιορισμού. Επιπλέον, αν οι παρακάτω δύο συνθήκες ικανοποιούνται, τότε το presheaf θα λέγεται sheaf.

Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο στο X ώστε το U να είναι ένωση ανοιχτών συνόλων, δηλαδή $U = \bigcup_{j \in J} U_j$.

1. *Αν $a \in \mathcal{F}(U)$ ικανοποιεί ότι $\rho_{U_i,U}(a) = 0$ για κάθε $j \in J$, τότε $a = 0$.*
2. *Αν $a_j \in \mathcal{F}(U_j)$ για κάθε $j \in J$ ικανοποιεί*

$$\rho_{U_j \cap U_i, U_j}(a) = \rho_{U_j \cap U_i, U_i}(a_i),$$

τότε υπάρχει $a \in \mathcal{F}(U)$ με $a_j = \rho_{U_j,U}(a)$

Συχνά οι δύο ιδιότητες του sheaf γράφονται ως μια ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \prod_{i,j \in J} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

Επίσης, στο ανοιχτό σύνολο $\emptyset$ αντιστοιχούμε το $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ στην περίπτωση που έχουμε sheaves από προσθετικές ομάδες, ενώ αν έχουμε sheaves από αντιμεταθετικούς δακτύλιους, το 0 συμβολίζει τον μηδενικό δακτύλιο. Στη βιβλιογραφία συχνά γράφουμε $\Gamma(U, \mathcal{F})$ αντί για $\mathcal{F}(U)$.

Παράδειγμα III.3.9. *Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο σε έναν τοπολογικό χώρο X και έστω $\mathcal{C}_X(U)$ όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $U \to \mathbb{R}$, οι οποίες εφοδιάζονται με φυσιολογικό τρόπο με τη δομή ενός δακτυλίου. Για ανοιχτά σύνολα $V \subset U$ η συνάρτηση περιορισμού $\rho_{V,U}$ είναι η συνάρτηση περιορισμού $f \mapsto f|_V$. Σε αυτή την περίπτωση το $\mathcal{C}_X$ είναι ένα sheaf από αντιμεταθετικούς δακτυλίους υπέρ του τοπολογικού χώρου X.*

Παράδειγμα III.3.10. *Έστω $X = \mathbb{R}^n$ και για κάθε ανοιχτό U θα συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_X(U)$ το σύνολο των C^∞ συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{R}$. Ακριβώς όπως πριν, το $\mathcal{D}_X$ είναι ένα sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων. Επίσης, το $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n.*

Παράδειγμα III.3.11. *Για ένα ανοιχτό σύνολο U του χώρου $X = \mathbb{C}^n$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_X(U)$ τον δακτύλιο των ολόμορφων συναρτήσεων επί του U. Με παρόμοιο τρόπο όπως πριν, το $\mathcal{O}_X$ είναι ένα sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων επί του X. Το X μπορεί να αντικατασταθεί από μία μιγαδική πολλαπλότητα διάστασης n*

Θα ορίσουμε τώρα το sheaf $\mathcal{O}_X$ των συναρτήσεων υπέρ τον χώρο $X = \mathrm{Spec} R$ με την τοπολογία Zariski. Για ένα ανοιχτό σύνολο X_f ορίζουμε

$$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f.$$

Αν $X_f = \cup_{a\in A} X_{f_a}$ έχουμε ήδη δείξει ότι το $\mathcal{O}_X$ ικανοποιεί τις δύο συνθήκες του ορισμού του sheaf. Θα ορίζουμε τώρα το $\mathcal{O}_X(U)$ για ένα τυχαίο ανοιχτό U του X ως ένα υποσύνολο του $\prod_{P\in U} R_P$

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ \{s_p\} \in \prod_{P\in U} R_P \begin{array}{l} \text{αν για ένα ανοιχτό κάλυμμα } \{X_{f_b}\}_{b\in B} \text{ του } U, \text{ υπάρχουν } s_b \in R_{f_b} \\ \text{ώστε για } P \in X_{f_b} \text{ το φύτρο του } s_b \text{ στο } P \text{ να ταυτίζεται με το } s_P \end{array} \right\}.$$

Δηλαδή οι επιλογές s_P σε κάθε σημείο $P \in U$ δεν είναι άσχετες, αλλά απαιτούμε αυτές να προέρχονται από εντοπισμούς στοιχείων μιας ανοιχτής κάλυψης.

Σε αυτή την περίπτωση οι περιορισμοί των s_a και s_b ταυτίζονται στο $X_{f_a} \cap X_{f_b} = X_{f_a f_b}$, δηλαδή

$$\rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_a}}(s_a) = \rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_b}}(s_b).$$

Πράγματι, το φύτρο του s_a στο $P \in X_{f_a f_b}$ ισούται με το φύτρο του s_b στο P σύμφωνα με τον ορισμό του ευθέος ορίου, δηλαδή υπάρχει ένα $X_{h_P} \subset X_{f_a f_b}$ που να περιέχει το P και

$$\rho_{X_{h_P}, X_{f_a}}(s_a) = \rho_{X_{h_P}, X_{f_b}}(s_b). \tag{III.7}$$

Τότε για κάθε $P \in X_{f_a f_b}$ διαλέγουμε ένα X_{h_P} που να ικανοποιεί την (III.7). Έχουμε

$$X_{f_a f_b} = \bigcup_{P \in X_{f_a f_b}} X_{h_P}.$$

Τότε από την (III.7) για κάθε $P \in X_{f_a f_b}$ έχουμε

$$\rho_{X_{h_P}, X_{f_a f_b}}(\rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_a}}(s_a)) = \rho_{X_{h_P}, X_{f_a f_b}}(\rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_b}}(s_b)).$$

Από τις ιδιότητες του sheaf έχουμε

$$\rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_a}}(s_a) = \rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_b}}(s_b).$$

Συνεπώς ένα στοιχείο s_P έχει κατασκευαστεί ως το στοιχείο $s \in \mathcal{O}_X(U)$ από τα στοιχεία $s_b \in \mathcal{O}_X(X_{f_b}) = R_{f_b}$.

Η δομή δακτυλίου στο $\mathcal{O}_X(U)$ δίνεται από τα

$$\{s_P\} + \{t_P\} = \{s_P + t_p\} \text{ και } \{s_P\} \cdot \{t_P\} = \{s_P t_P\}$$

με μηδενικό στοιχείο $O_U = \{0_P\}$ και $1_U = \{1_P\}$. Παρατηρούμε ότι το $s_P + t_P$ είναι το φύτρο του $\rho_{X_{fg}, X_f}(s) + \rho_{X_{fg}, X_g}(t) \in R_{fg}$ για τα φύτρα s_P και t_P του $s \in R_f$ και $t \in R_g$, $P \in X_f \cap X_g$ έχουμε ότι $\{s_P + t_P\}$, $\{s_P t_P\}$ είναι στοιχεία του $\mathcal{O}_X(U)$. Δείξαμε, δηλαδή ότι το $\mathcal{O}_X(U)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Επίσης, για $U = X_f$ έχουμε ότι

$$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f.$$

Τέλος για τα ανοιχτά $V \subset U$ η συνάρτηση περιορισμού $\rho_{V,U}$ δίνεται από

$$\begin{aligned} \rho_{V,U} : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(V), \\ \{s_P\}_{P\in U} &\longmapsto \{s_Q\}_{Q\in V} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση περιορισμού είναι καλά ορισμένη και επίσης είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Η συνάρτηση περιορισμού είναι ο περιορισμός της φυσικής συνάρτησης

$$\rho : \prod_{P\in U} R_P \longrightarrow \prod_{Q\in V} R_Q$$

στο $\mathcal{O}_X(U)$. Έτσι καταλήγουμε στο

Θεώρημα III.3.12. *Έστω $X = \mathrm{Spec}R$. Τότε το $\mathcal{O}_X$ είναι ένα sheaf από αντιμεταθετικές άλγεβρες υπέρ το X εφοδιασμένο με την τοπολογία του Zariski και*

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = R$$

ενώ για $f \in R$ έχουμε

$$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X_f) = R_f.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $\mathcal{O}_X$ μπορούμε να δείξουμε άμεσα την ιδιότητα του prescheme. Θα δείξουμε τώρα την πρώτη ιδιότητα του scheme. Για $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ αν $s \in \mathcal{O}_X(U)$ ικανοποιεί $\rho_{U_\lambda, U}(s) = 0$, τότε $s_P = 0$ για κάθε $P \in U$ και συνεπώς $s = 0$.

Τώρα θα δείξουμε τη δεύτερη ιδιότητα του scheme. Έστω και πάλι για $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ δίνεται $s_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\rho_{U_\lambda \cap U_\mu, U_\lambda}(s_\lambda) = \rho_{U_\lambda \cap U_\mu, U_\mu}(s_\mu)$$

κάθε φορά που $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$. Θέτουμε

$$s_\lambda = \{s_P^{(\lambda)} \in \prod_{P \in U} R_P\}.$$

Για $P \in U_\lambda$ θέτουμε $s_P = s_P^{(\lambda)}$. Τότε $s \in \mathcal{O}_X(U)$ και $\rho_{U_\lambda, U}(s) = s_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τέλος για $f = 1$ το λήμμα III.3.7 δίνει ότι $\mathcal{O}_X(X) = R$. □

Ορισμός III.3.13. *Ένα affine scheme είναι ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{O}_X)$ όπου $X = \mathrm{Spec}R$ και το $\mathcal{O}_X$ είναι το sheaf των κανονικών συναρτήσεων, το οποίο και θα το ονομάζουμε sheaf δομής.*

Συχνά παραλείπουμε το sheaf δομής και αντί για $(X, \mathcal{O}_X)$ γράφουμε $X = \mathrm{Spec}R$.

Πρόταση III.3.14. *Ισχύει ότι για $P \in X$*

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ P \in U}} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = R_P$$

Απόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ P \in f}} \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = R_P.$$

Όμως κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset X$ του X που περιέχει το P υπάρχει ένα X_f, ώστε $P \in X_f \subset U$. Το ζητούμενο προκύπτει από τον ορισμό του ευθέος ορίου. □

Παράδειγμα III.3.15. *Έστω k ένα σώμα. Το $\mathrm{Spec}k$ αποτελείται από ένα ακριβώς σημείο το $\langle 0 \rangle$, και το sheaf δομής είναι το σώμα k ακριβώς πάνω από αυτό το σημείο.*

Παράδειγμα III.3.16. *Η αφινική γραμμή $\mathrm{Spec}k[x] = \mathbb{A}^1_k$. Το $k[x]$ έχει δύο τύπους πρώτων ιδεωδών το $\langle 0 \rangle$ και τα $\langle f(x) \rangle$ όπου $f(x)$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο. Το $\mathrm{Spec}k[x]$ έχει ένα κλειστό σημείο για κάθε μονικό ανάγωγο πολυώνυμο και ένα generic σημείο $\langle 0 \rangle$ του οποίου η κλειστότητα είναι όλο το $\mathrm{Spec}(k[x])$, αφού*

$$\overline{\langle 0 \rangle} = \{P \in \mathrm{Spec}k[x], 0 \subset P\}.$$

Αν το k είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε τα κλειστά σημεία είναι της μορφής $\langle x - a \rangle$. Ο δακτύλιος φύτρων στο σημείο $\langle x - a \rangle$ είναι ο εντοπισμός

$$k[x]_{(x-a)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} | f, g \in k[x], g(a) \neq 0 \right\}.$$

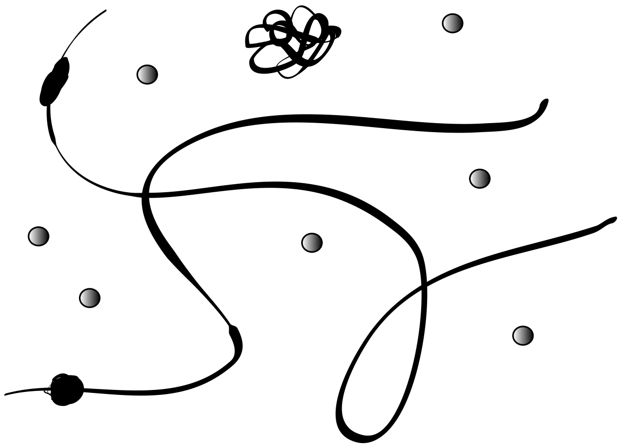
Ο δακτύλιος φύτρων στο $\langle 0 \rangle$ είναι το $k(x)$ το οποίο ονομάζουμε σώμα συναρτήσεων και το συμβολίζουμε με $k(\mathbb{A}^1)$.

Παράδειγμα III.3.17. *Το σχήμα* $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. *Ο δακτύλιος* $\mathbb{Z}$ *είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών όπως και ο* $k[x]$. *Για κάθε πρώτο αριθμό υπάρχει ένα κλειστό σημείο που αντιστοιχεί στο κύριο ιδεώδες* $p\mathbb{Z}$. *Ο δακτύλιος φύτρων σε κάθε σημείο* $p\mathbb{Z}$ *είναι ο* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *ενώ στο* $\langle 0\rangle$ *είναι το* $\mathbb{Q}$, *το οποίο το βλέπουμε ως το σώμα συναρτήσεων στο* $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. *Τα μη κενά ανοιχτά είναι αυτά που προκύπτουν αφαιρώντας από το* $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ *πεπερασμένους πρώτους* $p_1, \ldots, p_n$. *Αν λοιπόν* $m = \prod_{i=1}^n p_i$, *τότε*

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{(m)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}) = \left\{ \frac{a}{m^k} : a \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0 \right\}.$$

Παράδειγμα III.3.18. *Έστω* R *ένας διακριτός δακτύλιος εκτίμησης. Ένας τέτοιος δακτύλιος έχει ένα μοναδικό μέγιστο ιδεώδες* m *και το* $\mathrm{Spec}R$ *έχει δύο σημεία το* $\langle 0\rangle$ *(generic) και το* m *το οποίο είναι κλειστό.*

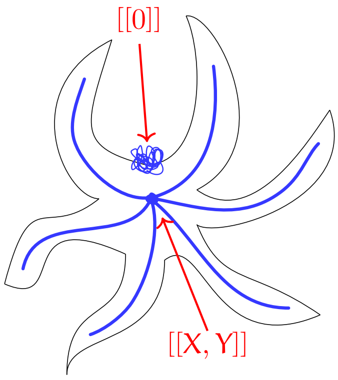
Παράδειγμα III.3.19. *Θεωρούμε τώρα το* $\mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}k[x, y]$, *όπου το* k *είναι αλγεβρικά κλειστό. Το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου* $k[x, y]$ *αποτελείται από τα μέγιστα ιδεώδη* $(x - a, y - b)$, *τα κύρια πρώτα ιδεώδη* $\langle f(x, y)\rangle$, *όπου το* $f(x, y) \in k[x, y]$ *είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο και από το ιδεώδες* $\langle 0\rangle$. *Τα κλειστά σημεία ταυτίζονται με το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών. Για κάθε ανάγωγο πολυώνυμο αντιστοιχούμε ένα generic σημείο, όπως ένα generic σημείο αντιστοιχεί και στο μηδενικό ιδεώδες. Ένα γνήσιο κλειστό υποσύνολο του* $\mathrm{Spec}k[x, y]$ *αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος ανάγωγων καμπυλών, generic points και κλειστών σημείων.*



Παράδειγμα III.3.20. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} : f, g \in k[X, Y], g(0, 0) \neq 0 \right\}.$$

Ο δακτύλιος $\mathcal{O}$ *είναι ο δακτύλιος φύτρων του* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}k[x,y]}$ *στο* $(0, 0)$. *Ο δακτύλιος* $\mathcal{O}$ *έχει το* $\langle x, y\rangle$ *ως μέγιστο ιδεώδες. Επίσης, τα κύρια πρώτα ιδεώδη* $\langle f(x, y)\rangle$, *όπου το* $f(x, y)$ *είναι ανάγωγο και* $f(0, 0) = 0$ *και το* $\langle 0\rangle$. *Δηλαδή το* $\mathrm{Spec}\mathcal{O}$ *έχει ένα μοναδικό κλειστό σημείο. Αν το αφαιρέσουμε το κλειστό σημείο και τον άξονα των* y, *τότε έχουμε το διακεκριμένο ανοιχτό σύνολο* $x \neq 0$, *που δεν περιέχει κανένα από τα αρχικά κλειστά σημεία. Από την άλλη πλευρά, αν* $K = k(x)$, *τότε το αυτό το σχήμα είναι το* $\mathrm{Spec}k[y]_S$ *για ένα πολλαπλασιαστικό σύνολο* $S \subset k[y]$, *δηλαδή είναι τμήμα της αφινικής ευθείας μέχρι το* K.



III.4 Ringed spaces και γενικά Σχήματα

III.4.1 Γενικές ιδιότητες από sheaves

Για ένα δεδομένο sheaf $\mathcal{F}$ υπέρ του τοπολογικού χώρου X και ένα ανοιχτό U του X ορίζουμε ένα sheaf στο ανοιχτό U. Ορίζουμε, δηλαδή $\mathcal{F}|_U$ με $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{V}$. Υπενθυμίζουμε ότι τα ανοιχτά του U, με την επαγώμενη τοπολογία, προκύπτουν ως τομές του U με ανοιχτά V του X.

Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ sheaves επί του χώρου X. Αν για κάθε ανοιχτό $U \subset X$ υπάρχει ένας ομομορφισμός (δακτυλίων, αβελιανών ομάδων, modules κτλ.)

$$f_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

η οποία επιπλέον να είναι συμβατή με τον περιορισμό, δηλαδή για κάθε ανοιχτά $V \subset U$ να έχουμε

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V), \end{tikzcd}$$

τότε θα έχουμε έναν ομομορφισμό από sheaves. Ένας ομομορφισμός από sheaves επάγει έναν ομομορφισμό στους δακτυλίους φύτρων:

$$f_x \in \mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{G}(U)$$

Παράδειγμα III.4.1. *Θεωρούμε ένα* R*-module* M*. Για ένα πολλαπλασιαστικό σύνολο* $S \subset R$ *ορίζουμε* $M_S = S^{-1}M$ *να είναι το*

$$M_S = \{m/t : m \in M, t \in S\}$$

όπου για $m_1, m_2 \in M$ *και* $s_1, s_2 \in S$

$$\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } s \in S \text{ ώστε } s(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0.$$

Για ένα μη μηδενοδύναμο σύνολο $f \in R$, το σύνολο $S = \{f, f^2, \dots, \}$ είναι πολλαπλασιαστικό. Σε αυτή την περίπτωση συχνά γράφουμε M_f αντί για το σύνολο M_S. Τέλος για ένα πρώτο ιδεώδες P, το σύνολο $S = R - P$ είναι πολλαπλασιαστικό και γράφουμε M_P αντί για M_S.

Το σύνολο M_f είναι R_f-module, ενώ το σύνολο M_P είναι R_P-module. Όπως και στην περίπτωση των sheaves κανονικών συναρτήσεων ορίζουμε ένα sheaf $\widetilde{M}$ στο $\operatorname{Spec} R$ με

$$\Gamma(X_f, \widetilde{M}) = M_f.$$

Επίσης,

$$\widetilde{M}_x = \varinjlim_{x \in X_f} \Gamma(X_f, \widetilde{M}) = M_P.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε ζευγάρι ανοιχτών $V \subset U$ έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, \widetilde{M}) \arrow[d] \\ \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \widetilde{M}) \arrow[r] & \Gamma(V, \widetilde{M}) \end{tikzcd}$$

Το sheaf $\widetilde{M}$ είναι ένα sheaf από $\mathcal{O}_X$-modules.

Αν τώρα έχουμε έναν ομομορφισμό $\phi : M \to N$ και $f \in R$, έχουμε ομομορφισμούς

$$\phi_f : M_f \to N_f$$

από R_f-modules. Επίσης, για $X_g \supset X_f$ έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} M_f \arrow[r, "\phi_f"] \arrow[d, "\rho^M_{X_g, X_f}"] & N_f \arrow[d, "\rho^N_{X_g, X_f}"] \\ M_g \arrow[r, "\phi_g"] & N_g \end{tikzcd}$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε έναν ομομορφισμό $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ από $\mathcal{O}_X$-modules.

Γενικά ένας ομομορφισμός μεταξύ sheaves $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ θα λέγεται 1-1 αν για κάθε ανοιχτό $U \subset X$ η συνάρτηση

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

είναι 1-1. Ένας ομομορφισμός ϕ μεταξύ sheaves επάγει έναν ομομορφισμό ανάμεσα στους δακτύλιους φύτρων

$$\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x.$$

Αν για κάθε σημείο x αυτός είναι επί, τότε ο ϕ θα είναι επιμορφισμός.

Παρατήρηση III.4.2. *Για το επί δεν μπορούμε να απαιτήσουμε να έχουμε επί σε κάθε ανοιχτό όπως κάναμε στο 1-1. Το επόμενο παράδειγμα είναι ενδεικτικό. Έχουμε τη μικρή ακριβή ακολουθία από sheaves*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp(2\pi z)} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}} \longrightarrow 1$$

Το $\mathbb{Z}$ είναι το σταθερό sheaf, ενώ το $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ είναι το sheaf των ολόμορφων συναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο. Η επαγόμενη συνάρτηση

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\exp(2\pi z)} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$$

δεν μπορεί να είναι επί, αφού ο λογάριθμος δεν μπορεί να οριστεί σε έναν τουλάχιστον ημιάξονα με αρχή το 0.

Η παραπάνω παρατήρηση είναι η αρχή της συνομολογίας των sheaves για την οποία παραπέμπουμε στο [2, κεφ. 2].

Πρόταση III.4.3. *Ισχύει ότι $M_f \cong R_f \otimes_R M$ και $M_P \cong R_P \otimes_R M$.*

Ορισμός III.4.4. *Έστω $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση μεταξύ τοπολογικών χώρων και έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf στο X. Για ένα ανοιχτό $U \subset Y$ ορίζουμε*

$$\mathcal{G}(U) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}).$$

Το $\mathcal{G}$ είναι ένα sheaf επί του Y το οποίο θα το λέμε ευθεία εικόνα του f και θα το συμβολίζουμε με $f_*\mathcal{F}$.

Λήμμα III.4.5. *Ένας ομομορφισμός δακτυλίων* $\phi : R_1 \to R_2$ *επάγει συνεχή συνάρτηση* $\phi^a : \mathrm{Spec}R_2 \to \mathrm{Spec}R_1$. *Αν* $\widetilde{M}$ *είναι το sheaf που καθορίζεται από το* R_2*-module* M. *Μέσω της συνάρτησης* ϕ *το* M *μπορεί να θεωρηθεί ως ένα* R_1*-module. Δηλαδή, για* $r \in R_1$, $a \in M$ *ορίζουμε* $ra = \phi(r)a$. *Η εικόνα* $\phi^a_* \widetilde{M}$ *που επάγεται από τον* ϕ *υπέρ του* $\mathrm{Spec}R_1$ *είναι το sheaf* $\widetilde{M}$ *που ορίζεται μέσω της* R_1 *δομής του* M.

Απόδειξη. Θέτουμε $X = \mathrm{Spec}R_1$ και $Y = \mathrm{Spec}R_2$. Για $f \in R_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\phi^a)^{-1}(X_f) &= \{P \in \mathrm{Spec}R_2 | \phi^{-1}P \in X_f\}\\ &= \{P \in \mathrm{Spec}R_2 | f \notin \phi^{-1}(P)\}\\ &= \{P \in \mathrm{Spec}R_2 | \phi(f) \notin P\} \qquad = Y_{\phi(f)}\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\Gamma(X_f, \phi^a_* \widetilde{M}) = \Gamma(Y_{\phi(f)}, \widetilde{M}) = M_{\phi(f)}.$$

Ας συμβολίσουμε με N το R_1-module M με δομή μέσω της ϕ. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned}\psi : N_f &\longrightarrow M_{\phi(f)}\\ a/f^m &\longmapsto a/\phi(f)^m\end{aligned}$$

είναι καλά ορισμένος ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Αφού δε

$$\Gamma(X_f, \phi^a_* \widetilde{M}) = N_f$$

το ζητούμενο έπεται. □

III.5 Ringed space

Ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{O}_X)$ αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο X και από ένα sheaf $\mathcal{O}_X$ αντιμεταθετικών δακτυλίων θα λέγεται ringed space. Ο τοπολογικός χώρος X θα λέγεται ο υποκείμενος χώρος. Ένας μορφισμός από ένα ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ σε έναν άλλο ringed space $(Y, \mathcal{O}_Y)$ είναι ένα ζευγάρι (f, θ) αποτελούμενο από μία συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ και από έναν ομομορφισμό $\theta : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ από sheaves αντιμεταθετικών δακτυλίων υπέρ το Y. Αν κάθε δακτύλιος φύτρων $\mathcal{O}_{X,x}$ του sheaf $\mathcal{O}_X$ είναι τοπικός δακτύλιος, τότε το $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται τοπικός ringed space. Ένας μορφισμός από local ringed spaces είναι ένας μορφισμός από ringed spaces με την επιπλέον ιδιότητα ότι η επαγώμενη συνάρτηση

$$\theta_y : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

είναι ένας τοπικός ομομορφισμός, δηλαδή η εικόνα του μεγίστου ιδεώδους $\mathfrak{m}_y$ του $\mathcal{O}_{Y,y}$ περιέχεται στο μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_x$ του $\mathcal{O}_{X,x}$.

Για μια ανοιχτή περιοχή U του $y = f(x)$ έχουμε ότι $x \in f^{-1}(U)$ και ο μορφισμός sheaves θ επάγει τους ομομορφισμούς δακτυλίων

$$\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(U, f_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X).$$

Για κάθε ανοιχτό σύνολο V με $V \subset f^{-1}U$ επάγονται ομομορφισμοί δακτυλίων

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\rho_{V, f^{-1}(U)}} \Gamma(V, \mathcal{O}_X),$$

και με αυτό τον τρόπο ορίζεται ο ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varinjlim_{y \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \varinjlim_{x \in V} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X,x},$$

ο οποίος είναι ο ομομορφισμός ανάμεσα στα φύτρα: $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$.

Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο X και έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf υπέρ του X. Τότε για ένα ανοιχτό U κάθε ανοιχτό $V \subset U$ είναι επίσης ανοιχτό του X. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίζουμε ένα sheaf $\mathcal{G}$ στο U με $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}(V)$, το οποίο το ονομάσαμε sheaf περιορισμού και το συμβολίσαμε με $\mathcal{F} \mid U$.

Με αυτό τον τρόπο για ένα ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ και ένα ανοιχτό $U \subset X$ μπορούμε να ορίσουμε ένα ringed space υπέρ του U, τον $(U, \mathcal{O}_{X|U})$.

Για τη φυσική συνάρτηση $i : U \to X$, θεωρούμε το $i_*(\mathcal{O}_{X|U})$. Τότε $i_*(\mathcal{O}_{X|U})U = \mathcal{O}_{X|U}$. Για $x \notin \overline{U}$ μπορούμε να βρούμε ανοιχτή περιοχή V του x ώστε $V \cap U = \emptyset$. Αφού $i^{-1}(V) = \emptyset$ έχουμε $\Gamma(V, i_*(\mathcal{O}_{X|U})) = 0$. Ειδικότερα έχουμε $i_*(\mathcal{O}_{X|U})(X - \overline{U}) = 0$.

Για ένα ανοιχτό σύνολο $W \subset X$, η συνάρτηση περιορισμού

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(W \cap U, \mathcal{O}_X)$$

επάγει

$$i^{\#}_W : \Gamma(W, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(W, i_*(\mathcal{O}_{X|U})).$$

Παρατηρούμε ότι $\Gamma(W, i_*(\mathcal{O}_{X|U})) = \Gamma(W \cap U, \mathcal{O}_X)$. Η συνάρτηση $i^{\#}_W$ επάγει ομομορφισμό από sheaves:

$$i^{\#} : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_{X|U}),$$

και ότι για ένα τοπικό ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$, ο $i^{\#}$ είναι τοπικός ομομορφισμός. Συνεπώς ο

$$(i, i^{\#}) : (U, \mathcal{O}_{X|U}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

είναι μορφισμός από ringed spaces.

Πρόταση III.5.1. *Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\phi : R \to S$ καθορίζει έναν μορφισμό από ringed spaces ανάμεσα στα επαγώμενα αφινικά σχήματα.*

$$(\phi^a, \phi^{\#}) : (\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}).$$

Η ϕ^a είναι μια συνεχής συνάρτηση των υποκείμενων χώρων

$$\begin{aligned} \phi^a : \mathrm{Spec}S &\longrightarrow \mathrm{Spec}R \\ P &\longmapsto \phi^{-1}(P), \end{aligned}$$

και $\phi^{\#}$ είναι ομομορφισμός sheaves:

$$\phi^{\#} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \longrightarrow \phi^a_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S}$$

που επάγεται από τον ομομορφισμό $\phi_f : R_f \to S_{\phi(f)}$ για ένα ανοιχτό σύνολο X_f του $\mathrm{Spec}R$, $f \in R$.

Απόδειξη. Το ϕ^a είναι μια συνεχής συνάρτηση, ενώ το ϕ_f επάγει ομομορφισμό $\phi^{\#}$ από sheaves προσθετικών ομάδων. Επιπλέον, το S μπορεί να θεωρηθεί ως μια R-άλγεβρα μέσω της ϕ. Δηλαδή το $\phi^{\#}$ είναι ένας ομομορφισμός από sheaves αντιμεταθετικών δακτυλίων. Το ϕ_f δίνει έναν ομομορφισμό

$$R_{\phi^{-1}(P)} \longrightarrow S_P$$

για $P \in \mathrm{Spec}S$, και ϕ_f είναι τοπικός ομομορφισμός. □

Ορισμός III.5.2. *Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ ένας τοπικός ringed space. Αν υπάρχει ανοιχτό κάλυμμα $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ του X ώστε τα $(U_\lambda, \mathcal{O}_{X|U_\lambda})$ να είναι ισομορφικά με αφινικά σχήματα ως τοπικοί ringed spaces, τότε το $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται (pre)scheme. Ο τοπολογικός χώρος X θα λέγεται ο υποκείμενος χώρος, ενώ το $\mathcal{O}_X$ το sheaf δομής.*

Δηλαδή ένα scheme είναι ο τοπικός ringed χώρος που προκύπτει από το κόλλημα αφινικών σχημάτων μαζί. Κάθε ανοιχτό σύνολο μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοιχτών συνόλων από αφινικά ανοιχτά σύνολα. Δηλαδή τα αφινικά ανοιχτά σύνολα σχηματίζουν μια θεμελιώδη οικογένεια ανοιχτών συνόλων για τον υποκείμενο χώρο ενός σχήματος.

Για ένα αφινικό σχήμα $(\mathrm{Spec} R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R})$ και $f \in R$ έχουμε το αφινικό σχήμα $X_f = \mathrm{Spec} R_f$. Γενικά, ένα ανοιχτό σύνολο U του $\mathrm{Spec} R$ μπορεί να καλυφθεί από αφινικά ανοιχτά σύνολα

$$U = \bigcap_{j \in J} X_{f_j}.$$

Συνεπώς το $(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R | U})$ είναι ένα σχήμα. Δεν είναι όμως κάθε ανοιχτό ένα αφινικό σχήμα κατ ανάγκη.

Παράδειγμα III.5.3. *Θεωρούμε τις αφινικές γραμμές*

$$U_0 = (\mathrm{Spec} k[x], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k[x]})$$
$$U_1 = (\mathrm{Spec} k[y], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k[y]}).$$

Μπορούμε να ορίσουμε δομή αφινικού σχήματος στο ανοιχτό σύνολο X_x *του* $\mathrm{Spec} k[x]$ *ως εξής:*

$$U_{01} = (\mathrm{Spec} k[x, 1/x], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k[x,1/x]}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k[x,1/x]} = \mathcal{O}_{X|X_x}.$$

Με όμοιο τρόπο για το ανοιχτό σύνολο Y_y *ορίζουμε αφινική δομή σχήματος ως*

$$U_{10} = (\mathrm{Spec} k[y, 1/y], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k[y,1/y]}).$$

Ο ισομορφισμός

$$\begin{aligned} \phi : k[y, 1/y] &\longrightarrow k[x, 1/x] \\ f(y, 1/y) &\longmapsto f(1/x, x) \end{aligned}$$

επάγει έναν ισομορφισμό αφινικών σχημάτων

$$(\phi^a, \phi^\#) : U_{01} \to U_{10}.$$

Διαμέσου του ισομορφισμού αυτού, τα σύνολα U_1, U_0 *μπορούν να κολληθούν δίνοντας το σχήμα*

$$\mathbb{P}^1_k = (Z, \mathcal{O}_Z),$$

όπου το Z *είναι το σχήμα που παίρνουμε ταυτίζοντας τα σύνολα* X_x, Y_y *μέσω της* ϕ^a. *Δηλαδή*

$$Z = X \bigcup_{\phi^a} Y,$$

όπου $\mathcal{O}_{Z|X} = \mathcal{O}_X$ *και* $\mathcal{O}_{Z|Y} = \mathcal{O}_Y$, *δηλαδή το* $\mathcal{O}_Z$ *είναι το sheaf στο οποίο ταυτίζουμε τα* $\mathcal{O}_{X|X_x}$ *και* $\mathcal{O}_{Y|Y_y}$ *διαμέσου της* $\phi^\#$.

III.6 Προβολικός χώρος και προβολικό σχήμα

Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = k[x_0, \dots, x_n]$ των πολυωνύμων σε $n+1$ μεταβλητές υπέρ το k. Ορίζουμε το

$$\mathbb{P}_k^n = \{P \mid P \text{ είναι ομογενές πρώτο ιδεώδες του } R, P \neq \langle x_0, \dots, x_n \rangle\}.$$

Έστω R_d το σύνολο όλων των ομογενών πολυωνύμων βαθμού d και I_d το σύνολο των πολυωνύμων στο R_d και στο ιδεώδες I, δηλαδή $I_d = I \cap R_d$. Αν

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d,$$

τότε είδαμε ότι το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες του R. Αν το πρώτο ιδεώδες P είναι ομογενές, τότε λέγεται ομογενές πρώτο ιδεώδες. Για ένα ομογενές ιδεώδες I θέτουμε

$$V(I) = \{P \in \mathbb{P}_k^n : I \subset P\}.$$

Ορίζοντας το $V(I)$ ως ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{P}_k^n$, ορίζουμε μία τοπολογία στο $\mathbb{P}_k^n$. Για ένα ομογενές πολυώνυμο $f \in R$ ορίζουμε

$$D_+(f) = \{P \in \mathbb{P}_k^n : f \notin P\}.$$

Αν αφήσουμε το f να διατρέχει τα ομογενή πολυώνυμα $f \in R$ τα $D_+(f)$ σχηματίζουν θεμελιώδη ανοιχτά για το $\mathbb{P}_k^n$. Για ένα ανοιχτό $D_+(f)$ ορίζουμε

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = \left\{ \frac{g}{f^m}, g \in R, g \text{ ομογενές } \deg g = m \deg f, m \geqslant 1 \right\}.$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το sheaf δομής $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$ του $\mathbb{P}_k^n$ και να καταλήξουμε στον ringed space $(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$. Ο παραπάνω ringed space μπορεί να πάρει δομή σχήματος ως εξής:

Θέτουμε $U_j = D_+(x_j)$ για $j = 0, 1, \dots, n$. Τότε είναι σαφές ότι

$$\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{j=0}^{n} U_j.$$

Πράγματι, εξ' ορισμού του $\mathbb{P}_k^n$ κανένα πρώτο ιδεώδες στο $\mathbb{P}_k^n$ δεν είναι το $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Αφού το $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες, έχουμε ότι $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \not\subset P$. Άρα τουλάχιστον ένα x_j δεν ανήκει στο P. Τότε θέτουμε

$$R_j = k\left[\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right],$$

δηλαδή ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών υπέρ το σώμα k. Θα δείξουμε ότι U_j είναι ομοιομορφικός με τον $\mathrm{Spec} R_j$. Παρατηρούμε ότι κάθε πολυώνυμο $g \in R = k[x_0, \dots, x_n]$ διασπάται ως

$$g = g_{d_1} + \dots + d_{d_\ell}, \quad 0 \leqslant d_1 < d_2 < \dots < d_\ell,$$

όπου το g_i είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού d_i για $i = 1, \dots, \ell$. Τότε θέτουμε

$$\phi_j(g) = \frac{g_{d_1}}{x_j^{d_1}} + \frac{g_{d_2}}{x_j^{d_2}} + \cdots \frac{g_{d_\ell}}{x_j^{d_\ell}},$$

και $\phi_j(g) \in R_j$. Η συνάρτηση

$$\phi_j : R \longrightarrow R_j$$

είναι ομομορφισμός δακτυλίων και $\phi_j^{-1}(P) \in U_j$ για $P \in \mathrm{Spec}R_j$. Πράγματι για $P = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ με $\deg h_i = e_i$ η συνάρτηση

$$\overline{h}_i = x_i^{e_i} h_i \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right) \in R$$

είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού e_i και το

$$\phi_j^{-1}(P) = \langle \overline{h}_1, \dots, \overline{h}_m \rangle$$

είναι ομογενές και πρώτο.

Το $x_j \notin \phi_j^{-1}(P)$ αφού, τότε $1 = x_j/x_j$ θα ανήκε στο $P \in \mathrm{Spec}R_j$, άτοπο. Δηλαδή $\phi^{-1}(P) \in U_j$. Άρα η συνάρτηση

$$\phi_j^a : \mathrm{Spec}R_j \to U_j.$$

Είναι σαφές ότι η ϕ_j^a είναι συνεχής.

Αντιστρόφως, αν $Q \in U_j$ έχουμε ότι $q = \langle H_1, \dots, H_\ell \rangle$ με $H_1, \dots, H_\ell$ ομογενή. Θέτουμε

$$h_j = \frac{1}{x_j^{e_j}} H_i \in R_j \text{ με } e_i = \deg H_i$$

και $p = \langle h_1, \dots, h_\ell \rangle$ είναι ιδεώδες του R_j. Αφού το $x_j \notin Q$ έχουμε ότι $1 \notin P$. Αν $f \cdot g \in P$ για $f, g \in R_j$, τότε για $\deg f = a$ και $\deg g = b$ θέτουμε $F = x_j^a f$ και $G = x_j^b g$. Τα F, G είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμών a και b και έχουμε ότι $FG \in Q$. Αφού το Q είναι πρώτο ιδεώδες έχουμε ότι $F \in Q$ ή $G \in Q$. Άρα $f \in P$ ή $g \in P$, δηλαδή και το P είναι ένα πρώτο ιδεώδες. Εξ ορισμού του P είναι σαφές ότι $\phi_j^{-1}(P) = Q$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη της ϕ_j^a,

$$(\phi_j^a)^{-1} : U_j \longrightarrow \mathrm{Spec}R_j.$$

Για ένα ομογενές πολυώνυμο $F \in R_j$ θέτουμε

$$f = \frac{1}{x_j^m} F \in R_j$$

και έχουμε

$$\phi_j^a(\mathrm{Spec}R_j)_f = D_+(F) \cap U_j$$

και

$$(\phi_j^a)(D_+(F) \cap U_j) = (\mathrm{Spec}R_j)_f.$$

Αφού οι ϕ_j^a και $(\phi_j^a)^{-1}$ είναι συνεχείς ο ϕ_j^a είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, έχουμε

$$\Gamma(U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = R_j$$
$$\Gamma(U_j \cap D_+(F), \mathbb{P}_k^n) = (R_j)_f.$$

Καταλήγουμε στο ότι το $(U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n|U_j})$ είναι ισόμορφο με το $(\mathrm{Spec}R_j, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R_j})$ ως τοπικοί δακτυλιδόχωροι. Συνεπώς το $(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$ έχει τη δομή σχήματος.

III.7 ProjS

Θεωρούμε έναν βαθμωτό δακτύλιο S, δηλαδή έναν δακτύλιο ο οποίος μπορεί να διασπαστεί ως ένα ευθύ άθροισμα

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

όπου τα σύνολα S_d ικανοποιούν τη σχέση

$$S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}.$$

Τα στοιχεία του S_d θα λέγονται ομογενή βαθμού d. Για παράδειγμα, ο δακτύλιος $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ είναι βαθμωτός και ο χώρος R_d αποτελείται από τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού d.

Για ένα ιδεώδες I ενός δακτυλίου S θέτουμε $I_d = I \cap S_d$. Αν

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d,$$

τότε το I θα λέγεται *ομογενές ιδεώδες*. Ένα ιδεώδες είναι ομογενές αν το τυχαίο στοιχείο $F \in I$ γράφεται ως

$$F = F_{d_1} + \cdots + F_{d_\ell},$$

με $F_{d_j} \in I \cap S_{d_j}$. Αν ένα ομογενές ιδεώδες είναι πρώτο, θα λέγεται ομογενές πρώτο ιδεώδες. Για έναν βαθμωτό δακτύλιο θέτουμε

$$S_+ = \bigoplus_{d \geqslant 1} S_d.$$

Το S_+ είναι ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες. Όπως και στον ορισμό του προβολικού χώρου, θέτουμε

$$\mathrm{Proj} S = \{P | P \text{ ομογενές πρώτο ιδεώδες του } S, P \not\supset S_+\}$$

και θα ονομάζεται το ομογενές φάσμα πρώτων του βαθμωτού δακτυλίου S. Για ένα ομογενές ιδεώδες $\mathfrak{a}$, θέτουμε

$$V(\mathfrak{a}) = \{P \in \mathrm{Proj} S : P \supset \mathfrak{a}\}.$$

Η τοπολογία Zariski μπορεί να οριστεί στο ProjS θεωρώντας τα σύνολα $V(\mathfrak{a})$ ως κλειστά. Για $f \in S_d$ θέτουμε

$$D_+(f) = \{P \in \mathrm{Proj} S | f \notin P\}.$$

Τα σύνολα $D_+(f)$ αποτελούν μια βάση ανοιχτών της τοπολογίας Zariski. Έστω S βαθμωτός δακτύλιος και $\mathfrak{a}$ ομογενές ιδεώδες του. Το συμπλήρωμα

$$V(\mathfrak{a})^c = \bigcup_{\substack{f \in \mathfrak{a} \\ f \text{ ομογενές}}} D_+(f)$$

Θα ορίσουμε το sheaf δομής $\mathcal{O}_X$ πάνω από το $X = \mathrm{Proj} S$. Για $f \in S_d$ ορίζουμε

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X) = \{g/f^m : g \in S_{md}, m \geqslant 1\} = S_f^{(0)}.$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω εξίσωσης αποτελείται από τα στοιχεία βαθμού 0 στον εντοπισμό S_f. Με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ένα sheaf (επεκτείνοντας όπως και στην περίπτωση των αφινικών σχημάτων τον ορισμό του sheaf σε γενικά ανοιχτά) και να πάρουμε έναν τοπικό δακτυλιδόχωρο.

Παρατηρούμε ότι

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{X|D_+(f)}) \cong (\mathrm{Spec} S_f^{(0)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} S_f^{(0)}})$$

και με αυτό τον τρόπο το $(X, \mathcal{O}_X)$ αποκτά δομή σχήματος.

III.8 Μορφισμοί Σχημάτων

III.8.1 Στοιχειώδεις ιδιότητες σχημάτων

Έστω M ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος γράφεται στη μορφή $M = U_1 \cup U_2$ με U_1, U_2 ανοιχτά και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Αν για κάθε τέτοια γραφή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $U_1 = \emptyset$ ή $U_2 = \emptyset$ (και συνεπώς $U_2 = M$ ή $U_1 = M$), τότε θα λέμε ότι ο M είναι συνεκτικός.

Αν $M = F_1 \cup F_2$ με F_1, F_2 δύο μη κενά κλειστά σύνολα, τότε θα λέμε ότι ο M είναι μη ανάγωγος. Στην αντίθετη περίπτωση, ο M θα λέγεται ανάγωγος τοπολογικός χώρος.

Ορισμός III.8.1. *Ένα σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται συνεκτικό, αν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός. Θα λέγεται ανάγωγο, αν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος είναι ανάγωγος. Επιπλέον, το σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται ανηγμένο (reduced), αν για κάθε ανοιχτό $U \subset X$ ο δακτύλιος $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία.*

Παρατήρηση III.8.2. *Ένα σχήμα είναι ανηγμένο αν και μόνο αν κάθε δακτύλιος φύτρων δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία.*

Ορισμός III.8.3. *Ένα σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται ακέραιο αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $U \subset X$ ο δακτύλιος $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ είναι ακέραια περιοχή.*

Παράδειγμα III.8.4. *Αν ο δακτύλιος A είναι ισόμορφος με το ευθύ γινόμενο των μη μηδενικών δακτυλίων A_1, A_2, δηλαδή $A \cong A_1 \times A_2$, τότε το $\mathrm{Spec}A$ δεν είναι συνεκτικό. Ας υποθέσουμε ότι $A = A_1 \times A_2$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας. Έστω $1_{A_1}, 1_2$ οι μονάδες των δακτυλίων A_1, A_2. Θέτουμε $e_1 = (1_{A_1}, 0)$ και $e_2 = (0, 1_{A_2})$. Τότε η μονάδα του A μπορεί να γραφεί ως*

$$1 = e_1 + e_2 \text{ και } e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 e_2 = 0.$$

Για ένα πρώτο ιδεώδες P του A έχουμε $e_1 e_2 = 0 \in P$, συνεπώς $e_1 \in P$ ή $e_2 \in P$, αλλά όχι και τα δύο. Έστω ότι $e_2 \in P$. Τότε το $0 \times A_2 \subset P$. Θεωρούμε τις προβολές $p_1, p_2 : A_1 \times A_2$ στα σύνολα A_1, A_2 οι οποίες είναι ομομορφισμοί δακτυλίων. Θέτουμε $P_1 = p_1(P)$. Για $a_1, b_1 \in A_1$ υποθέτουμε ότι $a_1 b_1 \in P_1$. Τότε μπορούμε να βρούμε $c_2 \in A_2$ ώστε $(a_1 b_1, c_2) \in P$. Θέτουμε $a = (a_1, c_2)$ και $b = (b_1, 1_{A_2})$. Έχουμε $ab \in P$, συνεπώς $a \in P$ ή $b \in P$. Άρα $a_1 \in P_1$ ή $b_1 \in P_1$. Δηλαδή το P_1 είναι πρώτο ιδεώδες. Επίσης, $p_1^{-1}(P_1) = P$. Για το τελευταίο είναι σαφές ότι $p_1^{-1}(P_1) \supset P$. Όμως αν $a_1 \in P_1$, τότε $(a_1, a_2) \in P$ για κάποιο $a_2 \in A_2$. Επίσης, $0 \times A_2 \subset P$ οπότε για τυχαίο $b_2 \in A_2$ έχουμε $(a_1, b_2) = (a_1, a_2) + (0, b_2 - a_2) \in P$. Άρα $p_1^{-1}(P) \subset P$. Ειδικότερα το $e_1 \notin P$.

Στην περίπτωση που $e_1 \in P$ μπορούμε να δείξουμε ότι $P_2 = p_2(P)$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του A_2 και ότι $P = p_2^{-1}(P_2)$. Σε αυτή την περίπτωση $e_2 \notin P$. Άρα

$$\mathrm{Spec}A = D(e_1) \cup D(e_2), \quad D(e_1) \cap D(e_2) = \emptyset,$$

δηλαδή το $\mathrm{Spec}A$ δεν είναι συνεκτικό. Τέλος $D(e_1) \cong \mathrm{Spec}A_1$ και $D(e_2) \cong \mathrm{Spec}A_2$.

Παράδειγμα III.8.5. *Για ένα σώμα k, το $X = \mathrm{Spec}k[x,y]/\langle xy \rangle$ είναι ένα μη-ανάγωγο αφινικό σχήμα. Πράγματι μπορούμε να γράψουμε $X = V(x) \cup V(y)$ με $V(x) \neq X$ και $V(y) \neq X$. Επιπλέον, $V(x) \cong \mathrm{Spec}k[y]$ και $V(y) \cong \mathrm{Spec}k[x]$. Το $V(x) \cap V(y)$ είναι ένα σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο ιδεώδες $\langle x, y \rangle$.*

Παράδειγμα III.8.6. *Για ένα σώμα k, ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος $\mathrm{Spec}k[x]/\langle x^2 \rangle$ αποτελείται από ένα σημείο και είναι ανάγωγος. Όμως το $\mathrm{Spec}k[x]/\langle x^2 \rangle$ δεν είναι reduced, αφού η κλάση του x είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο στον δακτύλιο συναρτήσεων.*

Λήμμα III.8.7. *Ένα αφινικό σχήμα* $X = \mathrm{Spec} A$ *έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Το* X *δεν είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το* A *είναι ισόμορφο με ένα γινόμενο μη-μηδενικών δακτυλίων* A_1, A_2 *και* $A \cong A_1 \times A_2$.

2. *Το* X *είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το ριζικό*
$$\mathcal{N}(A) = \sqrt{0_A} = \{f \in A : f \textit{είναι μηδενοδύναμο ή } 0\}$$
είναι πρώτο ιδεώδες του A.

3. *Το* X *είναι reduced αν και μόνο αν το* $\mathcal{N}(A) = 0_A$

4. *Το* X *είναι ακέραιο αν και μόνο αν το* A *είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη. Για το (1): έχουμε αποδείξει ότι αν $A \cong A_1 \times A_2$, τότε το $\mathrm{Spec} A$ δεν είναι συνεκτικό. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι
$$X = U_1 \cup U_2, \text{ και } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$
Από τον ορισμό του sheaf δομής έχουμε ότι (παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει συνθήκη συμβατότητας στην τομή που είναι κενή)
$$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X),$$
οπότε μπορούμε να θέσουμε $A_1 = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X)$, $A_2 = \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$.

Για το (2): Παρατηρούμε ότι το ριζικό $\mathcal{N}(A)$ περιέχεται σε κάθε πρώτο ιδεώδες του A, δηλαδή $V(\mathcal{N}(A)) = X$. Ας υποθέσουμε ότι $X = V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$ για κάποια ιδεώδη $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ του A. Τότε $X = V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b})$ και επίσης
$$\sqrt{\mathbf{a}} \cap \sqrt{\mathbf{b}} = (\cap_{P \supset \mathbf{a}} P) \cap (\cap_{P \supset \mathbf{b}} P) = \cap_P P = \mathcal{N}(A).$$
Αν το $\mathcal{N}(A)$ είναι πρώτο ιδεώδες, τότε $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathcal{N}(A)$ ή $\mathcal{N}(A) = \sqrt{\mathbf{b}}$ και συνεπώς $X = V(\mathbf{a})$ ή $X = V(\mathbf{b})$, δηλαδή το X είναι ανάγωγο.

Από την άλλη αν το $\mathcal{N}(A)$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες, τότε μπορούμε να βρούμε $a, b \in A$ με $a \notin \mathcal{N}(A)$, $b \notin \mathcal{N}(A)$ και $ab \in \mathcal{N}(A)$. Ας θεωρήσουμε τα ιδεώδη
$$\mathbf{a} = \langle a, \mathcal{N}(A) \rangle \text{ και } \mathbf{b} = \langle b, \mathcal{N}(A) \rangle.$$
Είναι σαφές ότι $V(\mathbf{a}) \neq X$ και $V(\mathbf{b}) \neq X$. Πράγματι $\mathcal{N}(A) \subsetneq \mathbf{a}$ και υπάρχει P με $\mathbf{a} \not\subset P$, αφού αν όλα τα P περιείχαν το $\mathbf{a}$, τότε το $\mathbf{a}$ θα ήταν υποσύνολο της τομής τους, δηλαδή του $\mathcal{N}(A)$. Αφού δε $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathcal{N}(A)$, έχουμε ότι
$$X = V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}),$$
δηλαδή το X είναι μη ανάγωγο.

Για το (3). Αφού το $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία για ένα ανηγμένο σχήμα X έχουμε ότι $\mathcal{N}(A) = 0$. Αντιστρόφως, αν $\mathcal{N}(A) = 0$, τότε το A δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία. Για ένα τυχαίο $f \in A$ ο δακτύλιος A_f δεν έχει επίσης μηδενοδύναμα στοιχεία. Πράγματι αν a/f^s είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο, τότε $a^m f^\ell = 0$ για κάποιο φυσικό αριθμό ℓ. Αν $m < \ell$ πολλαπλασιάζουμε με $a^{\ell - m}$ για να πάρουμε $(af)^\ell = 0$ το οποίο οδηγεί σε $af = 0$. Αν $m > \ell$ πολλαπλασιάζουμε με $f^{m-\ell}$ για να πάρουμε $(af)^m$ το οποίο και πάλι οδηγεί σε $af = 0$. Καταλήγουμε στον υπολογισμό
$$\frac{a}{f^s} = \frac{af}{f^{s+1}} = 0.$$
Εξ ορισμού του sheaf δομής για το τυχαίο ανοιχτό U το $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ δεν έχει επίσης μηδενοδύναμα στοιχεία.

Για το (4). Αν το X είναι ακέραιο, τότε το $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ είναι εξ ορισμού ακέραια περιοχή. Αντιστρόφως, αν το A είναι ακέραια περιοχή, όλοι οι δακτύλιοι $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ περιέχονται στο σώμα πηλίκων $\mathrm{Quot}(A)$ και είναι ακέραιες περιοχές. □

Λήμμα III.8.8. *Αν το X είναι ανάγωγο, τότε κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο του X είναι πυκνό και ανάγωγο.*

Απόδειξη. Έστω V ένα ανοιχτό μη-κενό υποσύνολο του X. Αν $\overline{V}$ είναι η κλειστότητα του V στο X, τότε
$$X = (X - V) \cup \overline{V}.$$
Λόγω αναγωγισιμότητας έχουμε ότι $\overline{V} = X$. Τέλος, το X είναι ανάγωγο, αφού η τομή δύο μη-κενών ανοιχτών υποσυνόλων του V είναι μη κενή, αφού αυτά είναι πυκνά στο X. □

Πρόταση III.8.9. *Ένα σχήμα X είναι ένα ακέραιο σχήμα αν και μόνο το X είναι ανηγμένο και ανάγωγο.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού, ένα ακέραιο σχήμα είναι ανηγμένο. Θα δείξουμε ότι ένα ακέραιο σχήμα είναι επίσης ανάγωγο. Ας υποθέσουμε πως δεν είναι. Τότε υπάρχουν εξ ορισμού κλειστά σύνολα F_1 και F_2 ώστε
$$X = F_1 \cup F_2, \text{ με } F_1 \neq X, F_2 \neq X.$$
Τότε
$$U_1 = X - F_2 = F_1 - F_1 \cap F_2, \qquad U_2 = F_2 - F_1 \cap F_2$$
είναι ανοιχτά σύνολα στο X τα οποία ικανοποιούν $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Συνεπώς για το ανοιχτό σύνολο $U = U_1 \cup U_2$ έχουμε
$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X),$$
δηλαδή το $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ δεν είναι ακέραια περιοχή, άτοπο.

Αντιστρόφως, έστω X ένα ανηγμένο και ανάγωγο σχήμα. Για ένα ανοιχτό σύνολο U υποθέτουμε ότι $fg = 0$ για $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Θέτουμε
$$F_1 = \{x \in U : f(x) = 0\} \text{ και } F_2 = \{x \in U : g(x) = 0\}.$$
Τότε F_1 και F_2 είναι κλειστά σύνολα του U. Πράγματι, για ένα αφινικό σύνολο $V = \mathrm{Spec}R$ που περιέχεται στο U οι εικόνες $\widehat{f}$ και $\widehat{g}$ με τη συνάρτηση περιορισμού ικανοποιούν $F_1 \cap V = V(\widehat{f})$ και $F_2 \cap V = V(\widehat{g})$. Επίσης, αφού $fg = 0$, έχουμε ότι $U = F_1 \cup F_2$. Αφού το U είναι ανάγωγο, σύμφωνα με το λήμμα III.8.8, έχουμε ότι $U = F_1$ ή $U = F_2$.

Ας υποθέσουμε ότι $U = F_1$. Για το παραπάνω αφινικό σύνολο $V \subset U$ έχουμε $V = V(\widehat{f})$. Συνεπώς, από το λήμμα III.2.4 (εφαρμοσμένο για $\emptyset = X_0 \supset X_f$) για $\widehat{f} \neq 0$, το $\widehat{f}$ είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο στο $R = \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$. Αφού το X είναι ανηγμένο, έχουμε ότι $\widehat{f} = 0$. Δηλαδή το f είναι 0 αν περιοριστεί σε οποιοδήποτε αφινικό κάλυμμα του U και από τις ιδιότητες του sheaf έχουμε ότι $f = 0$.

Συνεπώς το $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ είναι ακέραια περιοχή και το X είναι ακέραιο σχήμα. □

Όταν ένα σχήμα X δέχεται μία αφινική κάλυψη
$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \qquad U_i = \mathrm{Spec}R_i \tag{III.8}$$
όπου κάθε R_i είναι δακτύλιος της Noether, τότε το X θα λέγεται τοπικά Noether. Ένα σχήμα που είναι τοπικά Noether και ημισυμπαγές θα λέγεται Noether. Οι παραπάνω ορισμοί εξαρτώνται από την επιλογή της αφινικής κάλυψης. Η επόμενη πρόταση εξασφαλίζει ότι είναι ανεξάρτητες της παραπάνω επιλογής.

Πρόταση III.8.10. *Ένα σχήμα X είναι τοπικά Noether αν και μόνο αν για ένα τυχαίο ανοιχτό $U = \mathrm{Spec}R$, ο R είναι δακτύλιος της Noether. Ειδικότερα το $X = \mathrm{Spec}A$ είναι Noether αν και μόνο αν ο A είναι δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι σαφής. Για την αντίστροφη παρατηρούμε τα εξής: Αν έχουμε έναν δακτύλιο R της Noether και $f \in R$, τότε και ο R_f είναι δακτύλιος της Noether. Τα $D(f)$ με $f \in R$ αποτελούν μία βάση ανοιχτών για τον $\mathrm{Spec}R$. Ας θεωρήσουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα όπως στην εξίσωση (III.8) όπου οι δακτύλιοι R_i είναι δακτύλιοι της Noether. Το ανοιχτό σύνολο $U = \mathrm{Spec}R$ μπορεί να καλυφθεί από φάσματα δακτυλίων της Noether της μορφής $\mathrm{Spec}(R_i)_f$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether. Για

$$X = \mathrm{Spec}R = \bigcup_{j \in J} \mathrm{Spec}A_j$$

όπου όλα τα A_j είναι δακτύλιοι της Noether θα πρέπει να δείξουμε ότι και το R είναι δακτύλιος της Noether.

Αφού το $\mathrm{Spec}A_j$ είναι ένα ανοιχτό του $\mathrm{Spec}R$ μπορεί να καλυφθεί από ανοιχτά σύνολα της μορφής $D(f)$ με $f \in R$. Για ένα $D(f) \subset \mathrm{Spec}A_j$, έστω f_j η εικόνα του f υπό τη συνάρτηση περιορισμού

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(\mathrm{Spec}A_j, \mathcal{O}_X) = A_j.$$

Έχουμε $R_f \cong (A_j)_{f_j}$, αφού

$$D(f) = \mathrm{Spec}R_f = \mathrm{Spec}(A_j)_{f_j}.$$

Αφού ο A_j είναι δακτύλιος της Noether ο R_f είναι και αυτός δακτύλιος της Noether. Επιπλέον, επειδή ο X είναι ημισυμπαγής, ο X καλύπτεται από ένα πεπερασμένο πλήθος $D(f_k)$, $f_k \in R$.

Συνεπώς για να αποδείξουμε ότι ο R είναι Noether, μπορούμε να διαλέξουμε $f_1, \ldots, f_n \in R$ ώστε $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = R$ και $R_{f_k}, k = 1, \ldots, n$ είναι δακτύλιοι της Noether.

Θα συμβολίζουμε με ϕ_k τον κανονικό ομομορφισμό $\phi_k : R \to R_{f_k}$. Για ένα τυχαίο ιδεώδες $\mathbf{a} \triangleleft R$ θα δείξουμε ότι

$$\mathbf{a} = \cup_{k=1}^{n} \phi_k^{-1}(\phi_k(\mathbf{a})R_{f_k}). \tag{III.9}$$

Είναι σαφές ότι το $\mathbf{a}$ περιέχεται στο δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης. Αντιστρόφως, για ένα στοιχείο a στο δεξί μέρος μπορούμε να βρούμε $a_k \in \mathbf{a}$ και $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\phi_k(a) = \frac{a_k}{f_k^{m_k}}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Συνεπώς, υπάρχει ακέραιος $\ell_k \geqslant 0$ ώστε

$$f_k^{\ell_k}(f_k^{m_k} a - a_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε

$$f_k^{\ell_k + m_k} a = f_k^{\ell_k} a_k \in \mathbf{a}.$$

Έστω $N = \max_{k=1,\ldots,n}(\ell_k + m_k)$. Τότε $f_k^N a \in \mathbf{a}$ για $k = 1, \ldots, n$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle = R$, η N-οστή δύναμη του $1 = \sum b_j f_j$ γίνεται

$$1 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k^N, \text{ με } c_k \in R,$$

από όπου έχουμε ότι

$$a = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k^N a \in \mathbf{a}$$

δηλαδή στην εξίσωση (III.9) ισχύει η ισότητα.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία ακολουθία ιδεωδών του R

$$\mathbf{a}_1 \subset \mathbf{a}_2 \subset \cdots \mathbf{a}_\ell \subset \mathbf{a}_{\ell+1} \subset \cdots \tag{III.10}$$

Αφού οι δακτύλιοι R_{f_k} είναι δακτύλιοι της Noether για κάθε $k = 1, \dots, n$ υπάρχει $m_k \geqslant N$ ώστε

$$\phi_k(\mathbf{a}_1)R_{f_k} \subset \phi_k(\mathbf{a}_2)R_{f_k} \subset \cdots \phi_k(\mathbf{a}_{m_k})R_{f_k} = \phi_k(\mathbf{a}_{m_{k+1}})R_{f_k} = \cdots$$

Αν m είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα m_k, τότε η εξίσωση (III.9) δίνει ότι και η ακολουθία (III.10) γίνεται σταθερή μετά το m. □

Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται της Noether, αν κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_\ell \supset F_{\ell+1} \supset$$

γίνεται τελικά σταθερή.

Ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος ένος σχήματος της Noether είναι ένας τοπολογικός χώρος της Noether. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος ένος σχήματος είναι της Noether, μπορεί το σχήμα να μην είναι της Noether.

Για παράδειγμα, στον πολυωνυμικό δακτύλιο $R = A[x_1, x_2, \dots,]$ άπειρων μεταβλητών ας θεωρήσουμε το ιδεώδες J το οποίο παράγεται από όλα τα μονώνυμα $x_i x_j$ βαθμού 2. Ο δακτύλιος R/J δεν είναι δακτύλιος της Noether, γιατί είναι απείρως παραγόμενος υπέρ τον A. Όμως στο πηλίκο τα x_j είναι μηδενοδύναμα και έχουμε $\mathrm{Spec}R = \mathrm{Spec}A$.

III.9 Ιδιότητες μορφισμών

Ορισμός III.9.1.
- *Έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων και έστω $U_i = \mathrm{Spec}A_i$, $i \in I$ ένα αφινικό κάλυμμα του Y. Αν κάθε $f^{-1}(U_i)$ έχει ένα αφινικό κάλυμμα $V_{ij} = \mathrm{Spec}A_{ij}$ με $j \in J_i$ ώστε τα A_{ij} να είναι πεπερασμένα παραγώμενες A_i-άλγεβρες, τότε το f θα λέγεται τοπικά πεπερασμένου τύπου.*

- *Επιπλέον, η f θα λέγεται πεπερασμένου τύπου, αν το $f^{-1}(U_i)$ καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος αφινικά σύνολα $V_{ij} = \mathrm{Spec}A_{ij}$ $j \in J_i$, όπου κάθε J_i είναι πεπερασμένο σύνολο και η A_{ij} είναι πεπερασμένα παραγόμενη A_i-άλγεβρα.*

- *Ένας μορφισμός $f : X \to Y$ θα λέγεται πεπερασμένος μορφισμός αν ικανοποιείται η ισχυρότερη συνθήκη. Υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathrm{Spec}A_i$, $i \in I$ του Y ώστε κάθε $f^{-1}(U_i)$ να είναι ένα αφινικό σύνολο $\mathrm{Spec}B_i$ και κάθε B_i να είναι πεπερασμένα παραγόμενο A_i-module. Σε αυτή την περίπτωση, το B_i είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενη A_i-άλγεβρα. Εξ ορισμού ένας πεπερασμένος μορφισμός είναι μορφισμός πεπερασμένου τύπου, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.*

Παράδειγμα III.9.2. *Ας θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο $f(x, y) \in k[x, y]$.*

$$f(x, y) = y^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m) \text{ με } a_j \in k \text{ για } j = 1, \dots, m.$$

Ο κανονικός μονομορφισμός

$$k[x] \to k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle \tag{III.11}$$

επάγει έναν μορφισμό σχημάτων

$$\phi : X = \mathrm{Spec}k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle \to \mathrm{Spec}k[x].$$

Η συνάρτηση στην (III.11) επάγει μια πεπερασμένα παραγόμενη $k[x]$-module δομή στο $k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle$. Πράγματι, θέτοντας ως $\overline{y}$ την κλάση του y στον δακτύλιο $k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle$ ως $k[x]$-module έχουμε

$$k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle = k[x] \oplus k[x]\overline{y}.$$

Συνεπώς ο ϕ είναι πεπερασμένος μορφισμός. Επιπλέον, τα X, Y είναι πεπερασμένου τύπου υπέρ το k.

Παράδειγμα III.9.3. *Ας θεωρήσουμε το παρακάτω πολυώνυμο* $g(x,y) \in k[x,y]$*:*

$$g(x,y) = xy^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m) \text{ με } a_j \in k \text{ για } j = 1, \ldots, m.$$

Ο κανονικός μονομορφισμός

$$k[x] \to k[x,y]/\langle g(x,y)\rangle = R \tag{III.12}$$

κάνει τον δακτύλιο R *μία πεπερασμένα παραγόμενη* $k[x]$*-άλγεβρα. Όμως ο* R *δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο* $k[x]$*-module. Πράγματι τα* $\overline{y}, \overline{y}^2, \overline{y}^3, \ldots$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το* $k[x]$*. Συνεπώς ο μορφισμός που επάγεται από την (III.12)*

$$\psi : \mathrm{Spec}k[x,y]/\langle g(x,y)\rangle \to Y = \mathrm{Spec}k[x]$$

είναι πεπερασμένου τύπου αλλά όχι πεπερασμένος.

Παράδειγμα III.9.4. *Ο τοπικός δακτύλιος* R_P *σε ένα μέγιστο ιδεώδες* $P = \langle x - a\rangle$ *του πολυωνυμικού δακτυλίου* $R = k[x]$ *υπέρ του σώματος* k *μπορεί να γραφεί ως*

$$R_P = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } f, g \in R, g(a) \neq 0 \right\}.$$

Ο δακτύλιος R_P *δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος ως μία* k*-άλγεβρα. Συνεπώς ο* $\mathrm{Spec}R_P$ *δεν είναι πεπερασμένου τύπου υπέρ το* k.

III.10 Υποσχήματα

Για ένα ανοιχτό σύνολο U του υποκείμενου τοπολογικού χώρου του σχήματος $(X, \mathcal{O}_X)$ μπορούμε να θεωρήσουμε το σχήμα $(U, \mathcal{O}_{X|U})$, το οποίο λέγεται *ανοιχτό υποσχήμα* του X.

Ορισμός III.10.1. *Αν για έναν μορφισμό σχημάτων* $(g, g^{\#}) : Z \to X$ *η συνεχής συνάρτηση* $g : Z \to X$ *των υποκείμενων τοπολογικών χώρων είναι ένας ομοιομορφισμός του* Z *σε ένα ανοιχτό υποσύνολο* $U \subset X$ *(δηλαδή* $g(Z) = U$ *και η αντίστροφη συνάρτηση* $g^{-1} : U \to Z$ *είναι επίσης συνεχής) και ο περιορισμός* $g^{\#}|U : \mathcal{O}_X|U \to g_*\mathcal{O}_Z|U$ *είναι ισομορφισμός, τότε η* ϕ *λέγεται ανοιχτή immersion. Αν η* $\phi : Z \to X$ *είναι μία ανοιχτή immersion, τότε το σχήμα* Z *μπορεί να ταυτιστεί με το ανοιχτό υποσχήμα* $(U, \mathcal{O}_{X|U})$.

Ορισμός III.10.2. *Αν για ένα σχήμα* Y *και έναν μορφισμό* $i = (i, i^{\#}) : Y \to X$*, ο υποκείμενος χώρος* Y *είναι ένας κλειστός υπόχωρος του υποκείμενου χώρου* X *και η συνάρτηση* i *είναι μια embedding και επίσης* $i^{\#} : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ *είναι ένας επιμορφισμός από sheaves, τότε το ζευγάρι* (Y, i) *θα λέγεται ένα κλειστό υποσχήμα του* X*. Στην περίπτωση που ο μορφισμός* i *είναι σαφής, θα λέμε ότι το* Y *είναι κλειστό υποσχήμα. Γενικά ένα υποσχήμα* (Y, i) *του* X *δεν μπορεί να καθοριστεί με μοναδικό τρόπο από τον κλειστό υποκείμενο τοπολογικό χώρο και θα πρέπει επίσης να προσδιοριστεί ο επιμορφισμός* $i^{\#}$.

Στην περίπτωση που ο μορφισμός σχημάτων $f : W \to X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω ενός ισομορφισμού $\theta : W \xrightarrow{\cong} Y$, $f = i \circ \theta$, τότε ο f λέγεται μία κλειστή immersion.

Παράδειγμα III.10.3. *Ένα ιδεώδες* $\mathbf{a} \lhd R$ *καθορίζει ένα κλειστό σύνολο* $V(\mathbf{a})$ *του* $X = \mathrm{Spec}R$*. Το* $V(\mathbf{a})$ *είναι ομοιομορφικό με τον υποκείμενο τοπολογικό χώρο του* $\mathrm{Spec}R/\mathbf{a}$*. Ο φυσικός επιμορφισμός* $R \to R/\mathbf{a}$ *επάγει έναν μορφισμό σχημάτων* $f : Y = \mathrm{Spec}R/\mathbf{a} \to X$*. Η συνάρτηση* f *επάγει τον ομοιομορφισμό από τον υποκείμενο χώρο του* Y *στο κλειστό σύνολο* $V(\mathbf{a})$*. Για ένα τυχαίο πρώτο ιδεώδες* $P \in \mathrm{Spec}R$ *η συνάρτηση* $\mathcal{O}_{X,P} \to (f_*\mathcal{O}_Y)_P$ *είναι η συνάρτηση* $R_P \to (R/\mathbf{a})_P$*, δείτε λήμμα III.4.5.*

Συνεπώς η συνάρτηση μεταξύ των sheaves $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ *είναι επί. Έτσι το* (Y, f) *είναι ένα κλειστό υποσχήμα του* X *και η* $f : Y \to X$ *είναι κλειστή immersion.*

Αν και $V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b})$ *ταυτίζονται ως κλειστά υποσύνολα, στην περίπτωση που* $\sqrt{\mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{b}}$, *τα* $\mathrm{Spec}R/\mathbf{a}$ *και* $\mathrm{Spec}R/\mathbf{b}$ *δεν είναι ισόμορφα εκτός αν* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, *αφού τα δομικά sheaves τους δεν είναι ισόμορφα.*

Μπορεί κάποιος να ορίσει πολλές διαφορετικές δομές υποσχήματος σε ένα κλειστό σύνολο $V(\mathbf{a})$. *Ένα τυπικό παράδειγμα είναι το παρακάτω: Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό από τον πολυωνυμικό δακτύλιο* $k[x]$ *υπέρ του σώματος* k

$$k[x] \to k[x]/\langle x^n \rangle, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζονται κλειστές immersions

$$\mathrm{Spec}k[x]/\langle x^n \rangle \to \mathrm{Spec}k[x].$$

Για κάθε n *ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος του* $\mathrm{Spec}k[x]/\langle x^n \rangle$ *αποτελείται από ένα σημείο.*

III.11 Ασκήσεις

1. Έστω I ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Να αποδειχτεί ότι το
$$N_R := \{f \in R : f^m = 0 \text{ για καποιο } n \in \mathbb{N}\}$$
ταυτίζεται με το $\sqrt{I}$ στην περίπτωση που
$$V(I) = \mathrm{Spec}R.$$

2. Για μια πεπερασμένα παραγόμενη άλγεβρα R πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, θεωρούμε το μέγιστο φάσμα $\mathrm{Spm}R$ εφοδιασμένο με την τοπολογία Zariski. Ως σύνολο, το $\mathrm{Spm}R$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathrm{Spec}R$. Για ένα ιδεώδες J του R, για να διακρίνουμε το κλειστό σύνολο $V(J)$ (αντίστοιχα το ανοιχτό σύνολο $D(J)$ του $\mathrm{Spec}(R)$ θα γράφουμε $V_m(J)$ και αντίστοιχα $D_m(J)$ για το κλειστό και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathrm{Spm}R$.

   Να αποδειχτεί ότι
$$V_m(J) = V(J) \cap \mathrm{Spm}R \text{ και } D_m(J) = D(J) \cap \mathrm{Spm}R$$
   Δείξτε ότι το sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}$ πάνω από $\mathrm{Spm}R$ μπορεί να οριστεί ως
$$\Gamma(D_m(J), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}) = \Gamma(D(J), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}).$$

3. Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ και τον χώρο $\mathbb{A}^n_k = \mathrm{Spec}R$. Αποδείξτε ότι για το ανοιχτό σύνολο $U = \mathbb{A}^n_k - \{0\}$, όπου το 0 είναι η αρχή συντεταγμένων του $\mathbb{A}^n k$, έχουμε
$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}) = R, \text{ για } n \geqslant 2.$$
   Συνεπώς, το U δεν είναι ένα αφινικό ανοιχτό σύνολο.

4. Για ένα sheaf $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X ορίστηκε το stalk του $\mathcal{F}$ στο x ως
$$\mathcal{F}_x = \lim_{\substack{\to \\ x\in U}} \mathcal{F}(U).$$
   Στο σύνολο
$$\mathbb{F} = \prod_{x\in X} \mathcal{F}_x$$
   ορίζεται μια τοπολογία ως εξής. Ένα στοιχείο $s_x \in \mathcal{F}_x$ είναι εξ ορισμού το φύτρο μιας section $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ στο x, όπου V είναι ένα ανοιχτό που περιέχει το x. Θέτουμε $V(s)$ να είναι το υποσύνολο $\{s_y : y \in V\} \subset \mathbb{F}$. Δείξτε ότι μεταβάλλοντας τα x, s_x και $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ παίρνουμε μια τοπολογία η οποία για βάση ανοιχτών τα σύνολα $\{V(s)\}$. Θεωρούμε την $p : \mathbb{F} \to X$ τη συνάρτηση που στέλνει τα στοιχεία του $\mathcal{F}_x$ στο x. Δείξτε ότι η p είναι συνεχής και τοπικά ομοιομορφισμός, δηλαδή ομοιομορφισμός από το $V(s)$ στο V.

   Το $\mathbb{F}$ θα λέγεται ο sheaf χώρος του $\mathcal{F}$ και η $p : \mathbb{F} \to X$ η συνάρτηση δομής του $\mathbb{F}$. Αποδείξτε τα

   (α΄) Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα sheaf προσθετικών ομάδων οι συναρτήσεις
$$\begin{aligned} a_\pm : \mathbb{F} \times_X \mathbb{F} = \{(ax, b_x) \in \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x : x \in X\} &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ (a_x, b_x) &\longmapsto a_x \pm b_x \end{aligned}$$
   είναι συνεχείς. Η συνάρτηση
$$\begin{aligned} 0 : X &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ x &\longmapsto 0_x \end{aligned}$$

είναι επίσης συνεχής, όπου 0_x είναι το μηδενικό στοιχείο της προσθετικής ομάδας $\mathcal{F}_x$. Αν το $\mathcal{F}$ είναι ένα sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} m : \mathbb{F} \times_X \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ (a_x, b_x) &\longmapsto a_x b_x \end{aligned}$$

είναι επίσης συνεχής.

(β΄) Για ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset X$, θέτουμε

$$\Gamma(U, \mathbb{F}) = \{s : U \to \mathbb{F} : p \circ s = \mathrm{Id}_U, \text{ όπου } s \text{ συνεχής}\}.$$

Δείξτε ότι $\Gamma(U, \mathbb{F}) = \mathcal{U}$.

5. Για ένα presheaf $\mathcal{G}$ υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου X ορίζουμε το stalk του $\mathcal{G}$ στο x,

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U).$$

Ορίζουμε μια τοπολογία στο

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \prod_{x \in X} \mathcal{G}_x.$$

Ορίζουμε

$$\widetilde{\mathcal{G}}(U) = \{s : U \to \widetilde{\mathbb{G}} : p \circ s = \mathrm{Id}_U, s \text{ συνεχής}\}.$$

Δείξτε ότι το $\widetilde{\mathcal{G}}$ είναι ένα sheaf υπεράνω του X. Δείξτε ότι η φυσική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(U), \\ t &\longmapsto \{U \ni y \mapsto t_y\}, \end{aligned}$$

είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων ή αντιμεταθετικών δακτυλίων. Το $\widetilde{\mathcal{G}}$ θα λέγεται η sheafification του $\widetilde{\mathcal{G}}$. Δείξτε ότι ο sheaf χώρος $\widetilde{\mathcal{G}}$ είναι ομοιομορφισμός με το $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Βιβλιογραφία

[1] Eisenbud, D. & Harris, J. *Schemes*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. The language of modern algebraic geometry. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992, pp. xii+157. ISBN: 0-534-17606-2; 0-534-17604-6.

[2] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[3] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*. expanded. Vol. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. x+306. ISBN: 3-540-63293-X. URL: `https://doi.org/10.1007/b62130`.

[4] Ueno, K. *Algebraic geometry. 1*. Vol. 185. Translations of Mathematical Monographs. From algebraic varieties to schemes, Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: `https://doi.org/10.1090/mmono/185`.

[5] Vakil, R. *The rising sea*. 2017, p. 775.

IV

Κατηγορίες και Σχήματα

IV.1 Κατηγορίες

Μία κατηγορία αποτελείται από μαθηματικά αντικείμενα και μορφισμούς μεταξύ αυτών.

Ορισμός IV.1.1. *Μια συλλογή $\mathcal{C}$ θα λέγεται κατηγορία αν τα αντικείμενά της και οι μορφισμοί της ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:*

1. *Όλα τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ είναι καθορισμένα.*
2. *Για κάθε δύο αντικείμενα $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ το σύνολο $\mathrm{Hom}(A, B)$ είναι καθορισμένο. Ένα στοιχείο $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ θα λέγεται μορφισμός από το A στο B.*
3. *Για κάθε τριάδα $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και κάθε μορφισμούς $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ και $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ ορίζεται η σύνθεση $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$. Η σύνθεση είναι προσεταιριστική, δηλαδή για $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ και $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$ έχουμε*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
4. *Για κάθε τυχαίο $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ υπάρχει ο ταυτοτικός μορφισμός $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ ώστε*
$$f \circ \mathrm{Id}_A = f \text{ και } \mathrm{Id}_B \circ f = f.$$

Παράδειγμα IV.1.2. *Η κατηγορία (Set) των συνόλων έχει ως αντικείμενα τα σύνολα και ως συναρτήσεις της συναρτήσεις των συνόλων.*

Παράδειγμα IV.1.3. *Η κατηγορία των δακτυλίων (Ring) των αντιμεταθετικών δακτυλίων έχει ως αντικείμενα τους αντιμεταθετικούς δακτυλίους με μονάδα, ενώ για δύο αντιμεταθετικούς δακτυλίους $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ring})$, το σύνολο $\mathrm{Hom}(A, B)$ αποτελείται από όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων ανάμεσα στα A, B.*

Παράδειγμα IV.1.4. *Για έναν δακτύλιο R θεωρούμε την κατηγορία $(R - \mathrm{mod})$ των R-modules, η οποία έχει ως αντικείμενα όλα τα R-modules. Με $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ θα συμβολίζουμε τους ομομορφισμούς από R-modules ανάμεσα στα R-modules A, B.*

Πολλές κατηγορίες μπορούν να οριστούν με παρόμοιο τρόπο, όπως η κατηγορία των ομάδων, των σχημάτων κτλ.

Πολύ συχνά ένα αντικείμενο ανήκει σε δύο κατηγορίες, για παράδειγμα ένα R-module ανήκει στην κατηγορία των R-modules, αλλά και στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων αλλά και στην κατηγορία των συνόλων. Όταν δεν είναι σαφές σε ποια κατηγορία λαμβάνουμε τους μορφισμούς, θα την δηλώνουμε με έναν δείκτη. Έτσι ανάμεσα σε δύο R-modules έχουμε τα

$$\mathrm{Hom}_{(R-\mathrm{Mod})}(A, B) \subsetneq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Groups})}(A, B) \subsetneq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Set})}(A, B).$$

Ένας μορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ ώστε $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ και $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

Σε μία κατηγορία τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

θα λέγονται αντιμεταθετικά, αν αντίστοιχα $v \circ f = g \circ u$ και $g \circ f = h$.

IV.2 Συναρτητές

Ορισμός IV.2.1. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Μία συνάρτηση*

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

και

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \tag{IV.1}$$

θα λέγεται συναλλοίωτος (covariant) συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1. *Για κάθε $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$.*
2. *Για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ και $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$,*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Έναν τέτοιο συναρτητή θα τον συμβολίζουμε με $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Παρόμοια αν αντί για την εξίσωση (IV.1) έχουμε την

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

και αντί για την συνθήκη (2) ισχύει η συνθήκη (2')

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g),$$

, τότε ο συναρτητής θα λέγεται ανταλλοίωτος (contravariant).

Για μία κατηγορία $\mathcal{C}$ ορίζουμε τη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^0$ η οποία έχει $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^0)$ και

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Επίσης, αν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, Y)$ και $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, τότε $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(Z, X)$ ορίζεται ως $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Με αυτό τον, τρόπο η $\mathcal{C}^0$ είναι μία κατηγορία. Επίσης, ένας contravariant συναρτητής από την $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας covariant συναρτητής από την $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}$.

Μπορούμε να ορίζουμε τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, ο οποίος ορίζεται ως $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ για κάθε $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Ένας covariant συναρτητής θα λέγεται απλά συναρτητής.

Έστω ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Τότε για κάθε $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και κάθε $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ορίζεται ο

$$\begin{aligned} (G \circ F) : \mathcal{C} &\to \mathcal{E} \\ X &\mapsto (G \circ F)(X) = G(F(X)) \\ f &\mapsto (G \circ F)(f) = G(F(f)) \end{aligned}$$

Ο $G \circ F$ είναι συναρτητής $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Έχουμε ότι

$$F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = F \text{ και } \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F = F.$$

Αν F, G είναι ο ένας covariant και ο άλλος contravariant, τότε η σύνθεση είναι contravariant, ενώ αν και οι δύο είναι contravariant, τότε η σύνθεση είναι covariant.

Ένας μορφισμός μεταξύ συναρτητών (natural transformation) από τον F και G η δίνεται από μια οικογένεια συναρτήσεων

$$\eta(C) : F(C) \to G(C) \text{ για } C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$

και για έναν τυχαίο μορφισμό $C \to C' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ από μια οικογένεια μεταθετικών διαγραμμάτων

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(C)"'] & F(C') \arrow[d, "\eta(C')"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

Στην περίπτωση που ο $\eta(C)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ θα λέμε ότι ο η είναι ισομορφισμός και θα γράφουμε $\eta : F \xrightarrow{\cong} G$.

Αν για έναν συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ υπάρχει ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ώστε

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \text{ και } F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}},$$

, τότε οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ θα λέγονται ισοδύναμες. Στην περίπτωση που ο F είναι contravariant, οι ακολουθίες θα λέγονται συνισοδύναμες.

Θεώρημα IV.2.2. *Θεωρούμε τον contravariant συναρτητή F από την κατηγορία των αντιμεταθετικών δακτυλίων στην κατηγορία των αφινικών σχημάτων που δίνεται με*

$$F(R) = (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$$

και

$$F(\phi) = \phi^a : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}S$$

για ένα $R \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ring})$ και έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : R \to S$. Τότε ο F ορίζει μία ισοδυναμία κατηγοριών ανάμεσα στις κατηγορίες (Ring) και $(\mathrm{Aff.Sch})$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε έναν contravariant συναρτητή G από την κατηγορία των αφινικών σχημάτων στην κατηγορία των δακτυλίων ως εξής:

$$G\big((X, \mathcal{O}_X)\big) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

και για έναν μορφισμό $(f, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$

$$G\big(f, \theta\big) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y, f_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Από τους ορισμούς των αφινικών σχημάτων και των μορφισμών μεταξύ τους έχουμε ότι:

$$G(F(R)) = \Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) = R,$$

και για έναν μορφισμό $\phi : R \to S$

$$G(F(\phi)) : \Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) = R \to S = \Gamma(\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S})$$

ταυτίζεται με το ϕ από τον ορισμό του $\phi^{\#}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \to \phi^{a}_{*}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S}$. Συνεπώς

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{(\mathrm{Ring})}.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $F \circ G = \mathrm{Id}_{(\mathrm{Aff.Sch})}$. Θεωρούμε έναν μορφισμό $(f, \theta) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$. Ο μορφισμός μεταξύ sheaves

$$\theta : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \to f_*\mathcal{O}_Z$$

επάγει έναν μορφισμό δακτυλίων

$$\phi : R = \Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) \to \Gamma(\mathrm{Spec}R, f_*\mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z). \tag{IV.2}$$

Για ένα τυχαίο σημείο $z \in Z$ έχουμε την κανονική συνάρτηση

$$\nu_z : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \to \mathcal{O}_{Z,z}.$$

Η παρακάτω πρόταση εξασφαλίζει ότι $F \circ G = \mathrm{Id}_{(\mathrm{Aff.Sch})}$. □

Πρόταση IV.2.3. *Για έναν μορφισμό* $(f, \theta) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$, *έχουμε* $f(z) = \phi_z^{-1}(\mathfrak{m}_z)$, $z \in Z$, *όπου το* $\mathfrak{m}_z$ *είναι το μέγιστο ιδεώδες του* $\mathcal{O}_{Z,z}$, *ικανοποιεί* $\phi_z = \nu_z \circ \phi$. *Επίσης,*

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})}(Z, \mathrm{Spec}R) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ring})}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)). \tag{IV.3}$$

Απόδειξη. Έστω $f(z) = P \in \mathrm{Spec}R$. Τότε ο ομομορφισμός που επάγεται από τον ομομορφισμό των sheaves θ

$$\theta_P := R_P = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R,P} \to \mathcal{O}_{Z,z}$$

είναι τοπικός, δηλαδή $\theta_P(PR_P) \subset \mathfrak{m}_z$. Συνεπώς $\theta_P^{-1}(\mathfrak{m}_z) = PR_P$. Αν θεωρήσουμε την κανονική εμφύτευση εντοπισμού

$$\psi : R \to R_P,$$

τότε ο ομομορφισμός δακτυλίων $\theta_P \circ \psi : R \to \mathcal{O}_{Z,z}$, ταυτίζεται με τον ϕ_z. Αφού $\psi^{-1}(PR_P) = P$, έχουμε ότι $\phi_z^{-1}(\mathfrak{m}) = P$, το οποίο αποδεικνύει το πρώτο κομμάτι της πρότασης.

Για $(f, \theta) \in \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})}(Z, \mathrm{Spec}R)$, ο ομομορφισμός των sheaves θ επάγει ομομορφισμό δακτυλίων

$$\phi : R \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z).$$

Αντιστρόφως, για έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\psi : R \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z),$$

έστω ψ_z η σύνθεση $\nu_z \circ \psi$, όπου για $z \in Z$, με ν_z συμβολίζουμε τον κανονικά επαγώμενο ομομορφισμό δακτυλίων:

$$\nu_z : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \to \mathcal{O}_{Z,z}.$$

Για το μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_z \lhd \mathcal{O}_{Z,z}$, το $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_z)$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R. Με αυτό τον τρόπο, ορίζεται μια συνάρτηση

$$\begin{aligned} f : Z &\to \mathrm{Spec}R \\ z &\mapsto \psi_z^{-1}(\mathfrak{m}_z). \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι μία συνεχής συνάρτηση. Έστω $X = \mathrm{Spec}R$. Αρκεί να δείξουμε ότι για $g \in R$, το $f^{-1}(X_g)$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο Z. Εξ ορισμού του f έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(X_g) &= \{z \in Z : \nu_z(\psi(g)) \notin \mathfrak{m}_z\} \\ &= \{z \in Z : \nu_z(\psi(g) \text{ είναι αντιστρέψιμο στο } \mathcal{O}_{Z,z}\} \\ &= \{z \in Z : \psi(g)(z) \neq 0\} \end{aligned}$$

και η τελευταία ισότητα δίνει ότι $f^{-1}(X_g)$ είναι ανοιχτό. Ο μορφισμός δακτυλίων που δίνεται από τον ορισμό του sheaf

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathcal{O}_Z)$$

παραγοντοποιείται μέσω του

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathcal{O}_Z) \\ & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_{\psi(g)} \arrow[ur, "\overline{\rho}_g"'] & \end{tikzcd}$$

από την universal property του εντοπισμού. Ο ομομορφισμός $\psi : R \to R_P$ επάγει

$$\psi_g : R_g \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_{\psi(g)}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη σύνθεση

$$\theta_g = \overline{\rho}_g \circ \psi_g : R_g \to \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathcal{O}_Z).$$

Επιλέγοντας διαφορετικά $g \in R_P$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό από sheaves

$$\theta_g : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \to \mathcal{O}_Z$$

από τον θ_g. Συγκεκριμένα έχουμε έναν μορφισμό

$$(f, \theta) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}).$$

Αν ο ομομορφισμός δακτυλίων $\psi : R \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ κατασκευάζεται από ένα μορφισμό σχημάτων $(\overline{f}, \overline{\theta}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$, κατασκευάζουμε τον (f, θ) όπως παραπάνω. Στη συνέχεια φτιάχνουμε τον $\phi : R \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ από τον (f, θ) μέσω την εξίσωσης (IV.2). Καταλήγουμε στην $\phi = \psi$ και συνεπώς στην (IV.3). □

Παράδειγμα IV.2.4. *Για έναν τοπολογικό χώρο* X *ορίζουμε την κατηγορία* $\mathrm{Top}(X)$ *ως εξής. Τα* $\mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(X))$ *είναι τα ανοιχτά υποσύνολα του* X*. Για* $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(X))$ *ορίζουμε*

$$\mathrm{Hom}(U, V) = \begin{cases} i_{V,U} : U \hookrightarrow V, & \text{αν } U \subset V \\ \emptyset & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ένα presheaf αβελιανών ομάδων είναι ένας contravariant συναρτητής $G : \mathrm{Top}(X) \to (\mathrm{Mod})$*. Για κάθε ανοιχτό* $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Top}(X))$ *αντιστοιχεί μία προσθετική ομάδα* $G(U)$ *ώστε για* $U \subset V$ *να επάγεται ένας ομομορφισμός*

$$\rho_{V,U} = G(i_{V,U}) : G(V) \to G(U).$$

Ένας μορφισμός μεταξύ sheaves, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας μορφισμός (natural transformation) μεταξύ συναρτητών.

IV.3 Σημεία με τιμές σε σχήματα

Θα ορίζουμε την έννοια του σημείου με διαφορετικό τρόπο.

Ορισμός IV.3.1. *Για ένα σχήμα X, ένας μορφισμός $S \to X$ θα λέγεται ένα σημείο με τιμές στο S (S-valued point). Στην περίπτωση που το $S = \mathrm{Spec}R$ ένας τέτοιος μορφισμός θα λέγεται σημείο με τιμές στον δακτύλιο R. Αν δε ο R είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, το σημείο $\mathrm{Spec}k \to X$ θα λέγεται γεωμετρικό σημείο, αντί για σημείο με τιμές στο k.*

Παράδειγμα IV.3.2. *Ας θεωρήσουμε τα πολυώνυμα $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_\ell(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, τον δακτύλιο*

$$A = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_\ell(x_1, \ldots, x_n)\rangle$$

και το αφινικό σχήμα $\mathrm{Spec}A$. Για ένα σώμα k ένα k-valued point

$$\psi : \mathrm{Spec}k \to \mathrm{Spec}A$$

είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη ενός ομομορφισμού δακτυλίων

$$\phi : A \to k$$

που να ικανοποιεί $\psi = \phi^a$. Ένας τέτοιος ομομορφισμός οδηγεί σε ένα μέγιστο ιδεώδες του A, δηλαδή σε σημείο του $\mathrm{Spec}A$. Αν δε $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ είναι οι κλάσεις των x_i modulo του ιδεώδους ορισμού του A και $a_j = \phi(\overline{x}_j)$, τότε το γεγονός ότι ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων οδηγεί στο ότι

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = f_\ell(a_1, \ldots, a_n) = 0. \tag{IV.4}$$

Αντιστρόφως, κάθε λύση $a_1, \ldots, a_n$ του συστήματος (IV.4) οδηγεί στον ορισμό ενός ομομορφισμού $\phi : A \to k$ με $\phi(\overline{x}_j) = a_j$ και με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένα scheme valued point $\phi^a : \mathrm{Spec}k \to \mathrm{Spec}A$.

Το επιχείρημα του παραδείγματος IV.3.2 μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που το σώμα συντελεστών δεν είναι το k, αλλά ένα υπόσωμα του $L \subset k$. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμς να έχουμε L-valued points στο αφινικό σχήμα

$$\mathrm{Spec}A, A = L[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_\ell\rangle.$$

Η εμφύτευση του σώματος $L \hookrightarrow k$ δεν είναι μοναδική. Άρα αν θέλουμε να μιλήσουμε για k-valued points θα πρέπει να διαλέξουμε μία εμφύτευση $L \hookrightarrow k$ του L στο k. Όπως και πριν, ένα γεωμετρικό σημείο περιγράφεται από έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : A \to k$, ο οποίος αυτομάτως δίνει και την εμφύτευση.

Παράδειγμα IV.3.3. *Έστω $f(x, y)$ ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών με συντελεστές σε ένα σώμα k. Θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$A = k[x, y]/\langle f(x, y)\rangle.$$

Επίσης, θεωρούμε τον δακτύλιο των n-τάξης απειροστών

$$R_n[t] = k[t]/\langle t^{n+1}\rangle.$$

Ένας μορφισμός σχημάτων

$$\phi_n : \mathrm{Spec}R_n \to \mathrm{Spec}A,$$

δηλαδή ένα R_n-valued point του $\mathrm{Spec}A$, καθορίζεται πλήρως από έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\psi_n : A \to R_n.$$

Ας θεωρήσουμε τις κλάσεις $\overline{x}, \overline{y}$ *των* x, y *στο* A. *Έστω* $g_n(t), h_n(t) \in k[t]$ *ορισμένα από*

$$\psi_n(\overline{x}) = g_n(t) \mod t^{n+1}$$
$$\psi_n(\overline{y}) = h_n(t) \mod t^{n+1}$$

Ο μορφισμός ψ_n *καθορίζεται μοναδικά από την επιλογή των* $g_n(t)$ *και* $h_n(t)$, *όμως για να είναι ομομορφισμός δακτυλίων, θα πρέπει τα* $g_n(t)$ *και* $h_n(t)$ *να ικανοποιούν την*

$$f(g_n(t), h_n(t)) = 0 \mod t^{n+1}. \tag{IV.5}$$

Αντιστρόφως, αν τα $g_n(t), h_n(t)$ *ικανοποιούν την εξίσωση (IV.5), τότε ο* ψ *γίνεται ομομορφισμός δακτυλίων. Μπορούμε δε να υποθέσουμε ότι τα* $g_n(t)$ *και* $h_n(t)$ *είναι πολυώνυμα με συντελεστές στο* k *βαθμού* $\leqslant n$. *Δηλαδή υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα* R_n*-valued points* $\phi_n : \mathrm{Spec}R_n \to \mathrm{Spec}A$ *και στα ζευγάρια* $(g_n(t), h_n(t))$ *πολυωνύμων βαθμού μικρότερου του* n, *που ικανοποιούν την εξίσωση (IV.5).*

Η κανονική συνάρτηση

$$\psi_{n,n+1} : R_{n+1} \to R_n$$

επάγει έναν μορφισμό σχημάτων

$$\phi_{n,n+1} : \mathrm{Spec}R_n \to \mathrm{Spec}R_{n+1}.$$

Για κάθε R_{n+1}*-valued point* $\phi_{n+1} : \mathrm{Spec}R_{n+1} \to \mathrm{Spec}A$, *έχουμε ένα* R_n*-valued point* $\phi_n = \phi_{n,n+1} \circ \phi_n$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}R_{n+1} \arrow[dr, "\phi_{n+1}"] & \\ \mathrm{Spec}R_n \arrow[u, "\phi_{n,n+1}"] \arrow[r, "\phi_n"'] & \mathrm{Spec}A \end{tikzcd}$$

Για $\phi_n : \mathrm{Spec}R_n \to \mathrm{Spec}A$, *ένας μορφισμός* ϕ_{n+1} *που να επάγει τον* ϕ_n *μέσω της* $\phi_{n,n+1}$ *όπως προηγουμένως, θα λέγεται* R_{n+1}*-valued point πάνω από το* R_n*-valued point* ϕ_n. *Αν αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για κάθε* R_n, $n \in \mathbb{N}$, *τότε μπορούμε να πάρουμε ένα σημείο πάνω από τον δακτύλιο των τυπικών δυναμοσειρών*

$$\phi : A \to k[[t]]$$

η οποία δίνει ένα σημείο

$$f(g(t), h(t)) = 0,$$

όπου $g(t) = \phi(\overline{x}), h(t) = \phi(\overline{y})$ *και* $g(t), h(t) \in k[[t]]$.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο στο σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$, δηλαδή ένα σημείο στον υποκείμενο τοπολογικό χώρο X. Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{m}_x$ το μέγιστο ιδεώδες του τοπικού δακτυλίου φύτρων $\mathcal{O}_{X,x}$. Το σώμα πηλίκο $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x)$, θα λέγεται το σώμα υπολοίπων στο σημείο x.

Ένας μορφισμός από το $(\mathrm{Spec}k(x), k(x))$ στο $(X, \mathcal{O}_X)$ καθορίζεται από έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x).$$

Στο επίπεδο των υποκείμενων τοπολογικών χώρων, το $\mathrm{Spec}k(x)$ είναι ένα απλό σημείο που απεικονίζεται στο $x \in X$. Δηλαδή ένα απλό σημείο είναι ένα $k(x)$-valued point. Για ένα σώμα K, ένα σημείο x του οποίου το σώμα υπολοίπων είναι το σώμα K, θα λέγεται ένα K-ρητό σημείο στο X.

Παράδειγμα IV.3.4. *Η κατηγορία* $\mathcal{C}/Z$. *Για ένα αντικείμενο* Z *σε μία κατηγορία* $\mathcal{C}$ *ορίζουμε την κατηγορία* $\mathcal{C}/Z$ *ως εξής: Ένα αντικείμενο στην* $\mathcal{C}/Z$ *είναι ένα ζευγάρι* (X, p) *όπου* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *και*

$p \in \mathrm{Hom}(X, Z)$. *Το σύνολο* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/Z}\big((X, p), (Y, q)\big)$ *αποτελείται από όλους τους μορφισμούς* h *που κάνουν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd} \tag{IV.6}$$

Το $\mathcal{C}/Z$ *γίνεται κατηγορία. Πολύ συχνά γράφουμε* X *αντί για το ζευγάρι* (X, p), *όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Ο μορφισμός* $p : X \to Z$ *λέγεται ο μορφισμός δομής. Επίσης, γράφουμε*

$$\mathrm{Hom}_Z(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/Z}\big((X, p), (Y, q)\big).$$

Στην περίπτωση που $\mathcal{C} = (\mathrm{Sch})$ *γράφουμε* (Sch/Z) *για την κατηγορία των σχημάτων υπέρ* Z.

Ορισμός IV.3.5. *Ένα αντικείμενο* e *σε μία κατηγορία* $\mathcal{C}$ *θα λέγεται τελικό αντικείμενο, αν* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, e)$ *αποτελείται ακριβώς από ένα στοιχείο. Ένα αντικείμενο θα λέγεται αρχικό αντικείμενο, αν* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e, X)$ *είναι μονοσύνολο.*

Πρόταση IV.3.6. *Στην κατηγορία των δακτυλίων* (Ring) *το* $\mathbb{Z}$ *είναι ένα αρχικό αντικείμενο, ενώ στην κατηγορία* (Sch) *των σχημάτων, το* $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ *είναι ένα τελικό αντικείμενο.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού, οι δακτύλιοί μας είναι αντιμεταθετικοί με μονάδα. Υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $f : \mathbb{Z} \to R$ ώστε $f(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\mathrm{Hom}_{(\mathtt{Ring})}(\mathbb{Z}, R)$. Δηλαδή το $\mathbb{Z}$ είναι αρχικό στοιχείο στην (Ring).

Έχουμε δείξει ότι ένας μορφισμός από το σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ στο $(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}})$ καθορίζεται μοναδικά από τον ομομορφισμό δακτυλίων $\mathbb{Z} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ και συνεπώς υπάρχει μόνο ένας τέτοιος. Έτσι το $(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}})$ είναι τελικό αντικείμενο στο (Sch). □

Για ένα τελικό αντικείμενο $\mathcal{C} = \mathcal{C}/e$. Πράγματι σε κάθε $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα $(X, p) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ενώ κάθε $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ είναι συμβατός με το διάγραμμα της εξίσωσης (IV.6).

Έτσι η κατηγορία (Sch) των σχημάτων και η κατηγορία $(\mathrm{Sch})/\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ ταυτίζονται. Για έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο θα συντομεύουμε τη γραφή γράφοντας $(\mathrm{Sch})/R$, αντί για $(\mathrm{Sch})/\mathrm{Spec}R$ και θα μιλάμε για την κατηγορία των σχημάτων υπέρ ενός δακτυλίου R. Αν το R είναι ένα σώμα k, θα μιλάμε για την κατηγορία των σχημάτων $(\mathrm{Sch})/k$ που ορίζονται υπέρ το k. Στην κατηγορία $(\mathrm{Sch})/R$ για κάθε αντικείμενο X καθορίζεται ένας μορφισμός $f : X \to \mathrm{Spec}R$.

IV.3.1 Εφαπτόμενος χώρος Zariski

Για ένα σημείο $x \in (X, \mathcal{O}_X)$ το $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ θα λέγεται ο Zariski συνεφαπτόμενος χώρος, όπου $\mathfrak{m}_x$ είναι το μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου φύτρων $\mathcal{O}_{X,x}$ στο x. Ο εφαπτόμενος χώρος είναι φυσιολογικά ένα $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-module. Θα συμβολίζουμε τον συνεφαπτόμενο χώρο με T_xX^*. Ο δυϊκός χώρος $T_xX = \mathrm{Hom}_{k(x)}(T_xX^*, k(x))$ θα λέγεται ο εφαπτόμενος χώρος Zariski του X στο x.

Πρόταση IV.3.7. *Υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στους μορφισμούς*

$$\Phi := (\phi, \phi^{\#}) : \left(\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle}\right) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

στην κατηγορία $(\mathrm{Sch})/k$ *των σχημάτων πάνω από το* k *(δηλαδή των* $k[t]/\langle t^2\rangle$*)-valued points) και των εφαπτόμενων διανυσμάτων* $\theta \in T_xX$.

Απόδειξη. Το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& \mathrm{Spec}k &
\end{tikzcd}$$

Ο υποκείμενος χώρος του $\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle$ αποτελείται από ένα σημείο. Έστω x η εικόνα αυτού του σημείου. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικών δακτυλίων:

$$\begin{tikzcd}
k[t]/\langle t^2\rangle & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[ll, "\phi_x^{\#}"'] \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur, "p_x^{\#}"'] &
\end{tikzcd}$$

συνεπώς $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k$, δηλαδή το x είναι ένα ρητό σημείο του X. Πράγματι η συνάρτηση $p_x^{\#}$ εφοδιάζει το $\mathcal{O}_{X,x}$ με τη δομή k-άλγεβρας, οπότε το σώμα $K = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ γίνεται επέκταση του k. Από την άλλη πλευρά, η εικόνα του $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ μέσω του $\phi_x^{\#}$ είναι στο σώμα $k[t]/\langle t\rangle = k$. Το μέγιστο ιδεώδες του $k[t]/\langle t^2\rangle$ είναι το $\langle t\rangle$ και $\phi_x^{\#}(\mathfrak{m}_x) \subset \langle t\rangle$. Δηλαδή έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
k = k[t]/\langle t\rangle & & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \arrow[ll, "\phi_x^{\#}"'] \\
& k \arrow[ul, "\mathrm{Id}"] \arrow[ur, "p_x^{\#}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Αν το K ήταν μια αλγεβρική επέκταση και υπήρχε ένα $\alpha \in K - k$, τότε για το ελάχιστο πολυώνυμο του $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ θα είχαμε ότι

$$0 = \phi_x^{\#}(f(\alpha)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_x^{\#}(\alpha)^i$$

δηλαδή το $\phi_x^{\#}(\alpha)$ θα ήταν ρίζα του f στο k, άτοπο.

Αφού το $\phi_x^{\#}(\mathfrak{m}_x^2)$ γίνεται 0 στο $k[t]/\langle t^2\rangle$, για ένα στοιχείο $a \mod \mathfrak{m}_x^2$ στο $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ μπορούμε να ορίσουμε το $\theta(a)$ ως

$$\theta(a)t = \phi_x^{\#}(a).$$

Αφού ο $\phi_x^{\#}$ είναι k-ομομορφισμός, ο θ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός από το $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$ και $\theta \in T_xX$. Δηλαδή ο μορφισμός σχημάτων $\Phi = (\phi, \phi^{\#})$ καθορίζει με μοναδικό τρόπο το (x, θ).

Αντιστρόφως, θεωρούμε ένα k-ρητό σημείο $x \in X$, και ένα $\theta \in T_xX$. Ο μορφισμός δομής, $(p, p^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}k, k)$ επάγει έναν ομομορφισμό

$$p_x^{\#} : k \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

Η σύνθεση $q_x \circ p_x^{\#}$ με τον κανονικό επιμορφισμό $q_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

Έστω $\overline{a}$ η εικόνα στο $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$ ενός στοιχείου $a \in \mathcal{O}_{X,x}$. Θέτουμε

$$a_0 = p_x^{\#}(q_x(a)), \qquad a_1 = a - a_0.$$

Παρατηρούμε ότι το a_0 δεν είναι κατ'ανάγκη στοιχείο του $\mathfrak{m}_x$, $a_1 \in \mathfrak{m}_x$ και $q_x(a) = q_x(a_0)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}
\psi_x : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2 &\longrightarrow k[t]/\langle t^2\rangle \\
\overline{a} &\longmapsto \psi_x(\overline{a}) = q_x(a_0) + \theta(\overline{a}_1)t \mod \langle t^2\rangle,
\end{aligned}$$

όπου $\overline{a}_1$ είναι η κλάση στο $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ του a_1. Θα δείξουμε ότι το ψ_x είναι ένας k-ομομορφισμός. Για $a, b \in \mathcal{O}_{X,x}$ έχουμε

$$(a+b)_0 = a_0 + b_0 \text{ και } (a+b)_1 = a_1 + b_1$$

Αφού $\theta \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$ έχουμε

$$\psi_x(\overline{a}+\overline{b}) = \psi_x(\overline{a}) + \psi_x(\overline{b}).$$

Επιπλέον

$$(ab)_0 = a_0b_0 \text{ και } (ab)_1 = a_0b_1 + b_0a_1 + a_1b_1.$$

Αφού όμως $a_1b_1 \in \mathfrak{m}_x^2$ στο $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ έχουμε

$$\overline{(ab)_1} = \overline{a_0b_1} + \overline{b_0a_1}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\psi_x(\overline{a})\psi_x(\overline{b}) &= (q_x(a_0) + \theta(\overline{a}_1)t)(q_x(b_0) + \theta(\overline{b}_1t) \mod \langle t^2\rangle \\
&= q_x(a_0)q_x(b_0) + \big(q_x(b_0)\theta(\overline{a}_1) + q_x(a_0)\theta(\overline{b}_1)t\big) \mod \langle t^2\rangle \\
&= q_x(a_0b_0) + \theta(\overline{b_0a_1} + \overline{a_0b_1})t \mod \langle t^2\rangle \\
&= q_x\big((ab)_0 + \theta(ab)_1t \mod \langle t^2\rangle \\
&= \psi_x(\overline{a}\overline{b})\big)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, για $\lambda \in k$, έχουμε $\lambda\overline{a} = \overline{p_x^{\#}(\lambda)a}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\psi_x(\lambda\overline{a}) &= \psi_x(\overline{p_x^{\#}(\lambda)a}) \\
&= \psi_x(\overline{p_x^{\#}(\lambda)})\psi_x(a) \\
&= q_x(p_x^{\#}(\lambda))\psi_x(\overline{a}) = \lambda\psi_x(\overline{a}),
\end{aligned}$$

δηλαδή ο ψ_x είναι ένας k-ομομορφισμός. Συνθέτουμε το ψ_x με τον κανονικό ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$ και ονομάζουμε τη σύνθεση

$$\psi_x^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k[t]/\langle t^2\rangle.$$

Με αυτό τον τρόπο, ορίζεται ένας μορφισμός σχημάτων

$$(\phi, \phi^{\#}) : (\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

ως εξής: Η εικόνα της συνάρτησης ϕ του υποκείμενου χώρου x και ο ομομορφισμός $\phi^{\#} : \mathcal{O}_X \to \phi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}k[t]/\langle t^2\rangle})$ είναι $\phi_x^{\#}$ στο φύτρο υπέρ του x και η μηδενική συνάρτηση στα φύτρα πάνω από άλλα σημεία. Τότε η $(\phi, \phi^{\#})$ είναι ένας μορφισμός υπέρ το k εξ ορισμού. $\square$

IV.4 Αναπαραστάσιμοι Συναρτητές και γινόμενα

IV.4.1 Αναπαραστάσιμοι Συναρτητές

Θα ορίσουμε την έννοια ένος συναρτητή που προκύπτει από ένα αντικείμενο σε μία κατηγορία. Έστω $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ορίζουμε

$$h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W), \text{ όπου } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}).$$

Για έναν μορφισμό $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ και $a \in h_W(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ ορίζουμε

$$h_W(f)(a) = a \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a\circ f"] \arrow[d, "f"'] & W \\ Y \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή

$$h_W(f) \in \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Set})}(h_W(Y), h_W(X))$$

και ο h_W είναι ένας contravariant συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στο (Set).

Με παρόμοιο τρόπο ο

$$h_W^{(0)}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$$

και για $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$$h_W^{(0)}(f)(a) = f \circ a \in \mathrm{Hom}_{(Set)}(h_W^{(0)}(X), h_W^{(0)}(Y))$$

είναι ένας covariant συναρτητής από το $\mathcal{C}$ στο (Set).

Το παρακάτω πρόβλημα εμφανίζεται σε σειρά προβλημάτων των Μαθηματικών: Πότε για έναν δεδομένο contravariant συναρτητή

$$F : \mathcal{C} \to (\mathrm{Set})$$

υπάρχει ένα αντικείμενο $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ώστε ο h_W να είναι ισόμορφος με τον F ως συναρτητές; Δηλαδή για ένα τυχαίο αντικείμενο $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, υπάρχει ένα αντικείμενο W ώστε

$$\phi_X : F(X) \xrightarrow{\cong} h_W(X)$$

να είναι ισομορφισμός συνόλων και για κάθε $f \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F(X_2) \arrow[r, "\phi_{X_2}"] \arrow[d, "F(f)"'] & h_W(X_2) \arrow[d, "h_W(f)"] \\ F(X_1) \arrow[r, "\phi_{X_1}"'] & h_W(X_1) \end{tikzcd}$$

Αν υπάρχει ένα τέτοιο αντικείμενο W, τότε ο ισομορφισμός $\phi_W : F(W) \xrightarrow{\cong} h_W(W)$, δίνει ένα μοναδικό αντικείμενο $\psi \in F(W)$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\phi_W(\psi) = \mathrm{Id}_W \in h_W(W).$$

Θα δείξουμε ότι το (W, ψ) καθορίζει το F και το h_W όταν το F και το h_W είναι ισόμορφες.

Για ένα τυχαίο στοιχείο $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, διαλέγουμε ένα στοιχείο $h \in h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$. Τότε $F(h)(\psi) \in F(X)$. Δηλαδή έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\psi \in F(W) \arrow[r, "\phi_W"] \arrow[d, "F(h)"'] & h_W(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W) \arrow[d, "h_W(h)"] \\
F(h)(\psi) \in F(X) \arrow[r, "\phi_X"] & h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι $h = h_W(h)(\mathrm{Id}_w)$ αφού

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
X \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h_W(h)=h"'] &
\end{tikzcd}$$

Αφού ϕ_X είναι συνολοθεωρητικός ισομορφισμός και $\phi_X\big(F(h)(\psi)\big) = h$, μας δίνει ότι

$$F(X) = \{F(h)(\psi) \text{ όπου το } h \text{ διατρέχει το } h_W(X)\}.$$

Λήμμα IV.4.1. *Αν ένας contravariant συναρτητής* $F : \mathcal{C} \to (\mathrm{Set})$ *είναι αναπαραστάσιμος, τότε το ζευγάρι* (W, ψ) *είναι μονοσήμαντα καθορισμένο μέχρι ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι και το $(\widetilde{W}, \widetilde{\psi})$ επίσης αναπαριστά τον F. Υπάρχουν ισομορφισμοί $\phi : F \to h_W$ και $\widetilde{\phi} : F \to h_{\widetilde{W}}$ που ικανοποιούν $\phi_W(\psi) = \mathrm{Id}_W$ και $\widetilde{\phi}_{\widetilde{W}}(\widetilde{\psi}) = \mathrm{Id}_{\widetilde{W}}$. Τότε οι συνολοθεωρητικοί ισομορφισμοί

$$\phi_{\widetilde{W}} : F(\widetilde{W}) \xrightarrow{\cong} h_W(\widetilde{W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{W}, W), \text{ και } \widetilde{\phi}_W : F(W) \xrightarrow{\cong} h_{\widetilde{W}}(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \widetilde{W})$$

καθορίζουν την

$$\eta = \phi_{\widetilde{W}}(\widetilde{\psi}) : \widetilde{W} \to W, \qquad \widetilde{\eta} = \widetilde{\phi}_W(\psi) : W \to \widetilde{W}.$$

Θα δείξουμε ότι $\eta \circ \widetilde{\eta} = \mathrm{Id}_W$ και $\widetilde{\eta} \circ \eta = \mathrm{Id}_{\widetilde{W}}$ και επίσης ότι $F(\eta)(\psi) = \widetilde{\psi}$ και $F(\widetilde{\eta})(\widetilde{\psi}) = \psi$. Έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\psi \in F(W) \arrow[r, "\phi_W"] \arrow[d, "F(\eta)"'] & h_W(W) \ni \mathrm{Id}_W = \phi_W(\psi) \arrow[d, "h_W(\eta)"] \\
\widetilde{\psi} \in F(\widetilde{W}) \arrow[r, "\phi_{\widetilde{W}}"'] & h_W(\widetilde{W}) \ni \eta = \phi_{\widetilde{W}}(\widetilde{\psi})
\end{tikzcd}$$

όπου $F(\eta)(\psi) = \widetilde{\psi}$. Ο ισομορφισμός $F \cong h_{\widetilde{W}}$ επάγει ότι $F(\widetilde{\eta})(\widetilde{\psi}) = \psi$. Συνεπώς

$$F(\eta \circ \widetilde{\eta})(\psi) = F(\widetilde{h})(F(\eta)(\psi)) = \psi$$

και

$$F(\widetilde{\eta} \circ \eta)(\widetilde{\psi}) = F(\eta)(F(\widetilde{\eta})(\widetilde{\psi})) = \widetilde{\psi}.$$

Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\psi \in F(W) \arrow[r, "\phi_W"] \arrow[d, "F(\eta \circ \widetilde{\eta})"'] & h_W(W) \ni \mathrm{Id}_W = \phi_W(\psi) \arrow[d, "h_W(\eta \circ \widetilde{\eta})"] \\
\psi \in F(W) \arrow[r, "\phi_W"'] & h_W(W) \ni \mathrm{Id}_W = \phi_W(\psi)
\end{tikzcd}$$

που ικανοποιεί ότι

$$h_W(\eta \circ \widetilde{\eta})(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_W,$$

δηλαδή $\eta \circ \widetilde{\eta} = \mathrm{Id}_W$. Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο έχουμε ότι $\widetilde{\eta} \circ \eta = \mathrm{Id}_{\widetilde{W}}$. Δηλαδή (W, ψ) και $(\widetilde{W}, \widetilde{\psi})$ είναι ισόμορφοι. □

IV.5 Γινόμενα

Θα ορίσουμε το γινόμενο $X \times Y$ δύο αντικειμένων X, Y σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ χρησιμοποιώντας έναν αναπαραστάσιμο συναρτητή. Θεωρούμε τον contravariant συναρτητή

$$F : \mathcal{C} \to (\mathrm{Set})$$

ως εξής: Για $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ορίζουμε

$$F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y),$$

όπου το δεξί μέρος είναι ένα συνολοθεωρητικό γινόμενο. Για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_1, Z_2)$, $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_2, X)$ και $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_2, Y)$ ορίζουμε

$$F(f)(a, b) = (f \circ a, f \circ b) \in F(Z_1)$$

όπως στο παρακάτω σχήμα:

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "f\circ a"'] \arrow[ddr, "f\circ b"] & \\
& Z_2 \arrow[dl, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Τότε ο $F(f) \in \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Set})}(F(Z_2), F(Z_1))$. Δηλαδή ο F είναι ένας contravariant συναρτητής. Όταν ο συναρτητής αυτός είναι representable, δηλαδή $F = h_W$ για κάποιο $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, τότε το W θα λέγεται το γινόμενο των X, Y και θα το συμβολίζουμε με $X \times Y$.

Παρατήρηση IV.5.1. *Στην κατηγορία* (Set) *το γινόμεο* $X \times Y$ *υπάρχει και είναι το γνωστό καρτεσιανό γινόμενο των* X, Y*. Πράγματι, το σύνολο των μορφισμών συνόλων*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Z, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Z, Y)$$

αποτελείται από μορφισμούς (f, g), $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ *Ας θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο* $X \times Y$ *εφοδιασμένο με τις φυσικές προβολές* $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$*, τότε για κάθε* Z *και* $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Z, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Z, Y)$ *έχουμε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "{(f,g)}"] \arrow[ddl, "{(f,g)\circ p_1 = f}"'] \arrow[ddr, "{(f,g)\circ p_2 = g}"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο $(f, g) \in F(Z)$ *παραγοντοποιείται μέσω του ομορφισμού* $(f, g) : Z \to X \times Y$.

Πρόταση IV.5.2. *Γενικότερα σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ αν υπάρχει το γινόμενο $X \times Y$, τότε ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα:*
Γ: *Υπάρχουν μορφισμοί*

$$p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X) \text{ και } p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y)$$

ώστε για τυχαίους μορφισμούς

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \text{ και } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$$

υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \times Y)$ *ώστε*

$$f = p_1 \circ h \text{ και } g = p_2 \circ h$$

και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, "f"'] \arrow[ddr, "g"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \tag{IV.7}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Αντιστρόφως, αν το (X, Y) ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα **Γ**, *τότε το $(X \times Y, (p_1, p_2))$ να είναι το γινόμενο των X και Y.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F είναι ισόμορφος με τον συναρτητή $h_{X\times Y}$ όπου

$$F(X \times Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X \times Y)$$

και

$$h_{X\times Y}(X \times Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X \times Y).$$

Συνεπώς υπάρχει ένα ζευγάρι $(p_1, p_2) \in F(X \times Y)$ το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο $\mathrm{id}_{X,Y} \in h_{X\times Y}(X \times Y)$.

Έστω ένα $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ οπότε $(f, g) \in F(Z)$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι $F(Z) \cong h_{X\times Y}(Z)$, υπάρχει ένα μοναδικό $h \in h_{X\times Y}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X\times Y)$ το οποίο αντιστοιχεί στα (f, g). Εφαρμόζουμε τον συναρτητή F και έχουμε $F(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(h_{X\times Y}(X\times Y), h_{X\times Y}(Z))$ το οποίο αντιστοιχεί στο $h_{X\times Y}(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(h_{X\times Y}(X \times Y), h_{X\times Y}(Z))$.

Εξ ορισμού, στο στοιχείο $F(h)\big((p_1, p_2)\big)$ αντιστοιχεί το $h_{X\times Y}(h)(\mathrm{id}_{X\times Y})$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\begin{aligned} F(h)\big((p_1, p_2)\big) &= (p_1 \circ h, p_2 \circ h) \\ h_{X\times Y}(h)(\mathrm{id}_{X\times Y}) &= h. \end{aligned}$$

Αφού (f, g) αντιστοιχεί στο $h \in h_{X\times Y}(Z)$ έχουμε $(f, g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$ και το διάγραμμα στην (IV.7) είναι αντιμεταθετικό.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το $(X \times Y, (p_1, p_2))$ ικανοποιούν την ιδιότητα **Γ**. Για ένα αντικείμενο $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi_Z : h_{X\times Y}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \times Y) &\longrightarrow F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \times \\ h &\longmapsto (p_1 \circ h, p_2 \circ h) \end{aligned}$$

Για $(f,g) \in F(Z)$ από την ιδιότητα **Γ** έχουμε ότι υπάρχει μοναδική $h\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X\times Y)$ ώστε $f = p_1 \circ h$ και $g = p_2 \circ h$. Συνεπώς η ϕ_Z είναι επί. Από την άλλη η μοναδικότητα της h από την ιδιότητα **Γ** εξασφαλίζει το ότι η ϕ_Z είναι 1-1.

Επιπλέον, για $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_1, Z_2)$ έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
h_{X\times Y}(Z_2) \arrow[rrr, "\phi_{Z_2}"] \arrow[ddd, "h_{X\times Y}(a)"'] & & & F(Z_2) \arrow[ddd, "F(a)"] \\
& h \arrow[r] \arrow[d] & (p_1\circ h, p_2\circ h) \arrow[d] & \\
& h\circ a \arrow[r] & (p_1\circ h\circ a, p_2\circ h\circ a) & \\
h_{X\times Y}(Z_1) \arrow[rrr, "\phi_{Z_1}"] & & & F(Z_1)
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς οι συναρτητές $h_{X\times Y}$ kai F είναι ισόμορφοι και ο F είναι αναπαραστάσιμος. $\square$

IV.5.1 Ινώδη γινόμενα

Θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό: Δινόνται μορφισμοί $q_1 : X \to Z$, $q_2 : Y \to Z$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Ορίζουμε τον συναρτητή:

$$G(T) = \{(f,g) :\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y) : q_1 \circ f = q_2 \circ g, T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}.$$

Δηλαδή, για $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, το $G(T)$ αποτελείται από όλα τα ζευγάρια (f,g) ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Για μια συνάρτηση $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T_1, T_2)$ και $a, b \in G(T_2)$ ορίζουμε $G(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(G(T_2), G(T_1))$ με

$$\begin{tikzcd}
& T_1 \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f\circ h"'] \arrow[ddr, bend left, "g\circ h"] & \\
& T_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

$$G(h)(f,g) = (f\circ h, g\circ h).$$

Τότε το $G(h)(f,g) \in G(T_1)$ και το

$$G(h) \in \mathrm{Hom}_{(Set)}(G(T_2), G(T_1)).$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται ένας contravariant συναρτητής $G : \mathcal{C} \to (\mathrm{Set})$. Το στοιχείο $(W, (p_1, p_2))$ το οποίο αναπαριστά τον συναρτητή, όπου $(p_1, p_2) \in G(W)$, τότε το W θα λέγεται το fibre product των X και Y υπεράνω του Z και θα το συμβολίζουμε με $X \times_Z Y$. Οι μορφισμοί $p_1 : X \times_Z Y \to X$ και $p_2 : X \times_Z Y \to Y$ θα ονομάζονται οι κανονικές προβολές επί του X και Y αντίστοιχα. Όπως και προηγούμενως, τα $(W, (p_1, p_2))$ είναι μοναδικά καθορισμένα μέχρι ισομορφισμού.

Πρόταση IV.5.3. *Θεωρούμε τους μορφισμούς $q_1 : X \to Z$ και $q_2 : Y \to Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Το fibre product $X \times_Z Y$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει ένα αντικείμενο $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και μορφισμοί $p_1 : W \to X$ και $p_2 : W \to X$ ώστε να ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:*
ΙΓ: *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό και για κάθε αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h : T \to W$ ο οποίος να κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της πρότασης IV.5.2. Αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι αυτή των σχημάτων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και την πρόταση IV.5.2 αντικαθιστώντας την κατηγορία των σχημάτων με αυτή των Z-σχημάτων. □

Θεώρημα IV.5.4. *Στην κατηγορία των σχημάτων υπάρχουν ινώδη γινόμενα.*

Για την απόδειξη του παραπάνω θα χρειαστούμε το

Λήμμα IV.5.5. *Για αφινικά σχήματα $X = \mathrm{Spec}A$, $Y = \mathrm{Spec}B$ και $Z = \mathrm{Spec}C$ και για μορφισμούς $q_1 : X \to Z$ και $q_2 : Y \to Z$, το ινώδες γινόμενο $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ υπάρχει και ισχύει*

$$X \times_Z Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_C B).$$

Οι συναρτήσεις προβολών είναι οι συναρτήσεις που επάγονται στα αφινικά σχήματα από τους φυσικούς ομομορφισμούς δακτυλίων

$$\phi_1 : A \longrightarrow A \otimes_C B, \quad a \longmapsto a \otimes 1 \qquad\qquad \phi_2 : B \longrightarrow A \otimes_C B, \quad b \longmapsto 1 \otimes b$$

Απόδειξη. Οι μορφισμοί $f : T \to X$ και $g : T \to Y$ καθορίζονται πλήρως από μορφισμούς δακτυλίων $\phi : A \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T) := R$ και $\psi : B \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = R$. Επίσης, οι συναρτήσεις $q_1 : X \to Z$

και $q_2 : Y \to Z$ καθορίζονται μονοσήμαντα από τους μορφισμούς δακτυλίων $\nu_1 : C \to A$ και $\nu_2 : C \to B$. Μέσω των συναρτήσεων ν_1, ν_2 οι δακτύλιοι A, B γίνονται C-άλγεβρες. Επιπλέον, η σχέση $q_1 \circ f_1 = q_2 \circ g$ μας δίνει ότι οι μορφισμοί $\phi \circ \nu_1 = \psi \circ \nu_2 : C \to R$. Συνεπώς ο συναρτητής G μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} G(T) &= \{(f, g) \in \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y) : q_1 \circ f = q_2 \circ g\} \\ &= \{(\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}(A, R) \times \mathrm{Hom}(B, R) : \phi \circ \nu_1 = \psi \circ \nu_2\}, \end{aligned}$$

Θεωρώντας τα A, B ως C-άλγεβρες μέσω των ν_1, ν_2 βλέπουμε ότι η σχέση $\phi \circ \nu_1 = \psi \circ \nu_2$ έχουμε ότι $\phi(c \cdot 1_A) = \psi(c \cdot 1_B)$ για κάθε $c \in C$, όπου $1_A, 1_B$ είναι οι μονάδες των δακτυλίων A, B. Και το R έχει δομή C-άλγεβρας μέσω της $\phi \circ \nu_1 = \psi \circ \nu_2$. Τότε για $a \in A, b \in B$ έχουμε

$$\phi(c \cdot a) = c\phi(a) \text{ και } \psi(c \cdot b) = c\psi(b).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Φ ως

$$\begin{aligned} \Phi : A \times B &\longrightarrow R, \\ (a, b) &\longmapsto \phi(a)\psi(b). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η Φ είναι διγραμμική συνάρτηση και για κάθε $a \in A, b \in B$ και $c \in C$ ισχύει

$$\Phi(c \cdot a, b) = \Phi(a, c \cdot b) = c\Phi(a, b) \tag{IV.8}$$

και για κάθε $a_1, a_2 \in A$ και $b_1, b_2 \in B$,

$$\Phi(a_1 a_2, b_1 b_2) = \Phi(a_1, b_1)\Phi(a_2, b_2). \tag{IV.9}$$

Αντιστρόφως, αν δίνεται μια C-διγραμμική συνάρτηση Φ η οποία να ικανοποιεί τις εξισώσεις (IV.8) και (IV.9), τότε ορίζουμε

$$\phi(a) = \Phi(a, 1_B) \text{ και } \psi(b) = \Phi(1_A, b)$$

οι οποίοι είναι ομομορφισμοί $\phi : A \to R$ και $\psi : B \to R$, ενώ για $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε

$$\Phi(a, b) = \Phi(a, 1_B)\Phi(1_A, b) = \phi(a)\psi(b).$$

Επιπλέον, για τις συναρτήσεις ϕ, ψ που κατασκευάσαμε από την Φ έχουμε ότι

$$\phi(c \cdot 1_A) = \Phi(c \cdot 1_A, 1_B) = \Phi(1_A, c \cdot 1_B) = \psi(c \cdot 1_B),$$

για κάθε $a \in A, b \in B$ και $c \in C$. Δηλαδή ισχύει ότι $\phi \circ \nu_1 = \psi \circ \nu_2$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$G(T) \cong \{\Phi : A \times B \to R : \Phi \text{ είναι διγραμμική και ικανοποιεί τις (IV.8), (IV.9)}\}.$$

Εξ ορισμού του τανυστικού γινομένου $A \otimes_C B$ από C-άλγεβρες A, B το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης είναι ισόμορφο με το $\mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R)$. Δηλαδή έχουμε έναν ισομορφισμό συνόλων

$$G(T) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R)$$

ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό συνόλων

$$\phi_T : \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(Z, \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)).$$

Ένας μορφισμός σχημάτων $j : T_1 \to T_2$ επάγει έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$j : \Gamma(T_1, \mathcal{O}_{T_1}) \longrightarrow \Gamma(T_2, \mathcal{O}_{T_2}).$$

Θέτουμε $R_1 = \Gamma(T_1, \mathcal{O}_{T_1})$ και $R_2 = \Gamma(T_2, \mathcal{O}_{T_2})$. Τότε ο j επάγει μία συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R_1) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R_2), \\ \eta &\longmapsto j \circ \eta \end{aligned}$$

η οποία με τη σειρά της επάγει μορφισμό

$$\mathrm{Hom}(T_2, \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_1, \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)).$$

Θέτουμε $W = \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)$ και έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} G(T_2) \arrow[r, "\phi_{T_2}"] \arrow[d, "G(j)"'] & \mathrm{Hom}(T_2, W) \arrow[d, "h_W(j)"] \\ G(T_1) \arrow[r, "\phi_{T_1}"'] & \mathrm{Hom}(T_1, W) \end{tikzcd}$$

Το στοιχείο $(p_1, p_2) \in \mathrm{Hom}(W, X) \times \mathrm{Hom}(W, Y)$, αντιστοιχεί στο $\mathrm{Id}_W \in \mathrm{Hom}(W, W)$ και αποτελείται από τους $\phi_1 : A \to A \otimes_C B$ και $f_2 : B \to A \otimes_C B$ που δόθηκαν στην εκφώνηση του λήμματος. Καταλήγουμε ότι το $(W, (p_1, p_2))$ αναπαριστά τον συναρτητή G. □

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα IV.5.4.

Βήμα 1. Για μορφισμούς σχημάτων $q_1 : X \to Z$ και $q_2 : Y \to Z$, αν υπάρχει το ινώδες γινόμενο $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ υπεράνω του Z, τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset X$ το $(p_1^{(U)}, (\widehat{p}_1, p_2))$ είναι το ινώδες γινόμενο του U με το Y υπεράνω του Z, όπου η $\widehat{p}_1$ είναι ο περιορισμός της p_1 στο $p_1^{-1}(U)$.

Πράγματι, για τη φυσική open immersion $i : U \hookrightarrow X$, θέτουμε $\widehat{q}_1 = q_1 \circ i : U \to Z$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί σχημάτων $\widehat{f} : T \to U$ και $g : T \to Y$ οι οποίοι ικανοποιούν την $\widehat{q}_1 \circ \widehat{f} = q_2 \circ g$. Θέτουμε $f = i \circ \widehat{f} : T \to X$ και έχουμε ότι $q_1 \circ f = q_2 \circ g$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h : T \to X \times_Z Y$ η οποία ικανοποιεί $f = p_1 \circ h$ και $g = p_2 \circ h$. Αφού $f(T) \subset U$ έχουμε $h(T) \subset p_1^{-1}(U)$. Το $p^{-1}(U)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times_Z Y$, συνεπώς το $p_1^{-1}(U)$ είναι ένα ανοιχτό σχήμα και ο h μπορεί να θεωρηθεί ως μορφισμός από το T στο $p^{-1}(U)$. Τότε $\widehat{f} = \widehat{p}_1 \circ h$ και $g = p_2 \circ h$. Η μοναδικότητα του h μας δίνει ότι $(p^{-1(U)}, (\widehat{p}, p_2))$ είναι το ινώδες γινόμενο $U \times_Z Y$.

Βήμα 2. Θεωρούμε τους μορφισμούς σχημάτων $q_1 : X \to Z$ και $q_2 : Y \to Z$ και έστω $\{X_i, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Αν για $q_1^{(i)} = q_1 |_{X_i}: X_i \to Z$ είναι οι περιορισμοί του μορφισμού q_1 στο X_i και $q_2 : Y \to Z$ υπάρχουν τα ινώδη γινόμενα $(X_i \times_Z Y, (q_1^{(i)}, q_2))$, τότε και το ινώδες γινόμενο $(X \times_Z Y, (q_1, q_2))$ υπάρχει επίσης.

Πράγματι, θέτουμε $X_{ij} = X_i \cap X_j$. Αν $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ θέτουμε $U_{ij} = (p_1^{(i)})^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_Z Y$. Τότε $U_{ij} = X_{ij} \times_Z Y$. Αφού $X_{ij} = X_{ji}$ και $U_{ji} = (p_1^{(i)})^{-1}(X_{ji}) \subset X_j \times_Z Y$ είναι επίσης το ινώδες γινόμενο $X_{ji} \times_Z Y$, έχουμε έναν ισομορφισμό

$$\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ij}$$

ώστε

$$p_1^{(i)} |_{U_{ij}} = (p_1^{(j)} |_{U_{ji}}) \circ \phi_{ij} \text{ και } p_2^{(i)} |_{U_{ji}} = (p_2^{(j)} \mid U_{ji}) \circ \phi_{ij}, \tag{IV.10}$$

όπου $\phi_{ji} = \phi_{ij}^{-1}$. Αν $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$, έχουμε

$$\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk},$$

και στο $U_{ij} \cap U_{ik}$ έχουμε

$$\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}.$$

Μπορούμε να κολλήσουμε τα $X_i \times_Z Y$ μέσω των $\{\phi_{ij}\}$ για να πάρουμε το σχήμα $X \times_Z Y$. Επιπλέον η (IV.10) μας δίνει μορφισμούς σχημάτων $p_1 : X \times_Z Y \to X$ και $p_2 : X \times_Z Y \to Y$, όπου τα p_1, p_2 περιορίζονται στα $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$ στο $X_i \times_Z Y$.

Θα αποδείξουμε ότι το $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ είναι το ινώδες γινόμενο. Για μορφισμούς σχημάτων $f : T \to X$ και $g : T \to Y$ που ικανοποιούν $q_1 \circ f = q_2 \circ g$, θέτουμε $T_i = f^{-1}(X_i)$ για κάθε $i \in I$ $f_i = f|_{T_i}$, $g_i = g|_{T_i}$. Τότε έχουμε ότι $q_1^{(i)} \circ f_i = q_2^{(i)} \circ g_i$. Συνεπώς υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h_i : T_i \to X_i \times_Z Y$ που ικανοποιεί $f_i = p_1^{(i)}$ και $g_i = p_2^{(i)} \circ h_i$. Και πάλι οι μορφισμοί h_i κολλάνε μεταξύ τους σε μία μοναδική συνάρτηση $h : T \to X \times_Z Y$ με την ιδιότητα $f = p_1 \circ h$, $g = p_2 \circ h$.

Βήμα 3. Σε αυτό το βήμα θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Θεωρούμε τους μορφισμούς σχημάτων $q_1 : X \to Z$ και $q_2 : Y \to Z$. Υποθέτουμε ότι τα Y και Z είναι αφινικά. Καλύπτουμε το X με ένα ανοιχτό κάλυμμα από αφινικά $\{X_i, i \in I\}$. Θέτουμε $q_1^{(i)} = q_1|_{X_i}$. Από το προηγούμενο λήμμα το γινόμενο $(X_i \times_Z Y, (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}))$ υπάρχει. Το βήμα 2 εξασφαλίζει την ύπαρξη του $(X \times_Z, (p_1, p_2))$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το Z είναι αφινικό, ενώ τα X, Y είναι τυχαία σχήματα. Καλύπτουμε το Y με ένα ανοιχτό αφινικό κάλυμμα $Y_j, j \in J$. Από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι όλα τα γινόμενα $(X \times Y_j, (p_1^{(j)}, p_2^{(j)}))$ υπάρχουν. Και πάλι το Βήμα 2 εξασφαλίζει την ύπαρξη του $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$.

Τέλος υποθέτουμε ότι τα X, Y, Z είναι τυχαία σχήματα. Διαλέγουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{Z_k, k \in K\}$ του Z αποτελούμενο από αφινικά σχήματα. Θέτουμε $X_k = q_1^{-1}(Z_k)$, $Y_k = q_2^{-1}(Z_K)$, $q_1^{(k)} = q_1|_{X_k}$, $q_2^{(k)} = q_2|_{Y_k}$. Θεωρούμε το γινόμενο $(X_k \times_Z Y_k, (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}))$ των X_k, Y_k πάνω από το Z. Το γινόμενο αυτό είναι το ίδιο με το γινόμενο $X_k \times_Z Y$. Πράγματι, για $T \to X_k$ και $g : T \to Y$ που ικανοποιούν $q_1^{(k)} \circ f = q_2 \circ g$ έχουμε

$$q_2(g(T)) = q_1^{(k)}(f(T)) \subset q_1^{(k)}(X_k) \subset Z_k.$$

Δηλαδή $g(T) \subset Y_k$. Συνεπώς υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $h : T \to X_k \times_Z Y_k$ που να ικανοποιεί $f = p_1^{(k)} \circ h$ και $g = p_2^{(k)} \circ h$. Έτσι το $X_k \times_Z Y_k$ είναι το γινόμενο $X_k \times_Z Y$. Αφού τα $\{X_k : k \in K\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και πάλι το βήμα 2 εξασφαλίζει ότι το γινόμενο $(X \times_Z Y)$ υπάρχει.

Παρατήρηση IV.5.6. *Το γινόμενο $X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} Y$ είναι το ίδιο με το $X \times Y$.*

Παράδειγμα IV.5.7. *Ισχύει ότι $\mathbb{A}_k^n \times_k \mathbb{A}_k^m = \mathbb{A}_k^{n+m}$. Πράγματι $\mathbb{A}_k^n = \mathrm{Spec}k[x_1, \ldots, x_m]$, $\mathbb{A}_k^m = \mathrm{Spec}k[y_1, \ldots, y_m]$. Το γινόμενο των αφινικών σχημάτων δίνεται από*

$$\mathbb{A}_k^n \times_k \mathbb{A}_k^m = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_m]) = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]).)$$

Ορισμός IV.5.8. *Έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων. Για ένα σημείο $y \in Y$ θα ονομάζουμε*

$$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}k(y)$$

την ίνα του f υπεράνω του y όπου $k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$, και $\mathfrak{m}_y$ είναι το μέγιστο ιδεώδες του y.

Παράδειγμα IV.5.9. *Ο φυσικός ομομορφισμός*

$$k[t] \to k[x, y, t]/\langle xy - t\rangle$$

επάγει έναν μορφισμό από αφινικά σχήματα

$$f : X = \mathrm{Spec}k[x, y, t]/\langle xt - t\rangle \to Y = \mathrm{Spec}k[t].$$

Το σημείο του Y το οποίο καθορίζεται από ένα πρώτο ιδεώδες $\langle x - a\rangle$, $a \in k$ θα συμβολίζεται για απλότητα με a. Η ίνα υπεράνω του a θα δίνεται από το

$$X_a = \mathrm{Spec}k[x, y]/\langle xy - a\rangle.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί το σώμα υπολοίπων του a *είναι ισόμορφο με το* $k[t]/\langle t-a\rangle$ *και επιπλέον έχουμε*

$$k[x,y,t]/\langle xy-t\rangle \otimes_{k[t]} k[t]/\langle t-a\rangle \cong k[x,y]/\langle xy-a\rangle.$$

Αν το $a\neq 0$*, τότε το* X_a *είναι ανάγωγο. Στην περίπτωση που το* $a=0$*, τότε έχουμε*

$$X_0 = \mathrm{Spec} k[x,y]/\langle xy\rangle.$$

Επίσης, το σώμα υπολοίπων του γενικού σημείου του $\mathrm{Spec} k[t]$ *είναι το* $k(t)$ *και, τότε έχουμε*

$$k[x,y,t]/\langle xy-t\rangle \otimes_{k[t]} k(t) \cong k(t)[x,y]/\langle xy-t\rangle.$$

Δηλαδή η ίνα του f *πάνω από το γενικό σημείο είναι το*

$$\mathrm{Spec} k(t)[x,y]/\langle xy-t\rangle.$$

Παράδειγμα IV.5.10. *Θεωρούμε τον μορφισμό αφινικών σχημάτων*

$$f : X = \mathrm{Spec} k[x,y,t]/\langle x^m y^n - t\rangle \longrightarrow \mathrm{Spec} k[t]$$

η οποία καθορίζεται από τον φυσικό ομομορφισμό υπεράνω του σώματος k

$$k[t] \longrightarrow k[x,y,y]/\langle x^m y^n - t\rangle.$$

Θεωρούμε το σημείο a *του* Y *το οποίο καθορίζεται από το πρώτο ιδεώδες* $\langle t-a\rangle$*,* $a\in k$*. Τότε η ίνα της* f *πάνω από το* a *δίνεται από το*

$$X_a = \mathrm{Spec} k[x,y]/\langle x^m y^n - a\rangle.$$

Όταν το $a=0$ *το* X_0 *δεν είναι ανηγμένο (reduced). Αν το* k *είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα, τότε για* m *και* n *που δεν διαιρούνται από τη χαρακτηριστική* $\mathrm{char}(k)$ *του* k*, το* X_a *είναι ανηγμένο για* $a\neq 0$*. Για* $mn\geqslant 2$*, το* X_a *είναι μη ανάγωγο. Η ίνα πάνω από το generic point δίνεται από το*

$$\mathrm{Spec} k(t)[x,y]/\langle x^m y^n - t\rangle,$$

και είναι ανάγωγο.

Παράδειγμα IV.5.11. *Θεωρούμε τον επαγώμενο μορφισμό σχημάτων:*

$$f : X = \mathrm{Spec} k[u,v] \longrightarrow Y = \mathrm{Spec} k[x,y]$$

από τον ομομορφισμό δακτυλίων:

$$\begin{aligned} k[x,y] &\longrightarrow k[u,v] \\ f(x,y) &\longmapsto f(u,uv) \end{aligned}$$

Έστω (a,b) *το σημείο του* Y *το οποίο καθορίζεται από το ιδεώδες* $\langle x-a, y-b\rangle$*,* $a,b\in k$*. Το σώμα υπολοίπων του* (a,b) *είναι ισόμορφο με το* $k[x,y]/\langle x-a,y-b\rangle$ *και ικανοποιεί*

$$k[u,v]\otimes_{k[x,y]} k[x,y]/\langle x-a,y-b\rangle \cong k[u,v]/\langle u-a, uv-b\rangle.$$

Έτσι για $a\neq 0$ *η ίνα πάνω από το* (a,b) *είναι ισόμορφη με το*

$$\mathrm{Spec} k[u,v]/\langle u-a, v-b/a\rangle.$$

Για $a=0, b\neq 0$ *έχουμε* $\langle u-a, uv-b\rangle = \langle 1\rangle$*. Συνεπώς,* $k[u,v]/\langle u-a, uv-b\rangle = 0$*, δηλαδή το* $X_{(0,b)} = \emptyset$*. Για* $(a,b)=(0,0)$*, έχουμε* $(u-a, uv-b) = \langle u\rangle$*. Συνεπώς η ίνα* $X_{(0,0)} = \mathrm{Spec} k[v]$*.*

Ορισμός IV.5.12. *Για ένα σχήμα $X \to \mathrm{Spec} k$, όπου το k είναι ένα σώμα αν το $X \times_k \overline{k}$, όπου $\overline{k}$ είναι η αλγεβρική κλειστότητα του k, είναι ανάγωγο, τότε θα λέμε ότι το X είναι γεωμετρικά ανάγωγο. Αν το $X \times_k \overline{k}$ είναι reduced, τότε θα λέμε ότι το X είναι γεωμετρικά reduced. Αν το $X \times_k \overline{k}$ είναι ακέραιο, θα λέμε ότι το X είναι γεωμετρικά ακέραιο.*

Τέλος αν το $X \otimes_k \overline{k}$ είναι ανάγωγο (ή reduced ή ακέραιο), τότε το X είναι ανάγωγο (αντ. reduced ή ακέραιο). Το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές.

Παράδειγμα IV.5.13. *Θεωρούμε τον n-διάστατο προβολικό χώρο πάνω από το $\mathbb{Z}$ να έχουμε*

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Proj}\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n].$$

Ο φυσικός ομομορφισμός $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ καθορίζει τη συνάρτηση δομής:

$$\pi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Spec}\mathbb{Z}.$$

Για έναν τυχαίο αντιμεταθετικό δακτύλιο R, υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός $\mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n \cdot 1_R$, ο οποίος καθορίζει έναν μορφισμό από αφινικά σχήματα

$$\mathrm{Spec}R \longrightarrow \mathrm{Spec}\mathbb{Z}.$$

Τότε έχουμε

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}R \cong \mathrm{Proj}R[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}^n_R.$$

Για έναν πρώτο αριθμό p, η ίνα του π πάνω από το σημείο $\langle p \rangle \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ δίνεται από το

$$\mathrm{Proj}\mathbb{F}_p[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}.$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε το σώμα υπολοίπων του $\langle p \rangle$ είναι το $\mathbb{Z}/\langle p \rangle = \mathbb{F}_p$.

Έστω X και Y σχήματα πάνω από το S, και έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων υπεράνω του S. Τότε, για έναν δεδομένο μορφισμό $g : T \to S$, έχουμε τα γινόμενα

$$(X \times_S T, (p, q)) \text{ και } (Y \times_S T, (p', q')).$$

Τότε $f \circ p : X \times_S T \to Y$ και $q : X \times_S T \to T$ είναι μορφισμοί υπεράνω του S. Συνεπώς, η καθολική ιδιότητα του fiber product μας δίνει έναν μοναδικό μορφισμό

$$f_T : X \times_S T \longrightarrow Y \times_S T$$

που κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S T \arrow[d, "f_T"] \arrow[ddl, "f \circ p"'] \arrow[ddr, "q"] & \\
 & Y \times_S T \arrow[dl, "p'"] \arrow[dr, "q'"'] & \\
Y & & T
\end{tikzcd}$$

Ο f_T είναι ένας μορφισμός πάνω από το T. Με αυτό τον τρόπο έχει κατασκευαστεί ένας covariant συναρτητής $(\mathrm{Sch})/S$ πάνω από το S στην κατηγορία $(\mathrm{Sch})/T$ των σχημάτων πάνω από το T, όπου το

$$X \longmapsto X \times_S T$$

ενώ ο

$$f \in \mathrm{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow f_T \in \mathrm{Hom}_T(X \times_S T, Y \times_S T).$$

Ειδικότερα, αν $f : X \to S$, τότε για έναν μορφισμό $g : T \to S$, έχουμε $f_T : X \times_S T \to S \times_S T = T$. Ο μορφισμός f_T λέγεται ότι είναι η αλλαγή βάσης της $f : X \to S$ για $g : T \to S$. Συνεπώς, με τη βοήθεια του γινομένου έχουμε ένα σχήμα πάνω από το T.

IV.6 Διαχωρισμένοι Μορφισμοί

Η τοπολογία Zariski έχει λίγα ανοιχτά και δεν έχει την ιδιότητα Hausdorff. Η έννοια του διαχωρισμένου μορφισμού αντιστοιχεί στην ιδιότητα Hausdorff ενός τοπολογικού χώρου.

Για έναν μορφισμό σχημάτων $f : X \to Y$ θεωρούμε το γινόμενο $(X \times_Y X, (p_1, p_2))$. Από τον ορισμό του γινομένου υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$, ο οποίος ικανοποιεί $p_1 \circ \Delta_{X/Y} = p_2 \circ \Delta_{X/Y} = \mathrm{Id}_X$. Ο μορφισμός αυτός λέγεται ο διαγώνιος μορφισμός και συχνά, όταν το X, Y είναι σταθερά, γράφουμε Δ αντί για $\Delta_{X/Y}$. Έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\Delta"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{Id}_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{Id}_X"] & \\
& X \times_Y X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός IV.6.1. *Ο μορφισμός σχημάτων $f : X \to Y$ θα λέγεται διαχωρισμένος (separated), αν ο διαγώνιος μορφισμός $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ είναι μια κλειστή immersion. Στην περίπτωση που $Y = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ και ο μοναδικός μορφισμός $f : X \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι διαχωρισμένος, τότε το σχήμα X θα λέγεται διαχωρισμένο σχήμα.*

Παρατήρηση IV.6.2. *Ένας τοπολογικός χώρος M είναι Hausdorff δηλαδή για κάθε δύο σημεία x, y με $x \neq y$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, V με $x \in U$ και $y \in V$ ώστε $U \cap V = \emptyset$, αν και μόνο αν η διαγώνιος*

$$\Delta = \{(a, a) \in M \times M, a \in M\}$$

είναι κλειστό σύνολο στον τοπολογικό χώρο $X \times X$. Πράγματι αν υπάρχουν τέτοια σύνολα, τότε το $U \times V$ είναι μια ανοιχτή περιοχή κάθε σημείου (x, y) εκτός της διαγωνίου και αντιστρόφως, αν το Δ είναι κλειστό, τότε το $(x, y) \in X \times X - \Delta$ έχει ανοιχτή περιοχή W που δεν τέμνει τη διαγώνιο. Οι προβολές της $U = p_1(W)$ και $V = p_2(W)$ είναι οι ξένες ανοιχτές περιοχές των x, y που απαιτεί η ιδιότητα Hausdorff.

Παρατηρήστε ότι για ένα σχήμα X η τοπολογία του γινομένου είναι ισχυρότερη από την τοπολογία γινόμενο.

Παρατήρηση IV.6.3. *Στη βιβλιογραφία αυτό που ορίσαμε ως «σχήμα» συχνά αναφέρεται ως «προσχήμα», ενώ ο ορισμός του σχήματος απαιτεί και τη διαχωρισιμότητα όπως ορίστηκε παραπάνω.*

Πρόταση IV.6.4. *Κάθε αφινικό σχήμα είναι διαχωρισμένο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το αφινικό σχήμα $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ το οποίο αντιστοιχεί στον αντιμεταθετικό δακτύλιο R. Έχουμε ότι

$$X \times X = \mathrm{Spec}(R \otimes_{\mathbb{Z}} R).$$

Ο διαγώνιος μορφισμός καθορίζεται από τον ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \eta : R \otimes_{\mathbb{Z}} R &\longrightarrow R \\ a \otimes b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Αφού ο μορφισμός η είναι επί, ο διαγώνιος μορφισμός $\Delta : X \to X \times X$ είναι μια κλειστή immersion, και το X είναι διαχωρισμένο. □

Πρόταση IV.6.5. *Ένας αφινικός μορφισμός* $f : X = \mathrm{Spec}A \to Y = \mathrm{Spec}B$ *είναι διαχωρισμένος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : B \to A$ ο οποίος επάγει τον f. Θεωρώντας τον A ως B-άλγεβρα μέσω του ϕ, σχηματίζουμε το

$$X \times_Y X = \mathrm{Spec}(A \otimes_B A).$$

Ο διαγώνιος μορφισμός

$$\Delta_{X/Y} : X \longrightarrow X \times_Y X$$

αντιστοιχεί στον ομομορφισμό πάνω από το B:

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes_B A &\longrightarrow A \\ a \otimes a' &\longmapsto aa'. \end{aligned}$$

Αφού το ψ είναι επί, ο $\Delta_{X/Y}$ είναι κλειστή immersion. □

Πρόταση IV.6.6. *Ένας μορφισμός σχημάτων* $f : X \to Y$ *είναι διαχωρισμένος αν και μόνο αν η εικόνα* $\Delta_{X/Y}(X)$ *του υποκείμενου χώρου* X *κάτω από τον διαγώνιο μορφισμό* $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ *είναι κλειστό υποσύνολο του υποκείμενου τοπολογικού χώρου του* $X \times_Y X$.

Απόδειξη. Αν ο μορφισμός είναι διαχωρισμένος είναι σαφές ότι η εικόνα της διαγωνίου είναι κλειστό υποσύνολο του γινομένου. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η εικόνα της διαγωνίου είναι κλειστό υποσύνολο του γινομένου. Εξ ορισμού για την προβολή $p_1 : X \times_Y X \to X$ έχουμε $p_1 \circ \Delta_{X/Y} = \mathrm{Id}_X$.

Συνεπώς, η συνάρτηση των υποκείμενων τοπολογικών χώρων X στο $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός. Θα δείξουμε ότι ο ομοιομορφισμός από sheaves

$$\Delta^{\#}_{X/Y} : \mathcal{O}_{X \times_Y X} \longrightarrow \Delta^*_{X/Y}\mathcal{O}_X$$

είναι επί. Για ένα τυχαίο σημείο $x \in X$, διαλέγουμε μια ανοιχτή περιοχή U του x, ώστε το $f(U)$ να περιέχεται σε ένα ανοιχτό αφινικό V του Y. Τότε στην περιοχή του x ο διαγώνιος μορφισμός $\Delta_{X \times_Y X}$ είναι η

$$\Delta_U : U \longrightarrow U \times_V U,$$

και αφού U, V είναι αφινικά και τα δύο έχουμε ότι η Δ_U είναι κλειστή immersion. Συνεπώς η

$$\Delta^{\#} : \mathcal{O}_{U \times_V U} \longrightarrow \Delta^*_U \mathcal{O}_U$$

είναι επί, και αφού το $U \times_V U$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X \times_Y X$ και η $\Delta^{\#}_{X \times_Y X}$ είναι επί και τελικά η $\Delta_{X/Y}$ είναι μια κλειστή immersion, οπότε η f είναι διαχωρισμένη. □

Στο παραπάνω θεώρημα αποδείξαμε ότι η εικόνα $\Delta_{X/Y}(X)$ του διαγώνιου μορφισμού είναι τοπικά κλειστή, δηλαδή υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \supset \Delta_{X/Y}(X)$ ώστε το $\Delta_{X/Y}(X)$ να είναι κλειστό στο U.

Παράδειγμα IV.6.7. *Θεωρούμε τις αφινικές γραμμές* $X = \mathrm{Spec}k[x]$ *και* $Y = \mathrm{Spec}k[y]$ *υπεράνω του σώματος* k. *Θεωρούμε τα ανοιχτά σύνολα:*

$$\begin{aligned} U &= X \backslash \{0\} = \mathrm{Spec}k[x, 1/x], \\ V &= Y \backslash \{0\} = \mathrm{Spec}k[y, 1/y]. \end{aligned}$$

Έστω Z *το σχήμα που προκύπτει με κόλλημα μέσω του ισομορφισμού* $\phi : U \to V$ *που δίνεται από την*

$$\begin{aligned} k[x, 1/x] &\longrightarrow k[y, 1/y], \\ f(x, 1/x) &\longmapsto f(y, 1/y). \end{aligned}$$

Ταυτίζοντας με αυτό τον τρόπο προκύπτει μια αφινική ευθεία Z, η οποία στο 0 συμπληρώνεται με δύο σημεία. Το σχήμα Z δεν είναι διαχωρισμένο υπεράνω του k.

Πράγματι το σχήμα $Z \times_{\mathrm{Spec}k} Z$ δίνεται κολλώντας τέσσερα αφινικά επίπεδα

$$X_1 = \mathrm{Spec}k[x] \otimes_k k[x] \qquad X_2 = \mathrm{Spec}k[y] \otimes_k k[x]$$
$$X_3 = \mathrm{Spec}k[x] \otimes_k k[y] \qquad X_4 = \mathrm{Spec}k[y] \otimes_k k[y]$$

τα οποία κολλάνε μέσω των επαγώμενων μορφισμών: $\phi : U \to V$:

$$\begin{aligned} \phi \times \mathrm{Id}_U &: U \times_{\mathrm{Spec}k} U \longrightarrow V \times_{\mathrm{Spec}k} V \\ \mathrm{Id}_U \times \phi &: U \times_{\mathrm{Spec}k} U \longrightarrow U \times_{\mathrm{Spec}k} V \\ \phi \times \phi &: U \times_{\mathrm{Spec}k} U \longrightarrow V \times_{\mathrm{Spec}k} V. \end{aligned}$$

Το σχήμα που προκύπτει από τα τέσσερα αφινικά επίπεδα τα οποία ταυτίζονται παντού εκτός από τα τέσσερα σημεία είναι ένα επίπεδο με τέσσερα σημεία στη θέση του $(0, 0)$. Ο διαγώνιος μορφισμός $\Delta : Z \to Z \times_{\mathrm{Spec}k} Z$ δίνεται με κόλλημα των διαγώνιων μορφισμών

$$\begin{aligned} \Delta_1 &: X \longrightarrow X_1 = X \times_{\mathrm{Spec}k} X \\ \Delta_4 &: Y \longrightarrow X_4 = Y \times_{\mathrm{Spec}k} Y. \end{aligned}$$

Η εικόνα του $\Delta(Z)$ του υποκείμενου χώρου αποτελείται από τη διαγώνιο εκτός από τα σημεία $(0, 0)$ μαζί με την ίδια επιλογή σημείου πάνω από το μηδενικό σημείο των X_1 και X_4. Η κλειστότητα στο $Z \times_{\mathrm{Spec}k} Z$ της διαγωνίου του αφινικού επιπέδου περιέχει και τα τέσσερα σημεία οπότε, το $\Delta(Z)$ δεν είναι κλειστό σύνολο.

Θεώρημα IV.6.8.

1. *Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι διαχωρισμένοι, τότε και ο $f : X \to Z$ είναι διαχωρισμένος.*
2. *Αν ένας μορφισμός $j : Z \to X$ είναι κλειστή immersion ή ανοιχτή immersion, τότε το j είναι διαχωρισμένη.*
3. *Για έναν διαχωρισμένο μορφισμό $f : X \to S$, ο μορφισμός*
$$f_T : X \times_S T \longrightarrow T$$
που επάγεται από την αλλαγή βάσης $T \to S$ είναι διαχωρισμένη.
4. *Για μορφισμούς σχημάτων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ αν η σύνθεσή τους $g \circ f : X \to Z$ είναι διαχωρισμένη, τότε και η f είναι διαχωρισμένη.*

Απόδειξη. 1. Οι μορφισμοί $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ και $\Delta_{Y/Z} : Y \to Y \times_Z Y$ είναι κλειστές immersions. Θεωρούμε το X σαν ένα σχήμα πάνω από το Z μέσω της σύνθεσης $g \circ f$, και ορίζουμε τον μορφισμό
$$(f, f)_Z : X \times_Z X \to Y \times_Z Y,$$
η οποία ορίζεται από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Z X \arrow[dl] \arrow[d, "(f,f)"] \arrow[dr] & \\
X \arrow[d, "f"'] & Y \times_Z Y \arrow[dl] \arrow[dr] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Τότε η αλλαγή βάσης της $\Delta_{Y/Z}$ με τον $(f,f)_z$,

$$h = \Delta_{Y/Z} \times_{Y\times_Z Y} (f,f)_Z : Y \times_{Y\times_Z Y} X \times_Z X \longrightarrow X \times_Z X$$

η οποία δίνεται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \times_{Y\times_Z Y} X \times_Z X \arrow[dl] \arrow[dr, "h"] & \\
Y \arrow[dr, "\Delta_{Y/Z}"'] & & X \times_Z X \arrow[dl, "(f,f)_Z"] \\
 & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}$$

είναι κλειστή immersion. Όμως για ένα σχήμα W έχουμε ότι $h_H(W) \cong h_{X\times_Y X}(W)$, όπου $H = Y \times_{Y\times_Z Y} X \times_Z X$. Πράγματι μια συνάρτηση $\phi : W \to X \times_Y X$ επάγει μορφισμούς $W \to Y$ και $W \to X \times_Z X$ και από την καθολική ιδιότητα του γινομένου έχουμε συνάρτηση $W \to H$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[ddl] & X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"] \\
 & H \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl] \arrow[dr, "h"] & X \times_Y X \arrow[d] \\
Y \arrow[dr, "\Delta_{Y/Z}"'] & & X \times_Z X \arrow[dl, "(f,f)_Z"] \\
 & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}$$

Αντιστρόφως, ένας μορφισμός $W \to H$ επάγει μορφισμούς στο Y και στο X και συνεπώς από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $X \times_Y X$ επάγει μορφισμό $W \to X \times_Y X$.

Συνεπώς υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός

$$H = Y \times_{Y\times_Z Y} X \times_Z X \longrightarrow X \times_Y X.$$

Ο διαγώνιος μορφισμός

$$\Delta_{X/Z} : X \longrightarrow X \times_Z X,$$

μπορεί να θεωρηθεί ως η σύνθεση του $\Delta_{X/Y}$ με τον $h = \Delta_{Y/Z} \times_{Y\times_Z Y} (f,f)_Z$. Αφού τα $\Delta_{X/Y}$ και h είναι κλειστές immersions και η σύνθεσή τους είναι κλειστή immersion, και καταλήγουμε στο ότι η $g \circ f$ είναι διαχωρισμένη.

2. Θεωρούμε την περίπτωση που η $j : Z \to X$ είναι μία κλειστή immersion. Για μια ανοιχτή περιοχή $U = \mathrm{Spec}A$ του X, αν $V = j^{-1}(U) \neq \emptyset$, τότε $V = j^{-1}(U)$ είναι ένα αφινικό σχήμα $\mathrm{Spec}B$. Τότε η $\mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}B$ είναι μια κλειστή immersion. Ο αντίστοιχος ομομορφισμός δακτυλίων $A \to B$ είναι επιμορφισμός. Τότε το $B = A/I$, όπου το I είναι ένα ιδεώδες του A. Συνεπώς $B \otimes_A B \cong B$ και η προβολή

$$p_1 : V \times_U V = \mathrm{Spec}(B \otimes_A B) \to V = \mathrm{Spec}B$$

είναι ισομορφισμός. Συνεπώς η $p_1 : Z \times_X Z \to Z$ είναι ισομορφισμός. Επίσης, $p_1 \circ \Delta_{Z/X} = \mathrm{Id}_X$ μας δίνει ότι $\Delta_{Z/X}$ είναι ισομορφισμός. Οι ισομορφισμοί είναι κλειστές immersions. Συνεπώς η j είναι διαχωρισμένη.

Στην περίπτωση που η j είναι ανοιχτή immersion, επιλέγουμε $U = \mathrm{Spec}A \subset j(Z)$. Μπορούμε να δείξουμε ότι η $p_1 : Z \times_X Z \to Z$ είναι ισομορφισμός και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο η j είναι διαχωρισμένη.

3. Θέτουμε $X' = X \times_S T$. Τότε έχουμε

$$X' \times_T X' = (X \times_S T) \times_T (X \times_S T) \cong (X \times_S X).$$

Συνεπώς $\Delta_{X'/T} = \Delta_{X/S} \times_S T$ και η $\Delta_{X'/T}$ είναι κλειστή immersion, δηλαδή η f_T είναι διαχωρισμένη.

4. Μέσω της $g \circ f$, θεωρούμε το X ως ένα σχήμα υπεράνω του Z και μέσω της g θεωρούμε το Y ως ένα σχήμα υπεράνω του Z. Τότε ο f είναι ένας μορφισμός υπεράνω του Z. Θεωρούμε τον μορφισμό γραφήματος της f ως

$$\Gamma_f = (\mathrm{Id}_X, f)_Z : X \longrightarrow X \times_Z Y.$$

Για την κανονική προβολή $p_2 : X \times_Z Y \to Y$, έχουμε $f = p_2 \circ \Gamma_f$. Αφού

$$X \times_{X \times_Z Y} X \cong X,$$

ο $\Delta_{X/Y \times_Z Y}$ είναι ισομορφισμός και η Γ_f είναι διαχωρισμένη. Επιπλέον αφού $Y = Z \times_Z Y$, η p_2 είναι η αλλαγή βάσης της $g \circ f : X \to Z$ μέσω της $Y \to Z$. Αφού η $g \circ f$ είναι διαχωρισμένη από το (3) έχουμε ότι η p_2 είναι διαχωρισμένη έτσι από το (1) έχουμε ότι το $f = p_2 \circ \Gamma_f$ είναι διαχωρισμένη.

□

Πόρισμα IV.6.9. *Για έναν διαχωρισμένο μορφισμό* $f : X \to Y$, *κάθε ίνα* X_y *υπεράνω ένος σημείου* $y \in Y$ *είναι διαχωρισμένο πάνω από το σώμα υπολοίπων* $k(y)$ *του* y.

IV.7 Σχήματα Ομάδας και συναρτητές ομάδας

Θεωρούμε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ στην οποία υπάρχουν γινόμενα και ένα τελικό αντικείμενο S, δηλαδή ένα αντικείμενο S ώστε για κάθε $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $X \to S$. Αν G είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ εφοδιασμένο με έναν πολλαπλασιασμό $m : G \times G \to G$. Για κάθε $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ορίζεται ένας πολλαπλασιασμός στο

$$G(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G),$$

διότι εξ ορισμού του γινομένου $G \times G$ έχουμε

$$(G \times G)(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G \times G) = G(T) \times G(T)$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, "(g_1,g_2)"] \arrow[ddl, bend right, "g_1"'] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
& G \times G \arrow[dl] \arrow[d, "m"] \arrow[dr] & \\
G \arrow[dr] & G \arrow[d] & G \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, γράφοντας τον επαγόμενο πολλαπλασιαστικά έχουμε ότι

$$g_1 g_2 = m \circ (g_1, g_2),$$

όπου $(g_1, g_2) : T \to G \times G$ είναι η μοναδική συνάρτηση ώστε $\pi_i \circ (g_1, g_2) = g_i$, $i = 1, 2$. Ένας μορφισμός $f : T' \to T$ επάγει μία συνάρτηση $f^* : G(T) \to G(T')$ με $f^*(g) = g \circ f$. Η συνάρτηση f^* διατηρεί τον κανόνα πολλαπλασιασμού αφού

$$(g_1, g_2) \circ f = (g_1 \circ f, g_2 \circ f).$$

Με άλλα λόγια, η $T \mapsto G(T)$ είναι ένας contravariant functor από το $\mathcal{C}$ στην κατηγορία των συνόλων με έναν νόμο πολλαπλασιασμού.

Ο συναρτητής $G(T)$ είναι προσεταιριστικός για κάθε T αν και μόνο αν $(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3)$ ισχύει στο $G(G \times G \times G)$, δηλαδή αν και μόνο αν το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G = G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{Id}\times m"] \arrow[d, equal] & G \times G \arrow[dd, "m"] \\
(G \times G) \times G \arrow[d, "m\times \mathrm{Id}"'] & \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd} \tag{IV.11}$$

Το $G(T)$ έχει δίπλευρο μοναδιαίο e_T αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon \in G(S)$ ώστε η ισότητα

$$\pi^*(\epsilon) \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \cdot \pi^*(\epsilon)$$

ισχύει στο $G(G)$, όπου $\pi = \pi_G$ είναι ο μοναδικός μορφισμός $G \to S$. Δηλαδή απαιτούμε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G = G \times S \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\epsilon"] \arrow[d, equal] \arrow[ddr] & G \times G \arrow[dd, "m"] \\
S \times G \arrow[d, "\epsilon\times\mathrm{Id}"'] & \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd} \tag{IV.12}$$

Σε αυτή την περίπτωση, $\epsilon_T := \pi_T^*(\epsilon)$ είναι η μονάδα στο $G(T)$ για κάθε T.

Με την προϋπόθεση ότι τα $G(T)$ έχουν δίπλευρες μονάδες μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε κάθε $g \in G(T)$ να έχει αριστερό αντίστροφο για κάθε T είναι το στοιχείο $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_G \in G(G)$ να έχει αριστερό αντίστροφο στο $G(G)$, δηλαδή να υπάρχει ένα στοιχείο $\mathrm{inv} \in G(G)$ ώστε $\mathrm{inv}\mathrm{Id}_G = \epsilon_G$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mathrm{inv}\times\mathrm{Id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\epsilon\circ\pi"'] & G
\end{tikzcd} \tag{IV.13}$$

Τότε $(\mathrm{inv} \circ g) \cdot g = \epsilon_T$ για κάποιο $g \in G(T)$ και κάθε T.

Τέλος, θα λέμε το $G(T)$ είναι αντιμεταθετικό αν και μόνο αν ισχύει $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$ στο $G(G \times G)$, δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "(\pi_2,\pi_1)"] \arrow[dr, "m"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\
& G &
\end{tikzcd} \tag{IV.14}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Η συνάρτηση (π_2, π_1) αντιμεταθέτει τους παράγοντες του $G \times G$.

Ορισμός IV.7.1. *Ένα στοιχείο ομάδας στην κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο G της $\mathcal{C}$ με έναν μορφισμό $m : G \times G \to G$, ώστε ο επαγώμενος πολλαπλασιασμός $G(T) \times G(T) \to G(T)$ κάνει το $G(T)$ μία ομάδα για κάθε $T \in \mathcal{C}$. Ένα τέτοιο αντικείμενο θα λέγεται αντιμεταθετικό, αν οι ομάδες $G(T)$ είναι αντιμεταθετικές για κάθε $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

Ένας ομομορφισμός από $\mathcal{C}$-ομάδες $G \to G'$ είναι ένας μορφισμός $G \to G'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ώστε για κάθε αντικείμενο T της $\mathcal{C}$ που δίνεται από το $g \mapsto \phi \circ g$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

Παρατηρούμε ότι το ζευγάρι (G, m) είναι αντικείμενο ομάδας, αν και μόνο αν το διάγραμμα της εξίσωσης (IV.11) είναι αντιμεταθετικό και υπάρχουν μορφισμοί $\epsilon : S \to G$ και $\mathrm{inv} : G \to$ ώστε τα διαγράμματα των εξισώσεων (IV.12) και (IV.13) να είναι αντιμεταθετικά. Τέλος, το (G, m) είναι αντιμεταθετικό αντικείμενο ομάδας, αν το διάγραμμα της εξίσωσης (IV.14) είναι αντιμεταθετικό.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας μορφισμός $\phi : G \to G'$ μεταξύ δύο αντικειμένων ομάδας (G, m) και (G', m') είναι να ισχύει η ισότητα

$$\phi_*(\pi_1\pi_2) = \phi_*(\pi_1)\phi_*(\pi_2)$$

στο $G'(G \times G)$, δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\phi\times\phi"] \arrow[d, "m"'] & G' \times G' \arrow[d, "m'"] \\ G \arrow[r, "\phi"] & G' \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Υποθέτουμε ότι για ένα αντικείμενο $G \in \mathcal{C}$ και αντί για έναν πολλαπλασιασμό $m : G \times G \to G$ όπως προηγουμένως, έχουμε μια δομή ομάδας στο $G(T)$ για κάθε αντικείμενο T της κατηγορίας $\mathcal{C}$, ώστε για $f : T' \to T$ η επαγώμενη συνάρτηση $f^* : G(T) \to G(T')$ να είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός πολλαπλασιασμός

$$m : G \times G \to G,$$

ο οποίος επάγει τη δομή ομάδας στα $G(T)$ για κάθε T, όπως προηγουμένως. Πράγματι, η ύπαρξη και η μοναδικότητα ενός τέτοιου m βασίζεται στο ότι η συνάρτηση m μπορεί να ανακτηθεί από τον πολλαπλασιασμό των δύο προβολών π_1, π_2 ως στοιχεία της ομάδας $G(G \times G)$, δηλαδή $m = \pi_1 \cdot \pi_2$. Δηλαδή η έννοια ενός στοιχείου ομάδος είναι η ίδια με την έννοια ενός συναρτητή ομάδων

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Gr} \\ T &\longmapsto G(T) \end{aligned}$$

ώστε ο υποκείμενος συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία των συνόλων να είναι αναπαραστάσιμος, δηλαδή ισόμορφος με συναρτητή της μορφής $T \to G(T)$ για κάποιο αντικείμενο G της $\mathcal{C}$.

Σε αυτό το πλαίσιο αν G, G' είναι αντικείμενα ομάδας το να δώσουμε έναν μορφισμό $\phi : G \to G'$ είναι το ίδιο με το να δώσουμε έναν ομομορφισμό των συναρτητών που αναπαριστούν, δηλαδή για κάθε $T \in \mathcal{C}$ να δώσουμε έναν ομομορφισμό ομάδων:

$$\phi_T : G(T) \longrightarrow G'(T)$$

ώστε $f^* \circ \phi_t = \phi_{T'} \circ f^*$ για κάθε μορφισμό $f : T' \to T$ αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Μπορούμε να πάρουμε την $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G') = G'(G)$ ως την εικόνα της ταυτότητας στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) = G(G)$ μέσω της συνάρτησης $\phi_G : G(G) \to G'(G)$.

Έστω $\phi : G \to G'$ ένας ομομορφισμός από αντικείμενα ομάδας στην $\mathcal{C}$. Ορίζουμε τον πυρήνα της ϕ να είναι ένας ομομορφισμός από αντικείμενα ομάδας $\alpha : H \to G$, ώστε για κάθε αντικείμενο T της $\mathcal{C}$ η ακολουθία

$$0 \longrightarrow H(T) \xrightarrow{\alpha_*} G(T) \xrightarrow{\phi_*} G'(T)$$

να είναι ακριβής. Ένα τέτοιο στοιχείο υπάρχει αν το παρακάτω γινόμενο υπάρχει στην $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} H = G \times_{G'} S \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\alpha=\pi_1"'] & S \arrow[d, "\epsilon'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι ο κάθετος μορφισμός $\alpha = \pi_1$ ταυτίζει το $H(T)$ με τον πυρήνα του $G(T) \to G(T')$. Πράγματι το $S(T) = \{\pi_T\}$ είναι ένα μονοσύνολο για κάθε T και $\epsilon' \circ \pi_T = \epsilon_T$ είναι η μονάδα στο $G'(T)$. Η ταύτιση αυτή κάνει το $H(T)$ ομάδα και $\pi_1 : H \to G$ είναι ένας πυρήνας για την ϕ.

Δηλαδή αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει γινόμενα, τότε υπάρχει ο πυρήνας της ϕ για κάθε ϕ. Ο πυρήνας είναι μοναδικός μέχρι μοναδικό ισομορφισμό και αν H' είναι ένα αντικείμενο ομάδας στην $\mathcal{C}$, τότε το να δώσουμε έναν ομομορφισμό $H' \to H$ είναι το ίδιο με το να δώσουμε έναν ομομορφισμό $H' \to G$ ο οποίος όταν συντεθεί με τον ϕ δίνει τον τετριμμένο ομομορφισμό,

$$H' \longrightarrow S \xrightarrow{\epsilon'} G',$$

δηλαδή η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H', H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H', G)$$

είναι ακριβής.

IV.7.1 Συμπυρήνες

Η μελέτη των συμπυρήνων είναι σημαντικά δυσκολότερη από αυτή των πυρήνων. Ο συναρτητής

$$T \longmapsto \mathrm{Coker}(\phi_T) = G'(T)/\phi G(T)$$

σπανίως είναι αναπαραστάσιμος. Η κατάσταση είναι ανάλογη με αυτή των sheaves αβελιανών ομάδων, όπου αν ορίσουμε τον συμπυρήνα με τον αφελή τρόπο, δεν παίρνουμε sheaves. Στην περίπτωση που τα αντικείμενα ομάδας είναι αντιμεταθετικά, ορίζουμε τον συμπυρήνα ως ένα αντικείμενο ομάδας H εφοδιασμένο με έναν ομομορφισμό $G' \to H$ ώστε για κάθε αντικείμενο ομάδας H' η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, H') \longrightarrow \mathrm{Hom}(G', H') \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, H')$$

να είναι ακριβής. Η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου αντικειμένου H δεν είναι εύκολη. Για την περίπτωση που $\mathcal{C}$ είναι η κατηγορία των σχημάτων πάνω από το S το πρόβλημα λύθηκε από τον Grothendieck.

IV.7.2 Σχήματα Ομάδας

Σε αυτή την παράγραφο περιοριζόμαστε στην κατηγορία Sch/S των σχημάτων πάνω από ένα σχήμα βάσης S.

Ορισμός IV.7.2. *Ένα σχήμα ομάδας (group scheme) είναι ένα αντικείμενο ομάδας στην* Sch/S. *Θα συμβολίζουμε την κατηγορία των* S*-σχημάτων ομάδας με* (Gr/S).

Άλγεβρες Hopf

Ας υποθέσουμε ότι $S = \mathrm{Spec}(R)$ και θα γράφουμε σε αυτή την περίπτωση Sch/R αντί να γράφουμε $\mathrm{Sch}/\mathrm{Spec}(R)$. Έστω $G = \mathrm{Spec}A$ ένα αφινικό R-σχήμα. Σύμφωνα με την ισοδυναμία που αντιστρέφει τα βέλη ανάμεσα στις κατηγορίες των αντιμεταθετικών R-αλγεβρών και την κατηγορία των αφινικών R-σχημάτων, για να κάνουμε το G ένα R-σχήμα ομάδας, θα πρέπει να δώσουμε ομομορφισμούς R-αλγεβρών

$$\widetilde{m} : A \longrightarrow A \otimes_R A, \quad \widetilde{\epsilon} : A \longrightarrow R, \quad \widetilde{\mathrm{inv}} : A \longrightarrow A,$$

οι οποίοι να αντιστοιχούν στους μορφισμούς $m, \epsilon, \mathrm{inv}$, οι οποίοι κάνουν τα διαγράμματα (IV.11), (IV.12), (IV.13) αντιμεταθετικά, αντιστρέφοντας όμως τη φορά από τα βέλη.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R A \otimes_R A = A \otimes_R (A \otimes_R A) \arrow[d, equal] & & A \otimes_R A \arrow[ll, "\mathrm{Id}\otimes_R \widetilde{m}"'] \\
(A \otimes_R A) \otimes_R A & & \\
A \otimes_R A \arrow[u, "\widetilde{m}\otimes_R \mathrm{Id}"'] & & A \arrow[ll, "\widetilde{m}"] \arrow[uu, "\widetilde{m}"']
\end{tikzcd} \tag{IV.15}$$

$$\begin{tikzcd}
A = A \otimes_R R \arrow[d, equal] & A \otimes_R A \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes_R \widetilde{\epsilon}"'] \\
R \otimes_R A & \\
A \otimes_R A \arrow[u, "\widetilde{\epsilon}\otimes_R \mathrm{Id}"'] & A \arrow[l, "\widetilde{m}"] \arrow[uu, "\widetilde{m}"'] \arrow[uul]
\end{tikzcd} \tag{IV.16}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R A \arrow[d, "\widetilde{\Delta}"'] & A \otimes_R A \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{inv}}\otimes_R \mathrm{Id}"'] \\
A & A \arrow[l, "\widetilde{\epsilon}\circ\pi"'] \arrow[u, "\widetilde{m}"]
\end{tikzcd} \tag{IV.17}$$

Στο παραπάνω διάγραμμα η $\widetilde{D} : A \times_R A \to A$ είναι η συνάρτηση που επάγεται από τον πολλαπλασιασμό στον δακτύλιο R. Η συνάρτηση $\widetilde{m}$ λέγεται συνπολλαπλασιασμός (comultiplication), η $\widetilde{e}$ λέγεται augmentation ή συνμονάδα (counit), ενώ η $\widetilde{\mathrm{inv}}$ λέγεται αντίποδας.

Μία αντιμεταθετική R-άλγεβρα A με μονάδα εφοδιασμένη με τους παραπάνω ομομορφισμούς $\widetilde{m}, \widetilde{e}, \widetilde{\mathrm{inv}}$ που ικανοποιεί τα παραπάνω αντιμεταθετικά διαγράμματα λέγεται αντιμεταθετική Hopf άλγεβρα. Η κατηγορία των αντιμεταθετικών R-σχημάτων ομάδας είναι αντίισοδύναμη με την κατηγορία των αντιμεταθετικών Hopf αλγεβρών πάνω από τον R.

Το augmentation ιδεώδες

Έστω $G = \mathrm{Spec}(A)$ ένα αφινικό R-σχήμα ομάδας. Ο πυρήνας της augmentation συνάρτησης $\widetilde{e}$ είναι ένα ιδεώδες I_G στο A το οποίο ονομάζεται augmentation ιδεώδες. Ως R-module ισχύει ότι

$$A = R \cdot 1_R \oplus I_G$$

αφού η κανονική συνάρτηση $R \to A$ διαχωρίζει την ακριβή ακολουθία

$$0 \to I \to A \to R \to 0$$

Συνεπώς

$$A \otimes A = R \oplus (I \otimes 1) \oplus (1 \otimes I) \oplus (I \otimes I).$$

Ισχύει ότι
$$\widetilde{m}(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f \in I \otimes I, \text{ για } f \in I,$$
όπως βλέπει κανείς εφαρμόζοντας τις συναρτήσεις $\widetilde{\epsilon} \otimes \mathrm{Id}$ και $\mathrm{Id} \otimes \widetilde{\epsilon}$ των οποίων οι πυρήνες $I \otimes A$ και $A \otimes I$ έχουν τομή $I \otimes I$.

IV.7.3 Κατασκευή αφινικών σχημάτων ομάδας

Έστω $G = \mathrm{Spec} A$ ένα αφινικό σχήμα πάνω από τον δακτύλιο R. Για να δώσουμε στο G τη δομή ενός R-σχήματος ομάδας αρκεί να δώσουμε δομή ομάδας στον συνάρτητη
$$T \longmapsto G(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/R}(T, G)$$
από τα R-σχήματα T στα σύνολα. Θα πρέπει να κατασκευαστεί ο m, να αποδειχθεί η ύπαρξη των ϵ και inv και να αποδειχτεί ότι τα διαγράμματα (IV.11), (IV.12), (IV.13) είναι αντιμεταθετικά.

Τη συνάρτηση m την κατασκευάζουμε ως σύνθεση των προβολών p_1, p_2 στην ομάδα $G(G \times G)$ και παρόμοια την ϵ και inv. Αφού το G είναι αφινικό μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που το T είναι επίσης αφινικό. Αν $T = \mathrm{Spec} B$, τότε γράφουμε
$$G(B) = G(T) = \mathrm{Hom}_{R-\text{άλγεβρες}}(A, B).$$
Οπότε για να κάνουμε το G ένα R-σχήμα ομάδας αρκεί να κάνουμε τον συναρτητή
$$B \longmapsto \mathrm{Hom}_{R-\text{άλγεβρες}}(A, B)$$
έναν συναρτητή από τις R-άλγεβρες στις ομάδες. Τότε ο συνπολλαπλασιασμός
$$\widetilde{m} : A \to A \otimes_R A$$
προκύπτει από τη σύνθεση στην ομάδα $\mathrm{Hom}_{R-\text{άλγεβρες}}(A, A \otimes_R A)$ των συναρτήσεων
$$\widetilde{\pi}_1 : a \longmapsto a \otimes 1 \text{ και } \widetilde{\pi}_2 : a \longmapsto 1 \otimes a.$$

Παράδειγμα IV.7.3. *Το σχήμα $\mathbb{G}_a$. Θεωρούμε το $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec} R[u]$. Για κάθε αντιμεταθετική R-άλγεβρα η συνάρτηση $f \mapsto f(u)$ ταυτίζει*
$$\mathrm{Hom}_{R-\text{άλγεβρες}}(R[u], B) \cong B$$
Η δομή προσθετικής ομάδας του B, για διαφορετικές άλγεβρες B κάνει το $\mathbb{G}_a$ ένα R-σχήμα ομάδας όπου ο συνπολλαπλασιασμός δίνεται από τα
$$\begin{aligned} \widetilde{m}(u) &= u \times 1 + 1 \times u, \\ \widetilde{\epsilon} &= 0, \\ \widetilde{\mathrm{inv}}(u) &= -u \end{aligned}$$

Παράδειγμα IV.7.4. *Το σχήμα $\mathbb{G}_m$. Θεωρούμε το $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec} R[u, u^{-1}]$. Για κάθε R-άλγεβρα B η συνάρτηση $f \mapsto f(u)$ ταυτίζει το $\mathrm{Hom}_{R-\text{άλγεβρες}}(R[u, u^{-1}], B)$ με την πολλαπλασιαστική ομάδα B^* των αντιστρόφων στοιχείων του B. Με αυτό τον τρόπο, το $\mathbb{G}_m$ γίνεται ένα R-σχήμα ομάδας με*
$$\begin{aligned} \widetilde{m}(u) &= (u \times 1)(1 \times u) = u \times u \\ \widetilde{\epsilon} &= 1, \\ \widetilde{\mathrm{inv}}(u) &= u^{-1}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα IV.7.5. *Η γενική γραμμική ομάδα* GL_n. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *και έστω* $U = (u_{ij})$ *και* $V = (v_{ij})$ *πίνακες με στοιχεία ανεξάρτητες μεταβλητές. Στον πολυωνυμικό δακτύλιο με* $2n^2$ *μεταβλητές*

$$R[u, v] = R[u_{11}, u_{12}, \ldots, v_{nn}],$$

θεωρούμε το ιδεώδες J *το οποίο παράγεται από τα* n^2 *στοιχεία του πίνακα* $UV - \mathbb{I}_n$ *και θέτουμε*

$$A = R[u, v]/J.$$

Τότε το $f \mapsto f(U)$ *δίνει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στα* $\mathrm{Hom}_{R-\acute{\alpha}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\varepsilon\varsigma}(A, B)$ *και της ομάδας* $\mathrm{GL}_n(B)$ *των αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το* B. *Το* $\mathrm{Spec}(A)$ *είναι ένα* R*-σχήμα ομάδας το οποίο θα το συμβολίζουμε με* GL_n. *Για* $n = 1$ *έχουμε* $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$.

IV.8 Ασκήσεις

1. Στην κατηγορία των συνόλων (Sets), για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $q_1 : X \to Z$, $q_2 : Y \to Z$, δείξτε ότι το ινώδες γινόμενο $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ υπάρχει και ότι
$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y : q_1(x) = q_2(y)\}.$$

2. Σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και για έναν μορφισμό $p : X \to Z$ και για τον ταυτοτικό μορφισμό $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$ αποδείξτε ότι το ινώδες γινόμενο $X \times_Z Z$ υπάρχει και ότι $X \times_Z Z \cong X$.

3. Για ένα αντικείμενο X σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ορίζουμε τον συναρτητή $h_X(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$. Τότε για $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ορίζουμε τη συνάρτηση
$$\phi : \mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$
με
$$\phi(\eta) = \eta(X)(\mathrm{Id}_X) \in h_Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$
Δείξτε ότι η ϕ είναι 1-1 και επί.

4. Έστω L μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση ενός σώματος K και $\overline{K}$ η αλγεβρική κλειστότητα του K. Τότε $X = \mathrm{Spec}L$ και $Y = \mathrm{Spec}\overline{K}$ είναι σχήματα πάνω από το $Z = \mathrm{Spec}K$. Αποδείξτε ότι το $X \times_Z Y$ είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $[L : K]$ το πλήθος αντιγράφων του $\mathrm{Spec}\overline{K}$ (δηλαδή ξένη ένωση σχημάτων).

5. Έστω
$$X_0 = \mathrm{Spe}\mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 + y^2\rangle.$$
   (α΄) Δείξτε ότι το X_0 είναι ακέραιο σχήμα.
   (β΄) Δείξτε ότι το $X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ είναι ανηγμένο αλλά όχι ανάγωγο.
   (γ΄) Δείξτε ότι υπάρχει μόνο ένα $\mathbb{R}$-valued point στο X_0, ενώ υπάρχουν άπειρα $\mathbb{R}$-valued points στο X_0.

6. Δείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα R-valued points στο X (δηλαδή $f : \mathrm{Spec}R \to X$) και στα ζευγάρια (x, g) σημείων $x \in X$ και τοπικών ομοιομορφισμών $g : \mathcal{O}_{X,x} \to R$.

7. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα k-ρητά σημεία του προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ και στα σημεία $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$ του προβολικού χώρου.

Βιβλιογραφία

[1] Eisenbud, D. & Harris, J. *Schemes*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. The language of modern algebraic geometry. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992, pp. xii+157. ISBN: 0-534-17606-2; 0-534-17604-6.

[2] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*. expanded. Vol. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. x+306. ISBN: 3-540-63293-X. URL: https://doi.org/10.1007/b62130.

[3] Tate, J. *Finite flat group schemes. Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*. Springer, New York, 1997, pp. 121–154.

[4] Ueno, K. *Algebraic geometry. 1*. Vol. 185. Translations of Mathematical Monographs. From algebraic varieties to schemes, Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: https://doi.org/10.1090/mmono/185.

[5] Vakil, R. *The rising sea*. 2017, p. 775.

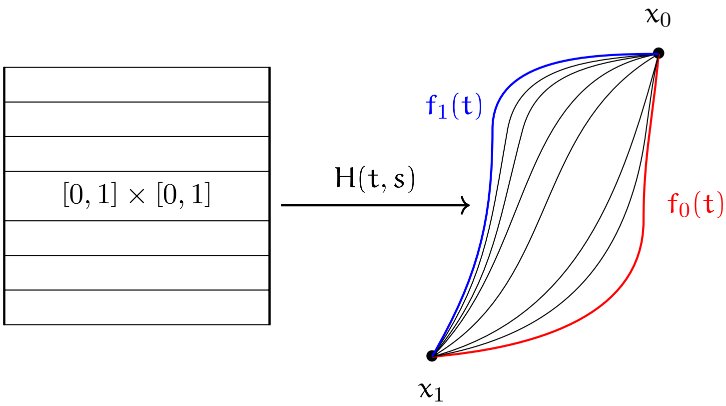
V
Στοιχεία Αλγεβρικής Τοπολογίας

V.1 Πρωταρχική ομάδα

Ορισμός V.1.1. *Ένα μονοπάτι σε έναν τοπολογικό χώρο* X *είναι μια συνεχής συνάρτηση* $f : [0, 1] \to X$*. Δύο μονοπάτια* $f_0, f_1 : [0, 1] \to X$ *είναι ομοτοπικά αν υπάρχει μια οικογένεια μονοπατιών* $f_t : [0, 1] \to X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ *ώστε*

1. $f_t(0) = x_0$, $f_t(1) = x_1$ *για κάθε* $0 \leqslant t \leqslant 1$.
2. *Η συνάρτηση* $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$, *με* $H(t, s) = f_t(s)$ *να είναι συνεχής.*

Θα συμβολίζουμε δύο ομοτοπικά μονοπάτια f_1, f_0 *με* $f_1 \cong f_2$.



Πρόταση V.1.2. *Η σχέση ομοτοπίας είναι σχέση ισοδυναμίας*

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

1. Κάθε μονοπάτι είναι ομοτοπικό με τον εαυτό του, αυτό είναι όμως εύκολο αρκεί να έχουμε $f_t(s) = f(s)$ για κάθε $t \in [0, 1]$.
2. Αν η f_0 είναι ομοτοπική με την f_1, τότε και η f_1 είναι ομοτοπική με την f_0. Πράγματι αρκεί να διατρέξουμε την οικογένεια ανάποδα θεωρώντας την ομοτοπία $H(1 - t, s)$.
3. Αν η f_0 είναι ομοτοπική με την f_1 και η f_1 είναι ομοτοπική με την f_2, πρέπει να δείξουμε ότι η f_0 είναι ομοτοπική με την f_2. Πράγματι έστω $H_1, H_2 : [0, 1]^2 \to X$, με $H_1(0, s) = f_0(s)$,

$H_1(1,s) = f_1(s) = H_2(0,s)$, $H_2(1,s) = f_2(s)$. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} H : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto \begin{cases} H_1(2t,s) & \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H_2(2t-1,s) & \text{αν } 1/2 < t \leqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση H είναι συνεχής και αποτελεί μια ομοτοπία ανάμεσα στις f_0 και f_2.

□

Ορισμός V.1.3. *Η πρωταρχική ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ για ένα σημείο $x_0 \in X$ είναι το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $\gamma : [0,1] \to X$ ώστε $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Η πράξη ομάδας δίνεται με τη σύνθεση δύο αντιπροσώπων των κλάσεων ομοτοπίας. Δηλαδή αν $f : [0,1] \to X$ και $g : [0,1] \to X$ δύο συνεχή μονοπάτια που αντιστοιχούν στις κλάσεις ομοτοπίας $[f]$ και $[g]$, τότε ορίζουμε το μονοπάτι $[f][g]$ ως την κλάση ομοτοπίας του μονοπατιού*

$$f \cdot s = \begin{cases} f(2s) & \textit{αν } 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ g(2s-1) & \textit{αν } 1/2 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι η πράξη είναι καλά ορισμένη, δηλαδή αν f είναι ομοτοπικό με f' και g ομοτοπικό με g' τότε και το $f \cdot g$ είναι ομοτοπικό με το $f' \cdot g'$. (Άσκηση)

Όπως αναφέρει και ο ορισμός, το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ γίνεται ομάδα με πράξη τη σύνθεση μονοπατιών:

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(X,x_0) \\ ([f],[g]) &\longmapsto [f] \cdot [g]. \end{aligned}$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι η κλάση των μονοπατιών που είναι ομοτοπικά με το $e : [0,1] \to X$, $e(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$. Τέλος, το αντίστροφο του $f(t)$ είναι το $f(1-t)$.

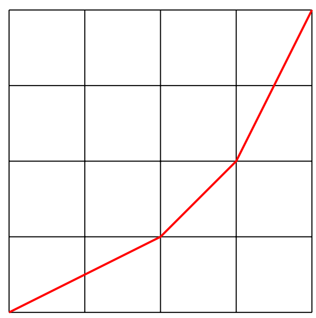
Επίσης, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για f, g, h μονοπάτια ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

$$[f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h]).$$

Γι αυτό παρατηρούμε ότι μια αναπαραμέτρηση ενός μονοπατιού, δηλαδή μια σύνθεση $f \circ \phi : [0,1] \to X$, όπου $\phi : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής με $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 1$. Τα μονοπάτια $[f]$ και $[f \circ \phi]$ είναι ομοτοπικά και μια ομοτοπία είναι η

$$H(t,s) = f \circ \phi_t, \phi_t(s) = (1-t)\phi(s) + ts.$$

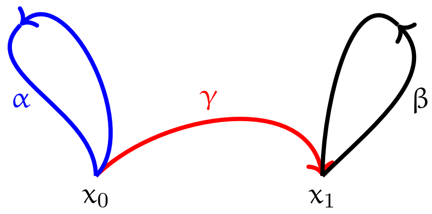
Παρατηρούμε ότι η $f \cdot (g \cdot h)$ είναι μια αναπαραμέτρηση της $(f \cdot g) \cdot h$ από την παρακάτω κατά τμήματα γραμμική συνεχή συνάρτηση:



Παρατήρηση V.1.4. *Η πρωταρχική ομάδα εξαρτάται από το σημείο βάσης x_0. Σε έναν κατά μονοπάτια συνεκτικό χώρο οι ομάδες $\pi_1(X, x_0)$ και $\pi_1(X, x_1)$ είναι ισόμορφες.*

Πράγματι αν γ είναι ένα μονοπάτι που συνδέει το x_0 με το y_0 και $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε έχουμε τον ισομορφισμό

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}] \end{aligned}$$



Η αντίστροφη συνάρτηση $\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ ορίζεται να είναι η $\pi_1(X, x_1) \ni [\beta] \mapsto [\gamma^{-1}\beta\gamma]$.

V.1.1 Συναρτησιακή Θεώρηση

Πρόταση V.1.5. *Έστω ϕ μια συνεχής συνάρτηση $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ η οποία στέλνει το x_0 στο y_0. Τότε επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων*

$$\begin{aligned} \phi_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\longmapsto [\phi f] \end{aligned}$$

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι η ϕ μεταφέρει κλειστά μονοπάτια στο x_0 (βρόγχους) σε κλειστά μονοπάτια στο y_0. Επίσης, δύο ομοτοπικά μονοπάτια στο x_0 μέσω της ομοτοπίας $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ θα γίνουν ομοτοπικά στο Y μέσω της ομοτοπίας $\phi \circ H$. Η δομή ομάδας με τη διαδοχική σύνθεση των μονοπατιών επίσης διατηρείται. □

Παρατήρηση V.1.6. *Αν*

$$(X, x_0) \xrightarrow{\psi} (Y, y_0) \xrightarrow{\phi} (Z, z_0),$$

τότε $(\phi\psi)_* = \phi_*\psi_*$. Επίσης $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$, δηλαδή ο ταυτοτικός ομοιομορφισμός $X \to X$, επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό στην πρωταρχική ομάδα.

Θεώρημα V.1.7. *Θεωρούμε την κατηγορία των pointed τοπολογικών χώρων που έχει ως αντικείμενα (X, x_0) τοπολογικούς χώρους με ένα επιλεγμένο σημείο και συναρτήσεις τις συνεχείς συναρτήσεις που διατηρούν τα σημεία, $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $\phi(x_0) = y_0$.*

Η πρωταρχική ομάδα είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία των pointed τοπολογικών χώρων στην κατηγορία των ομάδων.

V.1.2 Το θεώρημα του Van-Kampen

Έστω $(G_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια από ομάδες και για κάθε ζευγάρι (i, j), έστω $F_{i,j}$ ένα σύνολο ομομορφισμών από το G_i στο G_j. Θεωρούμε το ευθύ όριο

$$G = \lim_{\to} G_i,$$

το οποίο έρχεται εφοδιασμένο με μια οικογένεια ομομορφισμών $f_i : G_i \to G$, ώστε $f_j \circ f = f_i$ για κάθε $f \in F_{i,j}$.

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "f_i"'] \arrow[drr, "h_i"] & & \\
& G \arrow[r, dotted] & H \\
G_i \arrow[ur, "f_j"] \arrow[urr, "h_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό του ευθέος ορίου αυτό είναι universal υπό την έννοια ότι για κάθε ομάδα H και συναρτήσεις $h_i : G \to H$, ώστε $h_i \circ f = h_j$ για κάθε $f \in F_{ij}$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h : G \to H$ με $h_i = h \circ f_i$. Ο τελευταίος ορισμός μας δίνει ότι

$$\mathrm{Hom}(G, H) \cong \lim_{\leftarrow} \mathrm{Hom}(G_i, H),$$

όπου το αντίστροφο όριο υπολογίζεται ως προς τα F_{ij}. Με άλλα λόγια η ομάδα G αναπαριστά τον συναρτητή:

$$H \longmapsto \lim_{\leftarrow} \mathrm{Hom}(G_i, H).$$

Πρόταση V.1.8. *Το ζευγάρι $(G, (f_i)_{i \in I})$ υπάρχει και είναι μοναδικό μέχρι μοναδικό ισομορφισμό.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα είναι σαφής από την universal ιδιότητα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια ομάδα G ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο όλων των γεννητόρων των ομάδων G_i. Στη συνέχεια θεωρούμε τις σχέσεις xyz^{-1}, όπου x, y, z ανήκουν στην ίδια ομάδα G_i και $z = xy$ στην G_i και επίσης τις σχέσεις xy^{-1}, όπου $x \in G_i$ και $y \in G_j$ ώστε $y = f(x)$ για τουλάχιστον μία συνάρτηση $f \in F_{ij}$. □

Παράδειγμα V.1.9. *Θεωρούμε τις ομάδες A, G_1, G_2 και δύο ομομορφισμούς ομάδων $f_1 : A \to G_1$, $f_2 : A \to G_2$. Η ομάδα G της προηγούμενης πρότασης λέγεται το αμάλγαμα της A στις G_1 και G_2 μέσω των f_1, f_2 και συμβολίζεται με $G_1 \star_A G_2$.*

Θεώρημα V.1.10 (Van Kampen). *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος καλύπτεται από δύο ανοιχτά σύνολα U_1 και U_2. Υποθέτουμε ότι τα $U_1, U_2, U_12 = U_1 \cap U_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικά, δηλαδή δύο οποιαδήποτε σημεία τους ενώνονται με κάποιο μονοπάτι. Τότε για κάποιο σημείο $x_0 \in U_1 \cap U_2$, έχουμε*

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_{12}, x_0)} \pi_2(U_2, x_0),$$

όπου το αμάγαλμα θεωρείται με βάση τους ομομορφισμούς:

$$\begin{tikzcd} & (U_1, x_0) & & & \pi_1(U_1, x_0) \\ (U_{12}, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & & \pi_1(U_{12}, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \\ & (U_2, x_0) & & & \pi_1(U_2, x_0) \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

η οποία ορίζεται να στέλνει μια λέξη $[f_1][f_2] \cdots [f_r]$ του ελευθέρου γινομένου, όπου τα $[f_i]$ είναι κλάσεις ομοτοπίας εξ ολοκλήρου μέσα στο U_1 ή στο U_2 στην αντίστοιχη κλάση ομοτοπίας μέσω της $(i_1)_*$ ή $(i_2)_*$ στο X.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι η ϕ είναι επιμορφισμός και ότι ο πυρήνας της αποτελείται από τις σχέσεις αμαλγάματος που επιβάλλει η υποομάδα $\pi_1(U_{12}, x_0)$.

Θα παραλείψουμε την κάπως τεχνική απόδειξη την οποία ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει σε βιβλία αλγεβρικής τοπολογίας, για παράδειγμα [2, λήμμα 1.15, Θεωρ. 1.20]. □

V.2 Θεωρία καλυπτικών απεικονίσεων

Ορισμός V.2.1. *Μία deformation retract ενός τοπολογικού χώρου* X *σε έναν υπόχωρο* A*, είναι μια οικογένεια συναρτήσεων* $f_t : X \to X$, $t \in [0,1]$ *ώστε* $f_0 = \mathrm{Id}_X$, $f_1(X) = A$ *και* $f_t|_A = \mathrm{Id}_A$. *Η οικογένεια πρέπει να είναι συνεχής, δηλαδή η*

$$\begin{aligned} X \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

θέλουμε να είναι συνεχής.

Ορισμός V.2.2. *Μια ομοτοπία* $X \to Y$ *είναι μια οικογένεια από συνεχείς συναρτήσεις* $f_t : X \to Y$, $t \in [0,1]$ *ώστε η*

$$\begin{aligned} F : X \times [0,1] &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\longmapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

να είναι συνεχής. Δύο συναρτήσεις $f_0, f_1 : X \to Y$ *λέγονται ομοτοπικές, αν υπάρχει ομοτοπία που να τις συνδέει.*

Παρατήρηση V.2.3. *Μια deformation retraction είναι ειδική περίπτωση ομοτοπίας ανάμεσα στην ταυτοτική συνάρτηση* $X \to X$ *και σε μία retraction* $r : X \to X$, $r(X) = A$, $r|_A = \mathrm{Id}_X$.

Οι retractions ικανοποιούν τη σχέση $r^2 = r$*, η οποία εξασφαλίζει ότι είναι ταυτότητες αν περιοριστούν στην εικόνα τους και αποτελούν το τοπολογικό ανάλογο των προβολών.*

Πρόταση V.2.4. *Αν υπάρχει deformation retract από τον χώρο* X *σε έναν υπόχωρο* A*, τότε ο ομομορφισμός* $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *που επάγεται από τον εγκλεισμό* $i : A \to X$ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $r : X \to A$ για την οποία ισχύει $ri = \mathrm{Id}_A$, οπότε $r_* i_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,x_0)}$, συνεπώς η i_* είναι $1-1$.

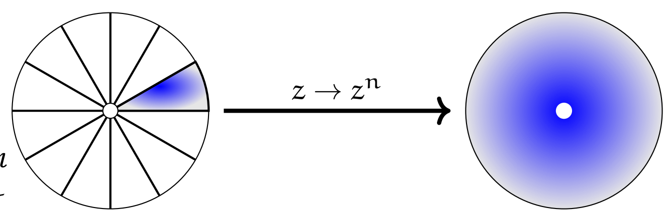
Αν $r_t : X \to X$ είναι deformation retraction του X στο A, οπότε $r_0 = \mathrm{Id}_X$ και $r_t|_A = \mathrm{Id}_A$, $r(X) \subset A$. Για κάθε βρόγχο γ με αρχή και τέλος το x_0 στον X το $r_t\gamma$ δίνει έναν ομοτοπικό βρόγχο εξ ολοκλήρου μέσα στο A, οπότε η i_* είναι και επιμορφισμός. □

Ορισμός V.2.5. *Ένας χώρος επικάλυψης* Y *του τοπολογικού χώρου* X *είναι ένας τοπολογικός χώρος* Y *μαζί με μία συνεχή συνάρτηση* $f : Y \to X$*, ώστε κάθε σημείο* $x \in X$ *να έχει ανοιχτή περιοχή* U *και επιπλέον* $f^{-1}(U)$ *είναι ξένη ένωση συνόλων* V_i, $i \in I$*, ώστε κάθε ένα από αυτά να απεικονίζεται ομοιομορφικά μέσω της* f *στο* U.

Παράδειγμα V.2.6. *Η συνάρτηση* $\mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *είναι μία καλυπτική απεικόνιση. Το τυχαίο σημείο* $x \mod \mathbb{Z}$ *έχει προεικόνες τα ανοιχτά* $(x-\epsilon, x+\epsilon)+n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα V.2.7.
Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$



είναι καλυπτική απεικόνιση. Παρατηρήστε ότι κάθε «φέτα» γωνίας $2\pi/n$ *με ύψωση στην* n *απλώνεται και καλύπτει τον πλήρη δίσκο.*

Παράδειγμα V.2.8. *Η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z = x + iy &\longmapsto \exp z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \end{aligned}$$

είναι μια καλυπτική απεικόνιση.

Λήμμα V.2.9. *Αν $p : X \to Y$ είναι ένα κάλυμμα και το Y είναι συνεκτικό και $p^{-1}(y_0)$ έχει n το πλήθος σημεία, τότε για κάθε $p \in Y$ $p^{-1}(y) = n$.*

Απόδειξη. Έστω $A := \{y \in Y : \#p^{-1}(y) = n\}$. Προφανώς $A \neq \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $A \cap (Y \backslash A) = \emptyset$, $A \cup (Y \backslash A) = Y$. Από τον ορισμό της συνεκτικότητας θα έχουμε τελειώσει, αν αποδείξουμε ότι τα A και $Y \backslash A$ είναι και τα δύο ανοιχτά.

Πράγματι, έστω $y \in A$ και διαλέγω μια περιοχή U του y της οποίας η αντίστροφη εικόνα να είναι ξένη ένωση ανοικτών ομοιομορφικών με το U. Το πλήθος τους είναι ίσο με n αφού το $p^{-1}(y)$ τέμνει κάθε ένα από αυτά τα ανοιχτά ακριβώς μια φορά και εξ ορισμού $\#p^{-1}(y) = n$. Έστω $y' \in U$, έχουμε $p^{-1}(y') \subset p^{-1}(U) = \sqcup_{i=1}^n V_i$ και $p|_{V_i}$ είναι ομοιομορφισμός, συνεπώς $\#p^{-1}(y') = n$ και $x \in A$. Άρα A είναι ανοικτό.

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το $Y \backslash A$ είναι ανοικτό. □

Ορισμός V.2.10. *Το κοινό πλήθος των ινών $\pi^{-1}(y)$ $y \in Y$ θα λέγεται πλήθος των φύλλων του καλύμματος.*

Λήμμα V.2.11. *Για κάθε απεικόνιση επικάλυψης $Y \to X$ ισχύουν τα εξής:*

1. *Για κάθε μονοπάτι $\gamma : [0,1] \to X$ με αρχή το $x_0 \in X$ και κάθε $x_0' \in f^{-1}(x_0)$ υπάρχει μοναδική ανύψωση $\gamma' : [0,1] \to Y$ με $\gamma'(0) = x_0'$.*

2. *Για κάθε ομοτοπία $f_t(s) : [0,1] \to X$ μονοπατιών $t \in [0,1]$ που ξεκινάνε από το x_0 και κάθε $x_0' \in f^{-1}(x_0)$ υπάρχει μοναδική ομοτοπία ανύψωσης $f_t' : [0,1] \to X$ μονοπατιών που να ξεκινάνε από το x_0'.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε μια γενικότερη μορφή του λήμματος:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $F : Z \times [0,1] \to x$ και $F'' : Z \times \{0\} \to Y$ η οποία ανυψώνει την $F|_{Z \times \{0\}} : Z \times \{0\} \to X$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $F' : Z \times [0,1] \to Y$ η οποία επεκτείνει την F' και ανυψώνει την F.

Το 1. προκύπτει αρκεί να πάρουμε ως Z ένα σημείο και το 2. προκύπτει αν πάρουμε ως $Z = [0,1]$. Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της F'' εφαρμόζουμε το 1.

Για να αποδείξουμε τη γενική μορφή του λήμματος τώρα. Για ένα σημείο $(z_0, t) \in Z \times [0,1]$ διαλέγουμε μια μικρή γειτονιά του U_t ώστε η εικόνα να περιέχεται σε ένα μικρό ανοιχτό $V \subset X$ που να αντιστρέφεται ως ξένη ένωση μέσω της f. Αφού το $\{z_0\} \times [0,1]$ είναι συμπαγές, αρκούν περασμένα το πλήθος τέτοια σύνολα για να καλύψουν το $\{y_0\} \times [0,1]$. Μπορούμε να διαλέξουμε ένα U ανεξάρτητο του t και μια διαμέριση

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1,$$

ώστε για κάθε i το $F(U \times [t_i, t_{i+1}])$ να περιέχεται σε μία περιοχή V_i της οποίας η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V_i)$ να είναι ξένη ένωση ανοιχτών ομοιομορφικών συνόλων με το V. Αν έχουμε ήδη κατασκευάσει την ανύψωση F' στο $U \times [0, t_i]$ μπορούμε να την κατασκευάσουμε και στο $U \times [0, t_{i+1}]$ αφού το $F(U \times [t_i, t_{i+1}])$ βρίσκεται μέσα στο V_i το οποίο απεικονίζεται ομοιομορφικά σε όλα τα ανοιχτά που δίνουν ως ξένη ένωση το $f^{-1}(V_i)$. Η ύπαρξη της F' στο πρώτο αρχικό βήμα δίνεται μέσω της F'' την οποία την έχουμε υποθέσει.

Για τη μοναδικότητα θα αποδείξουμε πρώτα την περίπτωση που Z είναι ένα σημείο. Αν F_1', F_2' είναι δύο lifts της $F : [0,1] \to X$ ώστε $F_1'(0) = F_2'(0)$. Και πάλι διαλέγουμε μια διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ του $[0,1]$ ώστε κάθε $F([t_i, t_{i+1}])$ να πέφτει μέσα σε αρκετά μικρή περιοχή U_i της οποίας η $f^{-1}(U_i)$ να είναι ξένη ένωση ομοιομορφικών συνόλων με το U_i. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι $F_1' = F_2'$ στο $[0, t_i]$. Αφού το $[t_i, t_{i+1}]$ είναι συνεκτικό, το ίδιο είναι και το $F_1'([t_i, t_{i+1}])$ το οποίο συνεπώς περιέχεται σε ένα από τα ομοιομορφικά με το U_i ανοιχτά της $f^{-1}(U_i)$. Το ίδιο και το $F_2'([t_i, t_{i+1}])$ και μάλιστα θα πρέπει να ανήκει στο ίδιο με το F_1', αφού η επαγωγική υπόθεση εξασφαλίζει ότι $F_1'(t_i) = F_2'(t_i)$. Αφού όμως η f είναι ομοιομορφισμός περιοριζόμενη στην προεικόνα που βρίσκονται τα $F_i'(t_i)$ και η $f \circ F_1' = f \circ F_2'$ έχουμε ότι $F_1' = F_2'$ και στο $[t_i, t_{i+1}]$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν η F' είναι μοναδική όταν περιοριστεί σε σύνολα της μορφής $\{z\} \times [0,1]$ θα είναι μοναδική και σε όλο το z. Η συνέχεια της F' είναι τοπική ιδιότητα και ισχύει από την κατασκευή της. □

Πρόταση V.2.12. *Αν $f : Y \to X$ είναι μια επικάλυψη και $f(y_0) = x_0$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x)$ είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Αν γ είναι ένας βρόγχος από το y_0 και $f_*[\gamma] = e$, τότε υπάρχει μια ομοτοπία H από το $f \circ \gamma$ με το σταθερό μονοπάτι $e(t) = x_0$ για κάθε $t \in [0,1]$. Η ομοτοπία αυτή ανασηκώνεται σε μία ομοτοπία H' από το γ. Η ομοτοπία $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ απεικονίζει τις δύο πλάγιες πλευρές και την κάτω πλευρά του $[0,1] \times [0,1]$ στο x_0. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων μονοπατιών, η H' θα απεικονίζει τις τρεις πλευρές του τετραγώνου στο σημείο y_0. Συνεπώς είναι ομοτοπία του γ με το σταθερό μονοπάτι $e'(t) = y_0$ για κάθε $t \in [0,1]$ και η f_* είναι 1-1. □

Παρατήρηση V.2.13. *Αν το γ είναι ένας βρόγχος στο x_0 και γ' είναι η μοναδική ανύψωση που ξεκινάει από το $y_0 \in f^{-1}(x_0)$, είναι σαφές ότι το $\gamma'(1) \in f^{-1}(x_0)$, αλλά μπορεί το $\gamma'(1) \neq \gamma'(0) = y_0$. Ισχύει ότι $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ αν και μόνο αν $[\gamma] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Πράγματι αν $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, τότε το γ' είναι ένας κλειστός βρόγχος που προβάλλεται στο γ και $f_*([\gamma']) = [\gamma]$. Αντιστρόφως, αν υπάρχει κάποιος γ'' κλειστός βρόχγος με $f_*[\gamma''] = [\gamma]$, τότε το $f\gamma''$ είναι ομοτοπικό με το $f\gamma'$ και η ομοτοπία τους ανεβαίνει σε ομοτοπία των γ', γ'' και συνεπώς τελειώνουν και οι δύο στο ίδιο σημείο.

Παρατήρηση V.2.14. *Αν γ_1, γ_2 είναι δύο μονοπάτια από το x_0 στο x_1 και γ_1', γ_2' είναι ανυψώσεις που ξεκινάνε από το $y_0 \in f^{-1}(x_0)$, τελειώνουν στο ίδιο σημείο αν και μόνο αν $[\gamma_1\gamma_2^{-1}]$ ανήκει στην εικόνα του $f_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Πράγματι αν τα γ_1', γ_2' τελειώνουν στο ίδιο σημείο, τότε θεωρώντας την $\gamma_1'(\gamma_2')^{-1}$ έχουμε το ζητούμενο από την προηγούμενη παρατήρηση. Αντιστρόφως, και πάλι από την προηγούμενη παρατήρηση, η μοναδική ανύψωση του $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ που ξεκινάει από ένα σημείο του π^{-1} πρέπει να τελειώσει στο ίδιο σημείο. Συνεπώς η $(\gamma_1')^{-1}\gamma_2'$, ξεκινάει από το $\gamma_1'(1)$ και τελειώνει στο $\gamma_2'(1)$, τα οποία πρέπει να ταυτίζονται.

Παρατήρηση V.2.15. *Αν $y_0, y_1 \in f^{-1}(x_0)$ και τα y_0 και y_1 συνδέονται με ένα μονοπάτι στο Y, τότε οι εικόνες $f_*\pi_1(Y, y_i)$, $i = 0, 1$ είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi_1(X, x_0)$.*

Πράγματι αν γ είναι μονοπάτι που συνδέει το y_0 με το y_1, τότε αυτό θα προβληθεί σε κλειστό μονοπάτι του X από το x_0. Συνεπώς

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = [f \circ \gamma] f_*(\pi_1(Y, y_1)) [f \circ \gamma]^{-1}.$$

Ορισμός V.2.16. *Δίνεται ένα κάλυμμα $f : Y \to X$ ένα στοιχείο $x_0 \in X$. Τότε ορίζεται μια δράση ομάδας:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow f^{-1}(x_0) \\ (y, [\sigma]) &\longmapsto y * [\sigma] \end{aligned}$$

όπου το $y * [\sigma]$ είναι το τελικό σημείο του ανορθωμένου μονοπατιού σ' που ξεκινάει από το y.

Παρατήρηση V.2.17. *Η παραπάνω δράση είναι καλά ορισμένη αφού ομοτοπικοί βρόγχοι σ, σ_1 στο x_0 θα ανυψωθούν σε ομοτοπικούς βρόγχους και θα καταλήγουν στο ίδιο σημείο.*

Επίσης, από τον τρόπο σύνθεσης μονοπατιών στην ομάδα και τον ορισμό της δράσης είναι σαφές ότι

$$\begin{aligned} y * ([\sigma][\tau]) &= y * [\sigma] * [\tau] \\ y * [e] &= y \end{aligned}$$

Σημείωση V.2.18. *Ο σταθεροποιητής της δράσης του σημείου* $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ *είναι η ομάδα* $f_*(\pi_1(Y, y_0))$. *Επίσης από την κλασική θεωρία δράσεων έχουμε ότι υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του* $f^{-1}(x_0)$ *και στα πλευρικά σύμπλοκα της ομάδας* $\pi_1(X, x_0)/f_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Λήμμα V.2.19. *Έστω* $f : Y \to X$ *ένα κάλυμμα και έστω* Z *ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι* $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 : Z \to Y$ *είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει*

$$f \circ \widetilde{g}_1 = f \circ \widetilde{g}_2,$$

και επιπλέον για ένα τουλάχιστον $z \in Z$ *ισχύει* $\widetilde{g}_1(z) = \widetilde{g}_2(z)$. *Τότε* $\widetilde{g}_1 = \widetilde{g}_2$.

Απόδειξη. Εξ ορισμού συνεκτικό είναι ένα σύνολο το οποίο δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων. Θα έχουμε τελειώσει αν δείξουμε ότι το σύνολο που η $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2$ ταυτίζονται είναι ανοικτό όπως και ότι το σύνολο που η $\widetilde{g_1}, \widetilde{g}_2$ δεν ταυτίζονται είναι επίσης ανοικτό.

Έστω ένα $w \in Z$ το οποίο ανήκει στο υποσύνολο $A \subset Z$ που οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται. Για να δείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό θα πρέπει να βρούμε ανοικτή περιοχή του w η οποία να βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο A. Διαλέγουμε ανοικτή περιοχή U του $f\widetilde{g}_1(w) = f\widetilde{g}_2(w)$ αρκετά μικρή ώστε η προεικόνα της $f^{-1}(U)$ να είναι ξένη ένωση ανοιχτών ομοιομορφικών συνόλων U_a με το U. Τα $\widetilde{g}_i^{-1}(U_a)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του Z και το w ανήκει στο $\widetilde{g}_1^{-1}(U_a) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(U_a)$ για τον ίδιο δείκτη a. Συνεπώς στο ανοιχτό $V = \widetilde{g}_1^{-1}(U_a) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(U_a)$ έχουμε ότι οι συναρτήσεις $\widetilde{g}_1|V = \widetilde{g}_2|V$ ταυτίζονται.

Αν τώρα το w είναι ένα σημείο του υποσυνόλου $B \subset Z$, όπου οι συναρτήσεις δεν ταυτίζονται, δουλεύουμε όπως και πριν, μόνο που τώρα το $w \in \widetilde{g}_1^{-1}(U_a) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(U_b) =: V'$ με $a \neq b$. Το ανοιχτο $V' \subset B$. $\square$

Πρόταση V.2.20. *Υποθέτουμε ότι το* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *είναι ένα κάλυμμα και* $g : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ *είναι συνεχής συνάρτηση, όπου το* Z *είναι συνεκτικό και τοπικά κατά δρόμους συνεκτικό σύνολο. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $\widetilde{g} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ *ώστε* $f \circ \widetilde{g} = g$ *αν και μόνο αν*

$$g_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset f_*(\pi_1(Y, y_0)). \tag{V.1}$$

Μία τέτοια ανύψωση όταν υπάρχει είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έχουμε το παρακάτω σχήμα

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "f"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{g}"] \arrow[r, "g"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, hook, "f_*"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

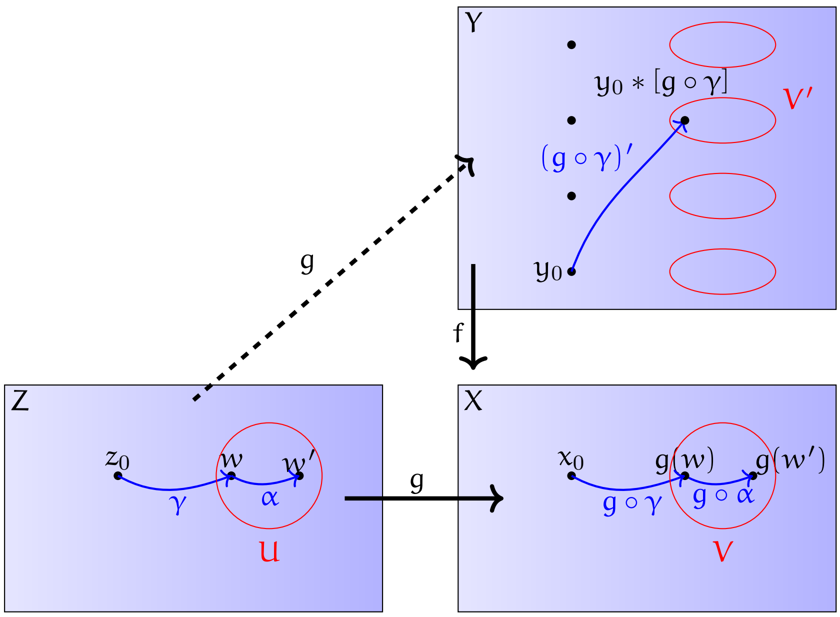
Είναι σαφές ότι αν υπάρχει μία τέτοια συνάρτηση $\widetilde{g}$, τότε αναγκαστικά

$$g_*(\pi_1(Z, z_0)) = f_*(\widetilde{g}_*\pi_1(Z, z_0)) \subset f_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η (V.1). Έστω ένα σημείο $w \in Z$, διαλέγουμε ένα μονοπάτι γ από το z_0 στο w και το μεταφέρουμε στο μονοπάτι του X $g \circ \gamma$ το οποίο είναι ένα μονοπάτι από το $g(z_0) = x_0$ στο $g(w)$. Ορίζουμε $\widetilde{g}(w) = y_0 * [g \circ \gamma]$.

Θέλουμε η κατασκευή αυτή να είναι ανεξάρτητη της επιλογής μονοπατιού γ από το z_0 στο w. Πράγματι αν γ' είναι ένα άλλο μονοπάτι από το z_0 στο w, τότε το $g(\gamma'\gamma^{-1})$ είναι ένας βρόγχος στο x_0. Από την υπόθεση έχουμε ότι $[g(\gamma')g(\gamma)^{-1}]$ είναι στην εικόνα του $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ και συνεπώς η ανύψωση του $g(\gamma')g(\gamma)^{-1}$ είναι ένας βρόγχος στο y_0 το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Για να δείξουμε ότι η $\widetilde{g}$ είναι συνεχής εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε μια ανοιχτή γειτονιά V του $g(w)$ αρκετά μικρή ώστε η προεικόνα της $f^{-1}(V)$ να είναι ξένη ένωση ανοιχτών ομοιομορφικών με το V. Στη συνέχεια διαλέγουμε V' το ανοιχτό που είναι ομοιομορφικό με το V και περιέχει το $\widetilde{g}(w)$. Διαλέγουμε τώρα ένα ανοιχτό κατά δρόμους συνεκτικό $U \subset Z$, ώστε $w \in U$ και $g(U) \subset V$. Είναι σαφές ότι $\widetilde{g}(U) \subset V'$. Πράγματι για κάθε $w' \in U$ βρίσκουμε μονοπάτι α που να συνδέει το w με το w' και, τότε το $\gamma\alpha$ συνδέει το z_0 με το w'. Ανυψώνουμε το $g \circ (\gamma\alpha) = (g \circ \gamma)(g \circ \alpha)$ πρώτα ανυψώνοντας το $g \circ \gamma$ και μετά το $g \circ \alpha$. Αφού η δεύτερη ανύψωση παραμένει στο V', έχουμε ότι $g(U) \subset V'$.



Η μοναδικότητα προκύπτει από το λήμμα V.2.19 $\square$

Ορισμός V.2.21. *Θεωρούμε την κατηγορία των καλυμμάτων του χώρου X η οποία έχει ως αντικείμενα τους χώρους επικάλυψης $Y \to X$ και συναρτήσεις τις συνεχείς συναρτήσεις g, οι οποίες κάνουν το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Δράσεις ομάδων

Ορισμός V.2.22. *Μια δράση μιας ομάδας G σε έναν χώρο X είναι μια συνάρτηση*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot y \end{aligned}$$

η οποία ικανοποιεί:

1. $g(hx) = (gh)x$ *για κάθε* $g, h \in G$, $x \in X$.
2. $ex = x$ *για κάθε* $x \in X$ *και* e *το ουδέτερο στοιχείο της* G
3. *Η συνάρτηση* $x \mapsto gx$ *είναι ένας ομοιομορφισμός του* X *για κάθε* $g \in G$.

Δηλαδή ορίζεται μια αναπαράσταση της ομάδας G μέσα στην ομάδα ομοιομορφισμών του X.

Δύο στοιχεία $x, x' \in G$ ανήκουν στην ίδια τροχιά της G αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$ με $x' = gx$. Το σύνολο των τροχιών $Y = X/G$ είναι ο χώρος πηλίκο. Υπάρχει δε μια κανονική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/G \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Ο χώρος πηλίκο γίνεται τοπολογικός χώρος με την τοπολογία πηλίκο (όπου U είναι ανοιχτό στο Y αν και μόνο αν $p^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στο X).

Παράδειγμα V.2.23. *Η ομάδα $\mathbb{Z}$ δρα στο $\mathbb{R}$ ως*

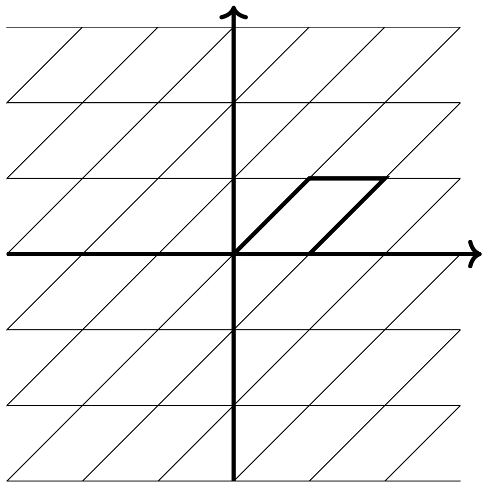
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (n, x) &\longmapsto x + n \end{aligned}$$

Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο.

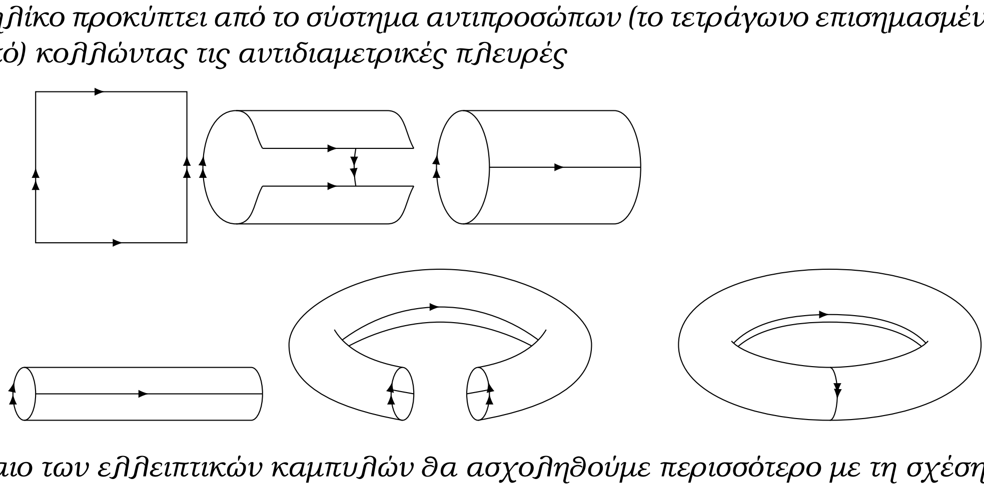
Παράδειγμα V.2.24. *Αν έχουμε ένα δικτυωτό (lattice) L του $\mathbb{C}$, δηλαδή μια διακριτή υποομάδα του $\mathbb{C}$ ισόμορφη με το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τη δράση*

$$\begin{aligned} L \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\ell, z) &\longmapsto \ell + z \end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα δικτυωτό μέσα στο $\mathbb{C}$



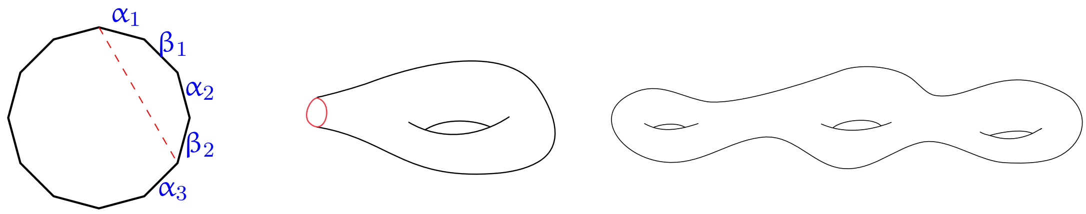
Ο χώρος πηλίκο προκύπτει από το σύστημα αντιπροσώπων (το τετράγωνο επισημασμένο τετράγωνο στο δικτυωτό) κολλώντας τις αντιδιαμετρικές πλευρές



Στο κεφάλαιο των ελλειπτικών καμπυλών θα ασχοληθούμε περισσότερο με τη σχέση της τοποθέτησης του lattice μέσα στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα V.2.25. *Σχηματίζουμε το $4n$-γωνο στο οποίο κολλάμε τις πλευρές την α_1 με την α_2^{-1} την β_1 με την β_2^{-1}. Το κομμάτι που προκύπτει από τις πρώτες τέσσερις δίνει έναν τόρο από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ο διακεκομμένος κλειστός κύκλος.*

Επαγωγικά βλέπουμε ότι με αυτό τον τρόπο έχουμε μια συμπαγή δισδιάστατη επιφάνεια με n το πλήθος τρύπες. Πράγματι κολλάμε στο ταυτισμένο $4(n-1)$-πολύγωνο, που είναι επιφάνεια με $(n-1)$-τρύπες, τον επιπλέον τόρο κατά μήκος του κόκκινου διακεκομμένου κύκλου.



Ορισμός V.2.26. *Θα λέμε ότι το G δρα στο X με καλό τρόπο (ένας σύντομος τρόπος να πούμε αυτό που στη βιβλιογραφία είναι γνωστό ως freely και properly discontinuously) αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία ανοιχτή περιοχή V ώστε gV και hV να είναι ξένα μεταξύ τους για κάθε $g, h \in G$.*

Σημείωση V.2.27. *Στη δράση άπειρων ομάδων μπορεί να έχουμε σημεία συσσώρευσης στην τροχιά το οποίο οδηγεί σε παθολογικές καταστάσεις.*

Λήμμα V.2.28. *Αν η ομάδα G δρα με καλό τρόπο στο X, τότε το πηλίκο $p : X \to X/G = Y$ είναι καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση προβολής p είναι συνεχής (εκ κατασκευής της τοπολογίας πηλίκο). Επίσης για V ανοιχτό του X έχουμε

$$p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V.$$

Με τις προϋποθέσεις της καλής δράσης, μπορούμε να διαλέξουμε V ώστε η παραπάνω ένωση να είναι ξένη.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για ένα τέτοιο V η συνάρτηση p περιορισμένη σε κάθε ανοιχτό gV είναι ομοιομορφισμός με το $p(V)$. Πράγματι $p(gx) = p(x)$ για κάθε $x \in V$. Επίσης αν $p(gx_1) = p(gx_2)$, τότε υπάρχει $h \in G$ ώστε $hgx_1 = gx_2$ το οποίο από την κατασκευή του V δίνει ότι η h είναι η ταυτότητα. □

Ορισμός V.2.29. *Θα ονομάζουμε ένα κάλυμμα $p : X \to Y$ ένα G-κάλυμμα αν και μόνο αν το Y προκύπτει από μία καλή δράση της G στο X. Ένας ισομορφισμός από G-καλύμματα είναι ένας ισομορφισμός καλυμμάτων ο οποίος είναι συμβατός με την G-δράση. Δηλαδή ένας ισομορφισμός ϕ ανάμεσα στα G-καλύμματα $p : X \to Y$ και $p' : X' \to Y$ είναι ένας ισομορφισμός*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

για τον οποίο ισχύει $p' \circ \phi p$ και $\phi(gx) = g\phi(x)$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$.

Ορισμός V.2.30. *Ένα τετριμμένο G-κάλυμμα είναι της μορφής $X = Y \times G$, όπου το G δρα με αριστερό πολλαπλασιασμό στον δεύτερο παράγοντα.*

Λήμμα V.2.31. *Κάθε G-κάλυμμα $p : X \to Y$ είναι τοπικά τετριμμένο σαν G-κάλυμμα, δηλαδή κάθε σημείο $y \in Y$ έχει μία περιοχή V ώστε το G-κάλυμμα $p^{-1}(V) \to V$ να είναι ισόμορφο με το $V \times G \to V$.*

Απόδειξη. Πράγματι, ένα V όπως το διαλέξαμε στο λήμμα V.2.28 δίνει τον ισομορφισμό

$$p^{-1}(V) \ni gv \longmapsto p(v) \times g \in V \times G.$$

□

Ορισμός V.2.32. *Για κάθε κάλυμμα $p : X \to Y$ υπάρχει μια ομάδα $\mathrm{Aut}(X/Y)$ αποτελούμενη από τους deck transformations*

$$\mathrm{Aut}(X/Y) = \{\phi : X \to X : \phi \text{ ομοιομορφισμός και } p \circ \phi = p\}.$$

Η παραπάνω είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο την ταυτότητα και ονομάζεται η ομάδα αυτομορφισμών του καλύμματος.

Αν το κάλυμμα είναι ένα G-κάλυμμα, τότε το G γίνεται υποομάδα του X/Y μέσω της συνάρτησης

$$G \ni g \longmapsto (x \mapsto gx) \in \mathrm{Aut}(X/Y). \tag{V.2}$$

Πρόταση V.2.33. *Αν $p : X \to Y$ είναι ένα G-κάλυμμα, τότε η συνάρτηση της εξίσωσης (V.2) είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και έστω $\phi \in \mathrm{Aut}(X/Y)$. Εξ ορισμού x και $\phi(x)$ ανήκουν στην ίδια τροχιά της G, υπάρχει $g \in G$ ώστε $gx = x$. Οι μετασχηματισμοί που ορίζονται από το ϕ και το g στέλνουν και οι δύο το x στο $\phi(x)$ και συνεπώς ταυτίζονται λόγω του λήμματος V.2.19. □

Παρατήρηση V.2.34. *Για ένα G-κάλυμμα $p : X \to Y$ ισχύει εξ ορισμού ότι η G δρα μεταβατικά στην ίνα $p^{-1}(y)$ για κάθε $y \in Y$. Επίσης', η δράση είναι πιστή, δηλαδή το $g \in G$ το οποίο στέλνει το x στο x' είναι μοναδικό.*

Πρόταση V.2.35. *Έστω $p : X \to Y$ ένα κάλυμμα, όπου το X είναι συνεκτικό και το Y τοπικά συνεκτικό. Τότε η $\mathrm{Aut}(X/Y)$ δρα με καλό τρόπο στο X. Αν η $\mathrm{Aut}(X/Y)$ επιπλέον δρα μεταβατικά σε κάθε μία ίνα του p, τότε το κάλυμμα είναι ένα ένα G-κάλυμμα με $G = \mathrm{Aut}(X/Y)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι έχουμε μία καλή δράση. Για $x \in X$ θεωρούμε μια περιοχή V του $p(x)$ αρκετά μικρή ώστε το $p^{-1}(V)$ να είναι ξένη ένωση από ανοιχτά ομοιομορφικά με το V. Έστω U η περιοχή του x η οποία είναι ομοιομορφική με το V. Αν ϕ και ϕ' είναι διαφορετικά στοιχεία στην $\mathrm{Aut}(X/Y)$, τότε $\phi(U) \cap \phi'(U) = \emptyset$. Διαφορετικά η $\phi^{-1} \circ \phi$ θα είχε ένα σταθερό σημείο στο U και σύμφωνα με το λήμμα V.2.19 θα ήταν η ταυτοτική.

Έστω $G = \mathrm{Aut}(X/Y)$. Η συνάρτηση p δίνεται ως σύνθεση

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "p"] & X/G \arrow[r, "\overline{p}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Και η συνάρτηση $\overline{\pi}$ είναι καλυπτική απεικόνιση αφού η p είναι. Πράγματι κάθε ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο W του Y του οποίου η προεικόνα είναι ξένη ένωση ανοιχτών ομοιομορφικών με το W έχει την ίδια ιδιότητα και για το $\overline{p}$. Αν το $y \in Y$ σημείο ώστε η G να δρα μεταβατικά στο $\pi^{-1}(y)$, τότε η ίνα $\overline{p}^{-1}(y)$ θα είναι μονοσύνολο. Σύμφωνα με το λήμμα V.2.9, όλες οι ίνες του $\overline{p}$ θα έχουν ένα σημείο, συνεπώς η $\overline{p}$ είναι ομοιομορφισμός. □

V.2.1 Πρωταρχικές ομάδες και καλύμματα

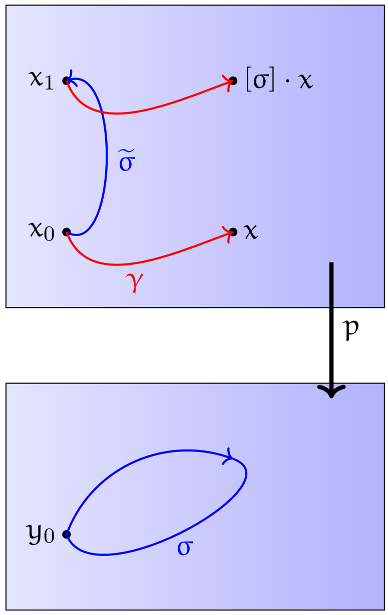
Τώρα θα σχετίσουμε την πρωταρχική ομάδα του X με την ομάδα αυτομορφισμών του καλύμματος. Θεωρούμε ένα κάλυμμα $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, όπου το X είναι κατά δρόμους συνεκτικό. Θα ορίσουμε μία αριστερή δράση

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, y_0) \times X &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ ([\sigma], x) &\longmapsto [\sigma] \cdot x \end{aligned}$$

όπου το $[\sigma] \cdot x$ ορίζεται ως εξής. Διαλέγουμε ένα μονοπάτι γ που να συνδέει το x_0 με το x. Το στοιχείο $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ ορίζει το στοιχείο $x * [\sigma] = x_1 \in p^{-1}(y_0)$ ως το τελικό σημείο του ανυψωμένου μονοπατιού σ.

Θέλουμε να ορίζουμε ως $[\sigma]x$ το σημείο $x_1 * (p \circ \gamma)$. Δηλαδή πηγαίνουμε στο σημείο x σε δύο βήματα

$$x_0 \longmapsto x * \sigma = x_1 \longmapsto x_1 * (p \circ \gamma) = x * (\sigma \cdot (p \circ \gamma))$$



Για να είναι η διαδικασία αυτή καλά ορισμένη, πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του γ που συνδέει το x_0 με το x. Έστω λοιπόν ένα άλλο γ' που συνδέει το x_0 με το x. Θέλουμε ανυψώσεις των $\sigma \cdot (p \circ \gamma)$ και $\sigma \cdot (\circ \gamma')$ που ξεκινούν από το x να τερματίζονται στο ίδιο σημείο. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η κλάση του $[\sigma \cdot (p \circ \gamma') \cdot (\sigma \cdot (p \circ \gamma))^{-1}]$ να είναι στοιχείο του $p_*(\pi_1(X, x_0))$.
Το $\gamma'\gamma^{-1}$ είναι ένας βρόγχος στο x_0 συνεπως

$$\begin{aligned} [\sigma \cdot (p \circ \gamma') \cdot (\sigma \cdot (p \circ \gamma))^{-1}] &= [\sigma \cdot (p \circ \gamma') \cdot (p \circ \gamma))^{-1} \cdot \sigma^{-1}] \\ &= [\sigma] \cdot [p \circ (\gamma'\gamma^{-1})] \cdot [\sigma] - 1 \\ &= [\sigma] \cdot p_*([\gamma' \cdot \gamma^{-1}]) \cdot [\sigma]^{-1}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι στοιχείο της $[\sigma] \cdot p_*(\pi_1(X,_{x_0}))[\sigma]^{-1}$. Οπότε το ζητούμενο προκύπτει αρκεί η ομάδα $p_*(\pi_1(X, x_0))$ να είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(Y, y_0)$.

Η απόδειξη του

$$([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot x = [\sigma] \cdot ([\tau] \cdot x)$$

προκύπτει από τον ορισμό της δράσης. Πράγματι αν γ είναι ένα μονοπάτι από το x_0 στο x, τότε η ανύψωσή του $\tau(p \circ \gamma)$ που ξεκινά από το x_0 είναι ένα μονοπάτι από το x_0 στο $[\tau] \cdot x$. Συνεπώς το $[\sigma] \cdot ([\tau] \cdot x)$ είναι το τελικό σημείο του μονοπατιού της ανύψωσης του μονοπατιού $\sigma \cdot (\tau \cdot (p \circ \gamma))$ που ξεκινά στο x_0. Από την άλλη πλευτά, το $(\sigma \cdot \tau) \cdot (p \circ \gamma)$ είναι ομοτοπικό με το $\sigma \cdot (\tau \cdot (p \circ \gamma))$, οπότε η ανύψωσή του από το x_0 έχει το ίδιο τελικό σημείο, δηλαδή το $([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot x$.

Το ότι το σταθερό μονοπάτι με τιμή y_0 δίνει τιμή $[e] \cdot [x] = [x]$ είναι σαφές από το ότι $[e] \cdot x = (x_0 * e) * \gamma = x_0 * \gamma = x$.

Τέλος θα πρέπει να δείξουμε ότι για σταθερό $[\sigma]$ η συνάρτηση $x \mapsto [\sigma] \cdot [x]$ είναι συνεχής. Θα χρειαστεί να υποθέσουμε ότι ο Y είναι τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός. Ας θεωρήσουμε για ένα σημείο x μια ανοιχτή κατά δρόμους συνεκτική περιοχή του $p(x)$ U ώστε το $p^{-1}(U)$ να είναι ξένη ένωση από ανοιχτά ομοιομορφικά με το U. Έστω V, V' οι συνεκτικές συνιστώσες του $p^{-1}(U)$ οι οποίες περιέχουν το x και το $x' = [\sigma] \cdot x$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι το $[\sigma]V \subset V'$ Για ένα $v \in V$, θεωρούμε ένα μονοπάτι α από το x στο v. Αν γ είναι μονοπάτι από το x_0 στο x, τότε το $\gamma \cdot \alpha$ είναι μονοπάτι από το x_0 στο v, συνεπώς $[\sigma] \cdot v$ είναι το τελικό σημείο του $p \circ \alpha$ που ξεκινάει από το x'. Η ανύψωσή του περιέχεται στο V'.

Θεώρημα V.2.36. *Έστω $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ένα κάλυμμα όπου το X είναι συνεκτικό και το Y είναι τοπικά δρομοσυνεκτικό. Αν το $p_*(\pi_1(X, x_0))$ είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(Y, y_0)$, τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$\pi_1(Y, y_0)/p_*(\pi_1(X, x_0)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(X/Y).$$

Απόδειξη. Έχουμε κατασκευάσει έναν ομομορφισμό από το $\pi_1(Y, y_0)$ στην ομάδα $\mathrm{Aut}(X/Y)$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτός είναι επί. Πράγματι, έστω $\phi : X \to X$ ένα στοιχείο του $\mathrm{Aut}(X/Y)$ και υποθέτουμε ότι $\phi(x_0) = x_1$. Αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ με $[\sigma] \cdot x_0 = x_1$, αφού σε αυτή την περίπτωση, αφού το X είναι συνεκτικό, οι δύο συναρτήσεις θα πρέπει να ταυτίζονται. Αν γ είναι μονοπάτι που συνδέει το x_0 με το x_1, τότε το $[p \circ \gamma]$ είναι το ζητούμενο στοιχείο.

Τέλος, ο πυρήνας του ομομορφισμού από το $\pi_1(Y, y_0)$ στο $\mathrm{Aut}(X/Y)$ είναι το $p_*(\pi_1(X, x_0))$. □

Πόρισμα V.2.37. *Αν $p : X \to Y$ είναι ένα κάλυμμα και το X είναι απλά συνεκτικό και το Y τοπικά δρομοσυνεκτικό, τότε $\pi_1(Y, y_0) \cong \mathrm{Aut}(X/Y)$.*

Πόρισμα V.2.38. *Αν έχουμε μια καλή δράση της ομάδας G σε έναν απλά συνεκτικό χώρο X και $Y = X/G$, τότε η θεμελιώδης ομάδα της Y είναι η G.*

Ορισμός V.2.39. *Ένα κάλυμμα $p : X \to Y$ θα λέγεται universal covering, αν το X είναι συνεκτικό και απλά συνεκτικό. Αν υπάρχει, είναι μοναδικό και μοναδικό μέχρι κανονικού ισομορφισμού, αν καθορίζονται σημεία βάσης.*

Θεώρημα V.2.40. *Ένας συνεκτικός και τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος X έχει ένα universal covering αν και μόνο αν είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να σταθεροποιήσουμε ένα σημείο $x \in X$ και να θεωρήσουμε ως $\widetilde{X}$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[\gamma]$ μονοπατιών που ξεκινάνε από το x. Η προβολή p ορίζεται

$$\begin{aligned} p : \widetilde{X} &\longrightarrow X \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma[1] \end{aligned}$$

Θα πρέπει το $\widetilde{X}$ να εφοδιαστεί με τοπολογία, να αποδειχθεί ότι είναι απλά συνεκτικό αλλά και ότι η προβολή p δίνει ένα κάλυμμα. □

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο χώρος X έχει ένα universal covering $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$.

Πρόταση V.2.41.

1. *Για κάθε υποομάδα H της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ υπάρχει ένα συνεκτικό κάλυμμα $p_H : Y_H \to X$ με ένα $y_H \in p_H^{-1}(x_0)$ ώστε η εικόνα του $\pi_1(Y_H, y_H)$ στο $\pi_1(X, x_0)$ να είναι H. Κάθε άλλο τέτοιο κάλυμμα στο οποίο έχουμε επιλέξει και σημείο βάσης είναι κανονικά ισόμορφο με αυτή.*

2. *Αν K είναι μια άλλη υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$ που περιέχει το H, , τότε υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $p_{H,K} : (Y_H, y_H) \to (Y_K, y_K)$ η οποία είναι συμβατή με τις προβολές στο X. Αυτή η συνάρτηση είναι καλυπτική και αν H είναι κανονική στην K, τότε είναι ένα G-κάλυμμα με ομάδα G/H.*

Απόδειξη. Έστω $u : \widetilde{X} \to X$ ένα universal covering, με $u(\widetilde{x}) = x_0$. Ταυτίζουμε την $\pi_1(X, x_0)$ με την $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$. Κάθε υποομάδα H της $\pi_1(X, x_0)$ δρα με καλό τρόπο στο $\widetilde{X}$ και το πηλίκο $\widetilde{X} \to \widetilde{X}/H =: Y_H$ κάνει το $\widetilde{X}$ το universal covering του Y_H. Συνεπώς η θεμελιώδης ομάδα του Y_H (με σημείο βάσης την εικόνα του $\widetilde{x}$ μέσω της προβολής) είναι κανονικά ισόμορφη με την H. Η προβολή $\widetilde{X}/\pi_1(X, x_0) \to X$ είναι κάλυμμα και η εικόνα της θεμελιώδους ομάδας στην $\pi_1(X, x)$ είναι H. Αν $H < K$, τότε υπάρχει κανονική συνάρτηση των χώρων πηλίκου $\widetilde{X}/H \to \widetilde{X}/K$. □

Πόρισμα V.2.42. *Δύο καλυπτικοί χώροι $p_1 : Y_1 \to X$ και $p_2 : Y_2 \to X$ είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν για κάθε δύο $y_1 \in Y_1$ και $y_2 \in Y_2$ με $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x \in X$ οι υποομάδες $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ και $\pi_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας $\pi_1(X, x)$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση V.2.41 υπάρχει ισομορφισμός $f : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ (δηλαδή $f(y_1) = y_2$ αν και μόνο αν $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = \pi_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$. Αν τα σημεία δεν διατηρούνται, τότε το $f(y_1)$ θα είναι κάποιο άλλο σημείο στο $\pi_2^{-1}(x)$ και οι ομάδες θα είναι συζυγείς και αντίστροφα. □

Ορισμός V.2.43. *Θα συμβολίζουμε με $\widetilde{X}^{ab}$ το πηλίκο*

$$\widetilde{X}^{ab} = \widetilde{X}/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \longrightarrow X.$$

Ορισμός V.2.44. *Ορίζουμε την ομάδα*

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]}$$

Παρατήρηση V.2.45. *Η ομάδα αυτή θα παίξει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Κανονικά ορίζεται μέσω της θεωρίας ομολογίας (simplicial), αλλά ο ορισμός αυτός είναι αρκετός για τις ανάγκες μας.*

Η θεωρία των καλυμμάτων μπορεί να οδηγήσει σε υπολογισμό των πρωταρχικών ομάδων.

Παράδειγμα V.2.46. *Θεωρούμε το G-κάλυμμα $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/Z = S^1$. Το $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό και απλά συνεκτικό, συνεπώς είναι το universal covering του κύκλου. Έχουμε $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$.*

Ομοίως ο τόρος $\mathbb{C}/L$ δέχεται το συνεκτικό και απλά συνεκτικό σύνολο $\mathbb{C}$ ως universal covering space, ενώ το $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ είναι ένα G-cover. Καταλήγουμε στο $\pi_1(\mathbb{C}/L, x_0) = L \cong \mathbb{Z}^2$.

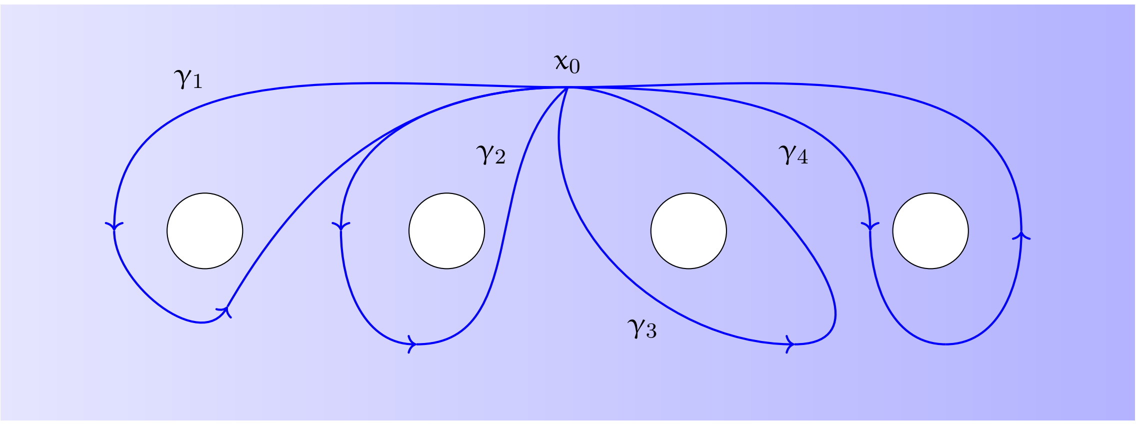
Θα υπολογίσουμε τώρα την ομάδα $\pi_1(\mathbb{C}\backslash S, x_0)$, όπου S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.

Πρόταση V.2.47. *Η ομάδα $\pi_1(\mathbb{C}\backslash S, x_0)$ είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα σε $\#S$ γεννήτορες.*

Απόδειξη. Όταν το $\#S = 1$, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από τον υπολογισμό που κάναμε με το S^1 αφού το S^1 είναι deformation retract του $\mathbb{C}\backslash\{P\}$. Επαγωγικά θεωρούμε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία του S εκτός από ένα και ένα σύνολο που περιέχει μόνο το τελευταίο ώστε αυτά να τέμνονται σε ένα απλά συνεκτικό σύνολο. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα του Van Kampen. Υπενθυμίζουμε ότι το αμαλγαματοποιημένο γινόμενο

$$\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-\text{παράγοντες}} \cong F_n$$

Η πρωταρχική ομάδα παράγεται από τους βρόγχους $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ που περιστρέφονται μία φορά γύρω από κάθε σημείο του S.

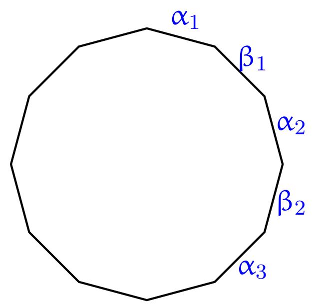


□

Πρόταση V.2.48. *Θεωρούμε την ομάδα $\pi_1(X_g, x_0)$ της επιφάνειας του παραδείγματος V.2.25. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$, $\beta_1, \dots, \beta_g$ οι $2g$ πλευρές του $4g$-πολυγώνου. Έχουμε ότι*

$$\pi_1(X_g, x_0) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : [\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του πολυγώνου στο σχήμα αριστερά μετά την ταύτισή τους κλείνουν σε έναν τοπολογικό χώρο που είναι ένα μπουκέτο από $2g$ κύκλους και έχει πρωταρχική ομάδα όπως είδαμε προηγουμένως την ελεύθερη ομάδα F_{2g} σε $2g$ γεννήτορες,



$$F_{2g} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \rangle.$$

Το εσωτερικό του πολυγώνου επικολλάται στο εσωτερικό αυτού του μπουκέτου και δημιουργεί τη ζητούμενη σχέση του γινομένου των μεταθετών

$$[\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_g, \beta_g] = 1$$

Η ακριβής απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα του Van-Kampen και προκύπτει τρυπώντας κάθε επισυναπτόμενο δίσκο σε ένα εσωτερικό του σημείο ώστε να δημιουργηθεί μια deformation retract με το αρχικό μπουκέτο, δείτε το [2, prop. 1.26]. □

V.3 Πρωταρχική ομάδα και αναπαραστάσιμοι συναρτητές

Έστω $\mathrm{Cov}(X)$ η κατηγορία των καλυμμάτων του X με πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικών συνιστωσών και μορφισμούς τις συναρτήσεις των καλυμμάτων. Ορίζουμε τον συναρτητή

$$F : \mathrm{Cov}(X) \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
$$(p : Y \to X) \longmapsto p^{-1}(x)$$

Ο συναρτητής αυτός είναι αναπαραστάσιμος από τον $\widetilde{X}$ δηλαδή

$$F(Y) \cong \mathrm{Hom}_X(\widetilde{X}, Y)$$

Πράγματι, για να περιγράψουμε ένα κάλυμμα $\widetilde{X} \to Y$ αρκεί να καθορίσουμε ένα $y \in p^{-1}(x)$. Αν θεωρήσουμε το $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ να δρα στο $\widetilde{X}$ από δεξιά, τότε δρα στο $\mathrm{Hom}_X(\widetilde{X}, Y)$ από αριστερά:

$$\alpha f := f \circ \alpha, \alpha \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X), f : \widetilde{X} \to Y.$$

Πράγματι,

$$\alpha(\beta f) = \alpha(f \circ \beta) = f \circ \beta \circ \alpha.$$

Συνεπώς ο F μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συναρτητής από το $\mathrm{Cov}(X)$ στα $\pi_1(X, x_0)$-σύνολα και ορίζει μια ισοδυναμία κατηγοριών.

Βιβλιογραφία

[1] Fulton, W. *Algebraic topology*. Vol. 153. Graduate Texts in Mathematics. A first course. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xviii+430. ISBN: 0-387-94326-9; 0-387-94327-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4180-5.

[2] Hatcher, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002, pp. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[3] Καρανικολόπουλος, Σ. *Uniformization Αλγεβρικών Καμπυλών*. MA thesis. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2005.

VI

Στοιχεία συνομολογίας Sheaves

VI.1 Τα κίνητρα για την ανάπτυξη μιας θεωρίας συνομολογίας sheaves

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μια σύντομη εισαγωγή στη συνομολογία των sheaves. Τα κίνητρα για την ανάπτυξη της έννοιας είναι πολλαπλά. Για ένα αλγεβρικό σύνολο, σχήμα κτλ. X οι ομάδες συνομολογίας $H^p(X, \mathcal{F})$ δίνουν αναλλοίωτες οι οποίες χαρακτηρίζουν και το X και το $\mathcal{F}$.

Επίσης, αν έχουμε μια μικρή ακριβή ακολουθία από sheaves σε έναν τοπολογικό χώρο X

$$0 \to \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \to 0,$$

τότε το να περάσουμε στις global sections οδηγεί σε μια ακολουθία η οποία δεν είναι εν γένει ακριβής στην τελευταία θέση

$$0 \to \mathcal{F}_1(X) \longrightarrow \mathcal{F}_2(X) \longrightarrow \mathcal{F}_3(X)$$

Η συνομολογία των sheaves μετράει κατά κάποια έννοια την απόκλιση από το να είναι ακριβής η τελευταία ακολουθία και οδηγεί σε μια μακριά ακολουθία της μορφής;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1(X) \arrow[r] & \mathcal{F}_2(X) \arrow[r] & \mathcal{F}_3(X) \arrow[dll] & \\
& H^1(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{F}_2) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{F}_3) \arrow[dll] & \\
& H^2(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^2(X, \mathcal{F}_2) \arrow[r] & H^2(X, \mathcal{F}_3) \arrow[dll] & \\
& H^3(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^3(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^3(X, \mathcal{F}_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Συχνά οι παραπάνω χώροι μπορούν να υπολογιστούν, ενώ μπορεί αρκετοί από αυτούς να είναι μηδενικοί. Αυτό οδηγεί συχνά σε μια ακολουθία από σχέσεις των επιμέρους ομάδων συνομολογιών.

Παρατήρηση VI.1.1. *Ο αναγνώστης καλείται να συγκρίνει την παραπάνω ακολουθία με αυτήν της σελίδας 219. Υπάρχει μια γενικότερη ομολογική τεχνική για αυτού του είδους τις κατασκευές, αυτή των παραγόμενων συναρτητών. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [4], [2].*

VI.2 Η κατασκευή του Chech

Σε αυτές τις σημειώσεις δεν θα ακολουθήσουμε τον δρόμο των παραγόμενων συναρτητών, αλλά μια κατασκευαστική μέθοδο που βασίζεται στην κλασική συνομολογία του Chech.

Ορισμός VI.2.1. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf στον τοπολογικό χώρο X και έστω ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $U_1, \dots, U_r$ του X.*

- *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τους k-διανυσματικούς χώρους*

$$C^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}).$$

  Δηλαδή ένα στοιχείο $\phi \in C^p(\mathcal{F})$ είναι μια συλλογή από sections $\phi_{i_0,\dots,i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p})$ για όλες τις τομές $p+1$ το πλήθος ανοιχτών συνόλων που μπορούμε να σχηματίσουμε από το δεδομένο ανοιχτό κάλυμμα.

- *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη συνοριακή απεικόνιση*

$$d^p : C^p(\mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{F}),$$

  με τον τύπο

$$(d^p\phi)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{\nu=0}^{p+1} (-1)^\nu \phi_{i_0,\dots,\widehat{i}_\nu,\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}},$$

  όπου ο συμβολισμός $\widehat{i}_\nu$ σημαίνει ότι ο δείκτης αυτός έχει παραλειφθεί. Ο παραπάνω συμβολισμός έχει νόημα, αφού το $\phi_{i_0,\dots,\widehat{i}_\nu,\dots,i_{p+1}}$ είναι μια section του $\mathcal{F}$ στο $U_{i_0 \cap \cdots \widehat{U}_{i_n} \cap \cdots U_{i_{p+1}}}$ το οποίο περιέχει το $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}$ ως ανοιχτό υποσύνολο για κάθε ν.

Λήμμα VI.2.2. *Για κάθε sheaf $\mathcal{F}$ στο X η σύνθεση $d^{p+1} \circ d^p : C^p(\mathcal{F}) \to C^{p+2}(\mathcal{F})$ είναι η μηδενική συνάρτηση για κάθε $p \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(d^{p+1}(d^p)\phi)_{i_0,\dots,i_{p+2}} &= \sum_{\nu=0}^{p+2} (-1)^\nu (d^p\phi)_{i_0,\dots,\widehat{i}_\nu,\dots,i_{p+2}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{p+2}\sum_{l=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+l} \phi_{i_0,\dots,\widehat{i}_l\dots,\widehat{i}_\nu,\dots,i_{p+2}} + \sum_{\nu=0}^{p+2}\sum_{k=\nu+1}^{p+2} (1)^{\nu+l-1} \phi_{i_0,\dots,\widehat{i}_l\dots,\widehat{i}_\nu,\dots,i_{p+2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Με τον παραπάνω τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια ακολουθία από διανυσματικούς χώρους και γραμμικές συναρτήσεις

$$C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

ώστε η σύνθεση δύο διαδοχικών συναρτήσεων να είναι 0. Η παραπάνω ακολουθία δεν είναι ακριβής αλλά έχουμε έναν εγκλεισμό

$$\mathrm{Im} d^p \subset \mathrm{Ker} d^{p+1}.$$

Ορισμός VI.2.3. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf επί του X και έστω $p \in \mathbb{N}$. Η p-στή συνομολογία ορίζεται ως*

$$H^p(X, \mathcal{F}) := \frac{\ker d^p}{\operatorname{Im} d^{p-1}}$$

με την παραδοχή ότι το $C^{-1}(\mathcal{F})$ και d^{-1} είναι μηδέν, συνεπώς $H^0(X, \mathcal{F}) = \ker d^0$.

Παρατήρηση VI.2.4. *Το μειονέκτημα αυτής της κατασκευής είναι ότι η ανεξαρτησία από την επιλογή του αφινικού καλύματος δεν είναι σαφής. Μια απόδειξη της ανεξαρτησίας μπορεί να δοθεί συγκρίνοντας τον ορισμό μας με αυτόν του παραγόμενου συναρτητή, δείτε [2, θεω. III.4.5].*

VI.3 Μερικές ιδιότητες

Θα δούμε μερικές πρώτες ιδιότητες της κατασκευής της συνομολογίας

Λήμμα VI.3.1. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf επί του X, ισχύουν τα παρακάτω:*

- $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$
- *Αν το X είναι αφινική πολλαπλότητα, τότε $H^p(X, \mathcal{F}) = \{0\}$ για κάθε $p > 0$.*
- *Αν το X είναι προβολική πολλαπλότητα διάστασης n, τότε $H^p(X, \mathcal{F}) = \{0\}$ για $p > n$.*
- *Αν $i : X \to Y$ είναι ο εγκλεισμός του X ως κλειστή υποπολλαπλότητα του Y, τότε $H^p(Y, i_*\mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F})$ για όλα τα $p \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη.

- Εξ ορισμού έχουμε ότι $H^0(X, \mathcal{F}) = \ker(d^0 : C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F}))$. Όμως ένα στοιχείο $\phi \in C^0(\mathcal{F})$ δίνεται από section $\phi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ για κάθε αφινικό ανοιχτό U_i στο κάλυμμά μας, ενώ η συνάρτηση d^0 ορίζεται ως

$$(d^0\phi)_{i_0,i_1} = (\phi_{i_1} - \phi_{i_0})|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}}$$

  για $i_0 < i_1$. Από τα αξιώματα του sheaf, αν το τελευταίο είναι 0 υπάρχει μοναδική global section του $\mathcal{F}$ της οποίας ο περιορισμός να είναι τα ϕ_i.

- Διαλέγουμε το ανοιχτό κάλυμμα το οποίο να αποτελείται από ένα μοναδικό ανοιχτό X. Τότε $C^p(\mathcal{F}) = \{0\}$ για κάθε $p > 0$, αφού δεν υπάρχει τρόπος να διαλέξουμε $p+1$ ανοιχτά από ένα τέτοιο κάλυμμα και συνεπώς $H^p(X, \mathcal{F}) = \{0\}$.

- Από την πρόταση I.1.54 έχουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε αναδρομικά ομογενή πολυώνυμα $f_0, \dots, f_n$ ώστε $\dim(X \cap V(f_0, \dots, f_i)) < n - i$ για κάθε $i = 0, \dots, n$. Αυτό σημαίνει ότι $X \cap V(f_0, \dots, f_n) = \emptyset$, οπότε το X καλύπτεται από τα $n+1$ ανοιχτά συμπληρώματα των $V(f_i)$. Τα συμπληρώματα αφινικών είναι αφινικά και αντιστοιχούν στον εντοπισμένο δακτύλιο στη μεταβλητή f_i. Συνεπώς μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της συνομολογίας. Αφού το κάλυμμα γίνεται με ακριβώς $n+1$ υποσύνολα, έχουμε ότι $C^p(\mathcal{F}) = \{0\}$ και συνεπώς $H^p(X, \mathcal{F})$ για κάθε $p > n$.

- Έστω $U_1, \cdots, U_r$ ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα του Y. Τότε $X \cap U_1, \dots, X \cap U_r$ είναι ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα του X ως προς το τελευταίο κάλυμμα, έχουμε

$$C^p(i_*F) = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_p} i_*\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(X \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) = C^p(\mathcal{F}),$$

  για κάθε $p \in \mathbb{N}$. Αφού και οι συναρτήσεις d^p ταυτίζονται με της αρχικής, συμπεραίνουμε ότι $H^p(Y, i_*\mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F})$.

□

Πρόταση VI.3.2 (Μακρά ακριβής ακολουθία). *Για μια ακριβή ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \to 0 \tag{VI.1}$$

υπάρχει μια μακριά ακολουθία της μορφής;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1(X) \arrow[r] & \mathcal{F}_2(X) \arrow[r] & \mathcal{F}_3(X) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & H^1(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}_2) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}_3) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & H^2(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{F}_2) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{F}_3) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & H^3(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^3(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^3(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^p(\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d, "d_1^p"] & C^p(\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d, "d_2^p"] & C^p(\mathcal{F}_3) \arrow[r] \arrow[d, "d_3^p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{p+1}(\mathcal{F}_1) \arrow[r] & C^{p+1}(\mathcal{F}_2) \arrow[r] & C^{p+1}(\mathcal{F}_3) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

όπου οι οριζόντιες συναρτήσεις επάγονται από τους μορφισμούς των sheaves όπως αυτές δίνονται στην (VI.1). Ισχυριζόμαστε ότι οι γραμμές είναι ακριβείς. Πράγματι κάθε τομή

$$U = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$$

από αφινικά ανοιχτά υποσύνολα του δοσμένου καλύμματος είναι ανοιχτό αφινικό $\mathrm{Spec}R$. Συνεπώς, τα quasi-coherent sheaves $\mathcal{F}_i$ αντιστοιχούν σε R-modules M_i για $i = 1, 2, 3$ στο $U = \mathrm{Spec}R$ και συνεπώς, αφού κάθε εντοπισμός

$$0 \to (M_1)_P \to (M_2)_P \to (M_3)_P \to 0$$

είναι εξ ορισμού ακριβής, το ίδιο κάνει και η

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0.$$

Όμως αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι η ακολουθία των sections

$$0 \to \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}_3(U) \to 0$$

είναι ακριβής. Οι γραμμές του παραπάνω διαγράμματος είναι γινόμενα τέτοιων ακολουθιών και συνεπώς είναι επίσης ακριβείς.

Το Snake lemma τώρα μας δίνει ότι υπάρχει μια επαγόμενη ακριβής ακολουθία

$$0 \to \ker d_1^p \longrightarrow \ker d_2^p \longrightarrow \ker d_3^p \longrightarrow \frac{C^{p+1}(\mathcal{F}_1)}{\mathrm{Im} d_1^p} \longrightarrow \frac{C^{p+1}(\mathcal{F}_2)}{\mathrm{Im} d_2^p} \longrightarrow \frac{C^{p+1}(\mathcal{F}_3)}{\mathrm{Im} d_3^p} \longrightarrow 0.$$

Κάνοντας χρήση του δεύτερου μισού της παραπάνω ακολουθίας για $p-1 \to p$ και του πρώτου μισού για $p \to p+1$ των δύο ακολουθιών χωριστά, φτιάχνουμε ένα νέο διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd}
 & C^p(\mathcal{F}_1/\mathrm{Im} d_1^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & C^p(\mathcal{F}_2/\mathrm{Im} d_2^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & C^p(\mathcal{F}_3/\mathrm{Im} d_3^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_1^{p+1} \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_2^{p+1} \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_3^{p+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

όπου οι κάθετες συναρτήσεις επάγονται από τις συναρτήσεις d_i^p για $i = 1, 2, 3$. Μία ακόμα εφαρμογή του Snake lemma δίνει μια ακριβή ακολουθία

$$H^p(X, \mathcal{F}_1) \to H^p(X, \mathcal{F}_2) \to H^p(X, \mathcal{F}_3) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}_1) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}_2) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}_3) \to$$

αφού οι πυρήνες και οι συμπυρήνες των οριζόντιων συναρτήσεων στο παραπάνω διάγραμμα είναι εξ ορισμού οι ομάδες συνομολογίας. Συνδυάζοντας όλες τις ομάδες για κάθε p, έχουμε τη ζητούμενη μακριά ακριβή ακολουθία.

VI.4 Παραδείγματα

1. Ας υποθέσουμε ότι $X = \mathbb{P}_k^1$ και $\mathcal{F} = \Omega$ είναι το sheaf των διαφορικών και $U = \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}k[x]$ ενώ $V = \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}k[y]$, $y = 1/x$. Τότε το σύμπλοκο Chech έχει δύο όρους

$$\begin{aligned} C^0 &= \Gamma(U, \Omega) \times \Gamma(V, \Omega) \\ C^1 &= \Gamma(U \cup V, \Omega). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \Omega) &= k[x]dx \\ \Gamma(V, \Omega) &= k[y]dy \\ \Gamma(U \cap V) &= k[x, x^{-1}]dx. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $d : C^0 \to C^1$ δίνεται από

$$x \longmapsto x, \quad y \longmapsto 1/x, \quad dy \longmapsto -\frac{dx}{x^2}.$$

Δηλαδή ο $\mathrm{Ker} d$ είναι τα ζευγάρια $(f(x)dx, g(y)dy)$ ώστε

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{y}\right).$$

Η τελευταία ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο όταν $f = g = 0$, αφού η αριστερά πλευρά είναι πολυώνυμο στο x και η δεξιά πολυώνυμο στο $1/x$ χωρίς σταθερό όρο. Συνεπώς $H^0(X, \Omega) = 0$, το οποίο εκφράζει το γεγονός ότι το γένος της $X = \mathbb{P}_k^1$ είναι 0.

Για να υπολογίσουμε το $H^1(X, \Omega)$ παρατηρούμε ότι η εικόνα του d είναι το σύνολο των εκφράσεων

$$\left(f(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) dx\right),$$

όπου f, g είναι πολυώνυμα. Αυτό οδηγεί στον υπόχωρο του $k[x, x^{-1}]dx$, ο οποίος παράγεται από $x^n dx, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$. Συνεπώς,

$$H^1(X, \Omega) = \frac{k[x, x^{-1}]dx}{\mathrm{Im} d} = \langle x^{-1} dx \rangle \cong k.$$

2. Η συνομολογία Chech μπορεί να οριστεί σε οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο, όπου το κάλυμμα πρέπει να είναι αρκετά λεπτό ώστε η συνομολογία κάθε ανοιχτού να είναι τετριμμένη.

Έστω S^1 ο κύκλος με τη φυσιολογική τοπολογία και θεωρούμε το σταθερό sheaf $\mathbb{Z}$ και ένα ανοιχτό κάλυμμα δύο ανοιχτών ημικυκλίων που επικαλύπτονται σε δύο μικρά ανοιχτά διαστήματα. Τότε

$$\begin{aligned} C^0 &= \Gamma(U, \mathbb{Z}) \times \Gamma(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ C^1 &= \Gamma(U \cap V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ενώ η συνάρτηση $d : C^0 \to C^1$ στέλνει το (a, b) στο $(b-a, b-a)$. Συνεπώς η Chech δίνει $H^0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ και $H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Είναι γεγονός ότι η Chech ταυτίζεται με τη συνηθισμένη για αρκετά λεπτά καλύμματα, δείτε και [2, άσκηση 4.11, σελ. 225].

3. Γενικά σε μιγαδικές πολλαπλότητες με τη συνηθισμένη τοπολογία μπορούμε να θεωρήσουμε την εκθετική συνάρτηση αβελιανών ομάδων

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i x}} \mathbb{C}^* \to 1, \tag{VI.2}$$

όπου η $\mathbb{C}$ έχει προσθετική δομή και η $\mathbb{C}^*$ έχει πολλαπλασιαστική. Αν κάποιος θεωρήσει τα sheaves δομής των μιγαδικών αναλυτικών πολλαπλοτήτων, οδηγείται στη μικρή ακριβή ακολουθία sheaves

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 1,$$

όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σταθερό sheaf, $\mathcal{O}_X$ είναι το sheaf δομής και $\mathcal{O}_X^*$ είναι το sheaf των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathcal{O}_X$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

Στο H^0 επίπεδο ξαναβρίσκουμε την ακολουθία (VI.2), αφού οι παντού ολόμορφες συναρτήσεις είναι οι σταθερές. Στη συνέχεια έχουμε την

$$0 \to H^1(X_h, \mathbb{Z}) \to H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \to H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \to H^2(X_h, \mathbb{Z}) \to H^2(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \to \cdots$$

Στον παραπάνω συμβολισμό έχουμε γράψει X_h για να ξεχωρίσουμε τον χώρο X_h με τη μιγαδική τοπολογία και τον αντίστοιχο χώρο X με την τοπολογία Zariski. Ο παραπάνω διαχωρισμός στον συμβολισμό δεν έχει και τόση σημασία χάρη στο θεώρημα του J.P. Serre [3], [2, Appendix B, Th. 2.1] το οποίο μας δίνει ότι

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = H^i(X_h, \mathcal{O}_{X_h}).$$

Βιβλιογραφία

[1] Gathmann, A. *Algebraic Geometry*. Lecture Notes, 2020. URL: https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2019/alggeom-2019.pdf.

[2] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[3] Serre, J.-P. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955/56), pp. 1–42. ISSN: 0373-0956. URL: http://aif.cedram.org/item?id=AIF_1955__6__1_0.

[4] Weibel, C. A. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, pp. xiv+450. ISBN: 0-521-43500-5; 0-521-55987-1.

VII

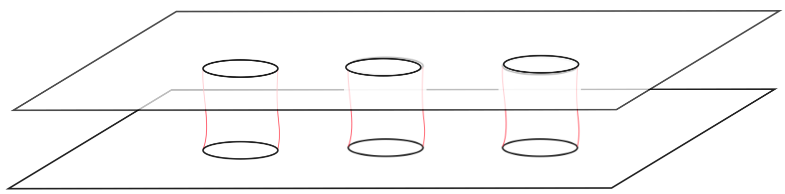
Συμπαγείς Επιφάνειες Riemann

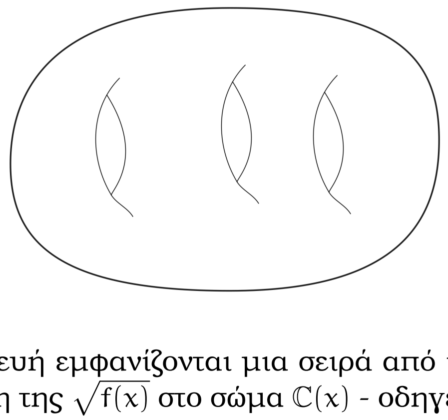
VII.1 Η ιδέα της επιφάνειας Riemann

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών

$$P(x, y) : y^2 - Q(x),$$

όπου το πολυώνυμο $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ πολυώνυμο με απλές ρίζες. Θα θέλαμε να περιγράψουμε τον τόπο μηδενισμού του παραπάνω πολυωνύμου ως υποσύνολο του $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Ακολουθώντας τον Riemann θεωρούμε το $x \in \mathbb{C}$ ως ελεύθερη μεταβλητή. Για κάθε x έχουμε δύο μιγαδικές τιμές για το y διαφορετικές μεταξύ τους, εκτός από τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές του x στις οποίες το Q μηδενίζεται. Συνεπώς μπορούμε να φανταστούμε το σύνολο μηδενισμού του πολυωνύμου $P(x, y)$ ως δύο αντίγραφα του μιγαδικού επιπέδου τα οποία κολλάνε μεταξύ τους στις ρίζες του $Q(x)$. Αν δε θεωρήσουμε αντί για τον τόπο μηδενισμού του $P(x, y)$ τον τόπο μηδενισμού του ομογενοποιημένου πολυώνυμου ως υποσύνολο του προβολικού επιπέδου, καταλήγουμε σε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann, με χερούλια όπως στο παρακάτω σχήμα:



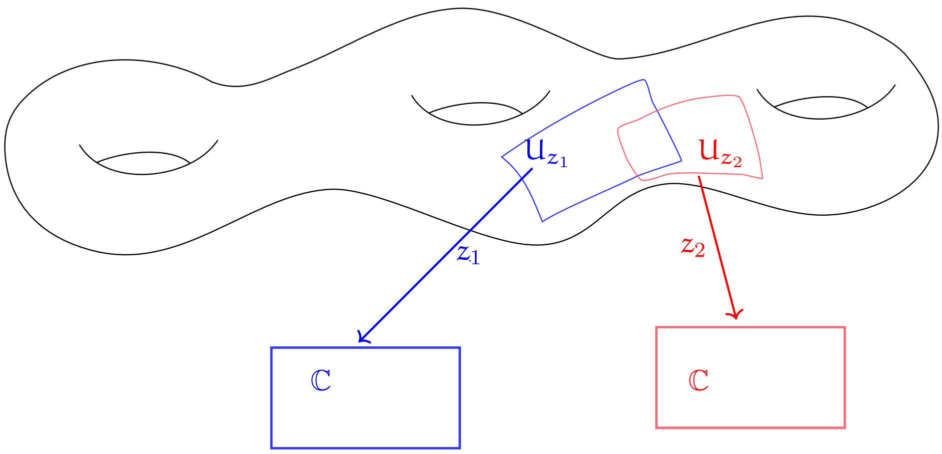


Σε αυτή την απλή κατασκευή εμφανίζονται μια σειρά από ιδέες σχετικά με το πώς μια επέκταση σωμάτων - η επισύναψη της $\sqrt{f(x)}$ στο σώμα $\mathbb{C}(x)$ - οδηγεί σε μια τοπολογική-γεωμετρική κατασκευή. Αυτή η ιδέα μας δίνει και την ισοδυναμία επιφανειών Riemann - αλγεβρικών καμπυλών - σωμάτων συναρτήσεων που θα δούμε στη συνέχεια.

VII.2 Ορισμοί

Ορισμός VII.2.1. *Μια επιφάνεια Riemann είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X με τις παρακάτω ιδιότητες:*

- *Υπάρχει μια οικογένεια (U_z, z), όπου U_z ανοιχτά υποσύνολα του X, z συναρτήσεις $z : U_z \longrightarrow \mathbb{C}$, τοπολογικοί ομοιομορφισμοί μέσα σε ανοιχτά του $\mathbb{C}$ και επιπλέον τα U_z καλύπτουν τον X, δηλαδή:*
$$X = \bigcup U_z$$
- *Αν $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$, τότε η συνάρτηση $z_2 \circ z_1^{-1}$ από το $z_1(U_{z_1} \cap U_{z_2})$ στο $z_2(U_{z_1} \cap U_{z_2})$ είναι ολόμορφη.*
- *Η οικογένεια χαρτών (U_z, z) είναι μεγίστη ως προς αυτές τις ιδιότητες.*



Θα επεξηγήσουμε τη σημασία των παραπάνω εννοιών. Έστω X τοπολογικός χώρος. Το ανοιχτό σύνολο U θα λέγεται *μιγαδικός χάρτης* του X αν υπάρχει ομοιομορφισμός

$$\phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$$

ο οποίος απεικονίζει το U στο ανοιχτό σύνολο V του $\mathbb{C}$. Έναν μιγαδικό χάρτη του X θα τον συμβολίζουμε με (U, z). Έστω $a \in X$, αν $a \in U$, τότε ο (U, z) λέγεται χάρτης του a. Έστω

$$\mathcal{U} = \{(U_i, z_i) : i \in\}$$

μια οικογένεια μιγαδικών χαρτών του X. Η οικογένεια $\mathcal{U}$ θα λέγεται *άτλαντας* του X αν και μόνο αν $\cup_{i \in I} U_i = X$. Αν τώρα (U_1, z_1) και (U_2, z_2) χάρτες του X, δηλαδή $z_i : U_i \to V_i$, όπου $V_i \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά για $i = 1, 2$ και z_i ομοιομορφισμοί, τότε οι ϕ_1 και z_2 θα λέγονται δι-ολόμορφα συμβατοί όταν η απεικόνιση

$$z_2 \circ z_1^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow z_2(U_1 \cap U_2)$$

είναι δι-ολόμορφη, δηλαδή ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη.

Ορισμός VII.2.2. *Ένας άτλαντας $\mathcal{U}$ του X θα λέγεται ολόμορφος άτλαντας αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι (U_i, z_i) και (U_j, z_j) του $\mathcal{U}$ είναι δι-ολόμορφα συμβατό.*

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η σύνθεση από δι-ολόμορφες συναρτήσεις είναι επίσης δι-ολόμορφη, δηλαδή η δι-ολόμορφη συμβατότητα μεταξύ μιγαδικών ατλάντων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός VII.2.3. *Μια μιγαδική δομή Σ σε μια πολλαπλότητα X είναι μια κλάση ισοδυναμίας δι-ολόμορφων ισοδύναμων ατλάντων.*

Κάθε μιγαδική δομή περιέχει έναν μονοσήμαντα ορισμένο μέγιστο άτλαντα ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{U}^* = \big\{(U,z):\ \text{χάρτης της } X \text{ για κάθε } (U_i,z_i) \in \mathcal{U} \text{ τα } (U,z),(U,z_i) \text{ είναι δι-ολόμορφα συμβατά}\big\}.$$

Δίνουμε τον παρακάτω ισοδύναμο ορισμό:

Ορισμός VII.2.4. *Μια επιφάνεια Riemann είναι ένα ζευγάρι (X,Σ), όπου X συνεκτική 2-διάστατη (πάνω από το $\mathbb{R}$) πολλαπλότητα και Σ είναι μια μιγαδική δομή επί του X.*

Παραδοχή Όταν X επιφάνεια Riemann, τότε ως έναν χάρτη επί του X καταλαβαίνουμε έναν μιγαδικό χάρτη του μέγιστου άτλαντα της μιγαδικής δομής του X.

Παραδείγματα VII.2.5. *1.* $X=\mathbb{C}$, $\mathcal{U}=\{(\mathbb{C},\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}\}$.

2. *Έστω $Y\subset X$, Y ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο της επιφάνειας Riemann X.*

3. *Ειδικά κάθε τόπος του $\mathbb{C}$ είναι επιφάνεια Riemann.*

4. *Σφαίρα του Riemann/Προβολική ευθεία. Ο χώρος $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ είναι εξ ορισμού ο χώρος των κλάσεων ισοδύναμιας $[z_0:z_1]$ από ζευγάρια μιγαδικών αριθμών $(z_1,z_2)\neq(0,0)$ ώστε $(z_1,z_2)\sim(z_1',z_2')$ αν και μόνο αν $(z_1,z_2)=\lambda(z_1',z_2')$ για κάποιο μη-μηδενικό $\lambda\in\mathbb{C}$. Θεωρούμε τα ανοιχτά σύνολα*

$$U_0=\{[z,w]:z\neq0\} \text{ και } U_1=\{[z,w]:w\neq0\}$$

τα οποία καλύπτουν το $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Ορίζουμε $\phi_0:U_0\to\mathbb{C}$ με $\phi_0([z,w])=z/w$ και $\phi_1:U_1\to\mathbb{C}$ με $\phi_1([z,w])=w/z$. Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες. Επίσης, $\phi_i(U_0\cap U_1)=\mathbb{C}^*$ το οποίο είναι ανοιχτό του $\mathbb{C}$. Η σύνθεση $\phi_1\circ\phi_0:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ στέλνει το $s\mapsto 1/s$ και είναι δι-ολόμορφη στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, αφού τα U_0,U_1 είναι συνέκτικα και έχουν μη κενή τομή, ο χώρος $\mathbb{P}^1$ είναι συνεκτικός. Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι είναι και Hausdorff, αφού δύο διαφορετικά σημεία ή ανήκουν και τα δύο στο ίδιο Hausdorff ανοιχτό U_i ή σε διαφορετικά ανοιχτά U_i.

5. *Ένας τόρος της μορφής $\mathbb{C}/\Lambda$, όπου Λ διακριτή υποομάδα ισόμορφη με το $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Περισσότερο αναλυτικά θεωρούμε δύο μιγαδικούς αριθμούς ω_1, ω_2 οι οποίοι είναι $\mathbb{R}$-γραμμικά ανεξάρτητοι. Το δικτυωτό Λ ορίζεται ως*

$$\Lambda=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2=\{m_1\omega+m_2\omega_2:m_1,m_2\in Z\}.$$

Το Λ είναι προσθετική υποομάδα της προσθετικής ομάδας του $\mathbb{C}$ και όπως έχουμε δει στο παράδειγμα V.2.24 το πηλίκο έχει την τοπολογική δομή τόρου, ενώ η συνάρτηση $\pi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda$ είναι συνεχής εξ ορισμού. Κάθε ανοιχτό U στο $\mathbb{C}/\Lambda$ είναι εικόνα ενός ανοιχτού του $\mathbb{C}$ του $\pi^{-1}(U)$. Επίσης, η π είναι ανοιχτή συνάρτηση, αφού αν $V\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό, τότε το $\pi(V)$ είναι ανοιχτό στο πηλίκο αφού το

$$\pi^{-1}p(V)=\bigcup_{\omega\in\Lambda}(\omega+\Lambda)$$

είναι ανοιχτό στο $\mathbb{C}$. Ορίζουμε το κλειστό παραλληλόγραμμο

$$P_z=\{z+\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2:0\leqslant\lambda_1,\lambda_2\leqslant1\}.$$

Κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ είναι ισοδύναμο modulo Λ με ένα σημείο του P_z. Συνεπώς το $\pi:P_z=\mathbb{C}/\Lambda$. Επιπλέον το $\mathbb{C}/\Lambda$ είναι συμπαγές ως εικόνα του συμπαγούς P_z. Αφού το Λ είναι διακριτή υποομάδα, υπάρχει ένα $\epsilon>0$ ώστε $|\omega|>2\epsilon$ για κάθε μη μηδενικό $\omega\in\Lambda$. Για ένα σταθερό $z_0\in\mathbb{C}$ ο ανοιχτός δίσκος $D(z_0,\epsilon)$ δεν περιέχει σημεία ισοδύναμα modulo Λ. Έτσι η συνάρτηση προβολής π όταν περιοριστεί στο $D_{z_0}=D(z_0,\epsilon)$ είναι ένας ομοιομορφισμός π_{z_0} με το $\pi(D_{z_0})$. Οι συναρτήσεις χαρτών είναι οι αντίστροφες των π_{z_0} και ικανοποιούν τη συνθήκη συμβατότητας χαρτών.

6. *Αν Γ είναι μια ομάδα Fuchs πρώτου είδους και $\mathbb{H}$ το πάνω μιγαδικό επίπεδο, τότε η ομάδα Γ δρα στο πάνω ημιεπίπεδο και το $\mathbb{H}/\Gamma$ γίνεται επιφάνεια Riemann.*

7. *Οι modular καμπύλες $X(N)$ είναι επίσης επιφάνειες Riemann.*

VII.2.1 Ολόμορφες και μερόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός VII.2.6. *Μία συνάρτηση $f : Y \longrightarrow X$ μεταξύ δυο επιφανειών Riemann X, Y θα λέγεται ολόμορφη (αντίστοιχα διαφορίσιμη) όταν έχει τις παρακάτω ιδιότητες: $\forall \quad P \in Y$ και $f(P) \in X$ υπάρχουν περιοχές συντεταγμένων (U, z) του P και (V, w) του $f(P)$ τέτοιες ώστε $f(U) \subset V$ και η*

$$w \circ f \circ z^{-1} : z(U) \longrightarrow w(V)$$

να είναι ολόμορφη (αντίστοιχα πραγματικά διαφορίσιμη) συνάρτηση.

Πρόταση VII.2.7. *Οι περιοχές συντεταγμένων (U, z) και (V, w) παραπάνω μπορούν να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε η*

$$w \circ f \circ z^{-1} : z(U) \longrightarrow w(V)$$

να στέλνει το

$$z \longmapsto z^e$$

για κάποιο $e \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F = w \circ f \circ z^{-1} : U \to V$. Αυτή είναι μια ολόμορφη συνάρτηση ανάμεσα σε ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και μπορεί να περιοριστεί σε ανοιχτό δίσκο του U ώστε να υπάρχει $e \in \mathbb{N}$ με $F(z) = z^e g(z)$, με $g(z)$ αναλυτική και $g(0) \neq 0$. Επίσης, υπάρχει μία γειτονιά του 0, έστω U_2 και μία αναλυτική $p(z)$ σε αυτήν τη γειτονιά έτσι ώστε $p^e(z) = g(z)$. □

Παρατήρηση VII.2.8. *Ο αριθμός e στο προηγούμενο θεώρημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής. Για κάθε γειτονιά U_a του a υπάρχει γειτονιά $U \subset U_a$ και W γειτονιά του b, με $b = f(a)$ έτσι ώστε το σύνολο $f^{-1}(y) \cap U$ περιέχει e ακριβώς στοιχεία, για κάθε $y \in W$ με $y \neq b$. Ονομάζουμε το e πολλαπλότητα με την οποία η f παίρνει την τιμή b στο σημείο a ή πιο απλά λέμε ότι η f έχει πολλαπλότητα e στο σημείο a.*

Ορισμός VII.2.9. *Αν το $e > 1$, τότε θα λέμε ότι η f διακλαδίζεται στο P με δείκτη διακλάδωσης e.*

Παρατήρηση VII.2.10. *Συγκρίνετε την τοπική αυτή έκφραση της ολόμορφης συνάρτησης με το παράδειγμα V.2.7.*

Θεώρημα VII.2.11 (Αναλυτική Συνέχιση)**.** *Αν f και g ολόμορφες συναρτήσεις στο X και $f = g$ σε ανοιχτό υποσύνολο της X, τότε $f = g$ σε μια ανοικτή συνιστώσα. Ιδιαίτερα αν X συνεκτική πολλαπλότητα, τότε $f = g$ σε όλο το X,*

Απόδειξη. [8, σελ. 61]. □

Θεώρημα VII.2.12 (Θεώρημα ανοιχτής συνάρτησης)**.** *Αν η X είναι συνεκτική επιφάνεια Riemann και f ολόμορφη μη σταθερά, τότε η f είναι ανοιχτή συνάρτηση, δηλαδή στέλνει ανοιχτά σε ανοιχτά.*

Απόδειξη. [14, σελ. 40]. □

Θεώρημα VII.2.13 (Liouville)**.** *Αν M είναι συνεκτική και συμπαγής και f ολόμορφη, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. [14, Θεώρημα 1.37 σελ. 29] □

Θεώρημα VII.2.14 (Θεώρημα ταυτότητας)**.** *Αν f_1, f_2 ολόμορφες συναρτήσεις μεταξύ επιφανειών Riemann X, Y. Αν $f_1 = f_2$ σε ένα υποσύνολο A του X που να έχει ένα σημείο συσσώρευσης, τότε $f_1 = f_2$.*

Απόδειξη. Θέτουμε G να είναι το σύνολο όλων των σημείων $x \in X$ που έχουν μία ανοικτή γειτονιά W του G έτσι ώστε $f_1|_W = f_2|_W$. Το G είναι ένα ανοικτό σύνολο από την παραπάνω υπόθεση. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστό. Έστω $b \in \partial G$, τότε $f_1(b) = f_2(b)$ από τη συνέχεια των f_i. Επιλέγουμε συντεταγμενικές περιοχές $\varphi : U \to X$ και $\psi : U' \to Y$ με $b \in \varphi(U)$ και $f_i(\varphi(U)) \subset \psi(U')$. Υποθέτουμε επίσης ότι ο U και συνεπώς το $\varphi(U)$, είναι συνεκτικά χωρία. Οι απεικονίσεις

$$g_i = \psi^{-1} \circ f_i \circ \varphi : U \to U' \subset \mathbb{C}$$

είναι αναλυτικές. Καθώς $\varphi(U) \cap G \neq \varnothing$, θα έχουμε από το προηγούμενο θεώρημα ότι οι g_1, g_2 θα είναι ταυτοτικά ίσες και $f_1|_{\varphi(U)} = f_2|_{\varphi(U)}$. Έτσι $b \in G$ και το G είναι κλειστό. Δείξαμε ότι $\partial G \subset G$, έτσι $G^0 \cup \partial G = \overline{G} \subset G$ και γνωρίζουμε ότι $G \subset \overline{G}$, με αποτέλεσμα $\overline{G} = G$. Καθώς ο X είναι συνεκτικός τα μόνα ανοικτά και κλειστά ταυτόχρονα υποσύνολά του θα είναι το $\varnothing$ και ολόκληρος ο X. Κάνοντας ξανά χρήση του θεωρήματος ταυτότητας θα έχουμε ότι $z_0 \in G$ και έτσι η πρώτη περίπτωση αποκλείεται.

Δείτε και [14, προτ. 3.10]. □

Πρόταση VII.2.15. *Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και $F : X \to Y$ μια μη-σταθερή συνάρτηση στη συνεκτική επιφάνεια Riemann Y. Τότε η Y είναι συμπαγής και η F είναι επί.*

Απόδειξη. Αφού η F είναι ολόμορφη και το X ανοιχτό στον εαυτό του, το $F(X)$ είναι ανοιχτό στο Y από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης. Από την άλλη πλευρά, το X είναι συμπαγές, συνεπώς το $F(X)$ είναι συμπαγές. Αφού το Y είναι Hausdorff, το $F(X)$ είναι κλειστό στο Y. Συνεπώς το $F(X)$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο συνεκτικό Y και πρέπει $Y = F(X)$. Δηλαδή η F είναι επί και το Y συμπαγές. □

Πόρισμα VII.2.16. *Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε συμπαγή επιφάνεια Riemann είναι σταθερή.*

Μία αναλυτική f στη συμπαγή επιφάνεια X, είναι από τον ορισμό μία $f : X \to \mathbb{C}$ και ο $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγής. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται το ζητούμενο.

Πόρισμα VII.2.17. *Κάθε μερόμορφη συνάρτηση f στον $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, είναι μία ρητή συνάρτηση και κάθε αναλυτική στον $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Η f έχει πεπερασμένο αριθμό πόλων. Αν είχε άπειρους πόλους, τότε το σύνολο όλων των πόλων θα είχε ένα σημείο συσσώρευσης (από την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass). Από το θεώρημα ταυτότητας η f θα ήταν ίση με τη σταθερή απεικόνιση $z = \infty$. Υποθέτουμε ότι το ∞ δεν είναι πόλος της f (διαφορετικά επιλέγουμε την $1/f$). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ να είναι οι πόλοι της f και

$$h_\nu(z) = \sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z - a_\nu)^j,$$

να είναι το κύριο μέρος της f στον πόλο a_ν, με $\nu = 1, \ldots, n$. Η συνάρτηση $g := f - (h_1 + \cdots + h_n)$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Υπενθυμίζουμε ότι το άθροισμα και το γινόμενο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση. Με $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ συμπαγή επιφάνεια Riemann. Από το προηγούμενο πόρισμα η g είναι μία σταθερή συνάρτηση και η f είναι ρητή. □

Πρόταση VII.2.18 (Διακριτές προεικόνες)**.** *Έστω $F : X \to Y$ μια μη-σταθερή ολόμορφη συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann. Τότε για κάθε $y \in Y$ η προεικόνα $F^{-1}(y)$ είναι διακριτό υποσύνολο του X. Ιδιαίτερα αν οι X και Y είναι συμπαγείς, τότε το $F^{-1}(y)$ είναι μη-κενό πεπερασμένο σύνολο για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη. [14, προτ. 3.12]. □

Μερόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός VII.2.19. *Μια συνάρτηση της επιφάνειας Riemann* X *στο* $\mathbb{C}$ *θα λέγεται μερόμορφη όταν είναι ορισμένη και ολόμορφη στο συμπλήρωμα ένος διακριτού πεπερασμένου συνόλου* B *της* X *και επιπλέον αν* $q \in B$, *τότε* $f(p) \to \infty$ *καθώς* $p \to q$. *Τα σημεία της* B *ονομάζονται πόλοι της* f.

Το σύνολο των μερομόρφων συναρτήσεων επί της X, θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X)$, αποτελεί σώμα με πράξεις τη συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.

Θεώρημα VII.2.20. *Κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann έχει μια μη-τετριμμένη μερόμορφη συνάρτηση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος απαιτεί τεχνικές συναρτησιακής ανάλυσης από αυτές που έχουμε επεξεργαστεί μέχρι τώρα όπως αρμονικά διαφορικά και θεωρία χώρων Hilbert. Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο δεύτερο κεφάλαιο του [5].

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται και με τη βοήθεια του Θεωρήματος Riemann-Roch, όμως η απόδειξη που θα δώσουμε χρησιμοποιεί την ισοδυναμία αλγεβρικών καμπυλών στο $\mathbb{C}$ και επιφανειών Riemann η οποία χρησιμοποιεί το ζητούμενο θεώρημα. □

Παρατήρηση VII.2.21. *Κάθε μερόμορφη συνάρτηση* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, *μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση* $\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *θέτοντας* $\overline{f}(q) = \infty \ \forall q \in B$.

Ορισμός VII.2.22. *(Πόλοι και ρίζες μερομόρφων συναρτήσεων). Ρίζα μιας συνάρτησης* $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *λέγεται κάθε αντίστροφη εικόνα του* $0 \in \mathbb{P}^1$. *Τάξη της ρίζας λέγεται ο βαθμός διακλάδωσης της συνάρτησης στη συγκεκριμένη αντίστροφη εικόνα. Αντιστρόφως, πόλο και τάξη του πόλου καλούμε τις αντίστροφες εικόνες του* ∞ *και τον βαθμό διακλάδωσης σε εκείνο το σημείο.*

Οι παραπάνω ορισμοί είναι ισοδύναμοι με τους γνωστούς από τη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, αν θεώρησουμε τη συμπεριφορά της σειράς Laurent της συνάρτησης γραμμένης σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Βασικό πλεονέκτημα της μιγαδικής θεώρησης είναι η τοπική ανάλυση κάθε συνάρτησης σε δυναμοσειρά. Μπορούμε να κάνουμε μία παρόμοια κατασκευή σε οποιοδήποτε σώμα. Πράγματι αν C είναι μια καμπύλη και P ένα ομαλό σημείο, τότε το M_P/M_P^2 έχει διάσταση 1 υπέρ το $\overline{K} = \overline{K}[C]_P/M_P$, οπότε [2] ο $\overline{K}[C]_P$ είναι διακριτός δακτύλιος εκτίμησης.

Ορισμός VII.2.23. *Εστω* C *καμπύλη και* $P \in C$, *μη ιδιόμορφο σημείο. Η κανονικοποιημένη εκτίμηση του* $\overline{K}[C]_P$ *δίνεται από:*

$$\mathrm{ord}_P : \overline{K}[C]_P \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots\} \bigcup \{\infty\}$$

$$\mathrm{ord}_P(f) = \max\{d \in \mathbb{Z} : f \in M_P^d\}.$$

Η παραπάνω εκτίμηση, επεκτείνεται σε όλο το $\overline{K}(C)$ *απλά θέτοντας* $\mathrm{ord}_P(f/g) := \mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g)$. *Μία γενικευμένη τοπική συντεταγμένη της* C *στο σημείο* P *είναι μία συνάρτηση* $t \in \overline{K}(C)$ *με* $\mathrm{ord}_P(t) = 1$, *δηλαδή ένας γεννήτορας του ιδεώδους* M_P. *Η συνάρτηση* f *έχει ρίζα (αντίστοιχα πόλο) στο* P *αν και μόνο αν* $\mathrm{ord}_P(f) > 0$ *(αντίστοιχα* $\mathrm{ord}_P(f) < 0$*).*

VII.3 Η θεωρία Galois των μερομόρφων συναρτήσεων

Θεώρημα VII.3.1 (Θεώρημα του Riemann για τις αιρόμενες ανωμαλίες)**.** *Αν μία συνάρτηση* f *είναι φραγμένη και αναλυτική σε μία «τρυπημένη» γειτονιά ενός σημείου* z_0, *τότε η* f *είναι αναλυτική στο* z_0 *είτε το* z_0 *είναι σημείο αιρόμενης ανωμαλίας.*

Απόδειξη. [4, Θεώρημα 1, σελ. 397] □

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι:

Θεώρημα VII.3.2. *Αν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο μίας επιφάνειας Riemann και $z_0 \in U$, με f αναλυτική και φραγμένη στο $U \setminus \{z_0\}$, τότε μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε μία $\widetilde{f}$, σε ολόκληρο το U.*

VII.3.1 Τοπολογικά καλύμματα και επιφάνειες Riemann

Ένας *τοπικά συμπαγής χώρος* X ορίζεται να είναι ένας τοπολογικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει συμπαγές υποσύνολό του X που περιέχει μία γειτονιά του x. Προφανώς η συμπάγεια εξασφαλίζει την τοπική συμπάγεια.

Ορισμός VII.3.3. *Μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπικά συμπαγών χώρων, ονομάζεται proper αν για κάθε συμπαγή K του Y, η αντίστροφη εικόνα του μέσω της f, $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγής.*

Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει πάντα όταν ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής: από τη συνέχεια της f το $f^{-1}(K)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς και συνεπώς ένα συμπαγές σύνολο. Επίσης, μία proper συνάρτηση είναι κλειστή (οι εικόνες κλειστών μέσω της f είναι κλειστά σύνολα).

Ορισμός VII.3.4. *Μία απεικόνιση $f : Y \to X$ μεταξύ τοπολογικών χώρων Y, X ονομάζεται διακριτή αν το $f^{-1}(x)$ είναι ένα διακριτό υποσύνολο του Y, για κάθε $x \in X$.*

Λήμμα VII.3.5. *Έστω X, Y τοπικά συμπαγείς και $f : Y \to X$ μία proper και διακριτή απεικόνιση. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $f^{-1}(\{x\})$ είναι πεπερασμένο,*
2. *Αν $x \in X$ και V μία γειτονιά του $f^{-1}(x)$, τότε υπάρχει μία γειτονιά U του x έτσι ώστε $f^{-1}(U) \subset V$.*

Απόδειξη. Για το πρώτο μέρος έχουμε ότι το $f^{-1}(\{x\})$ θα είναι συμπαγές (η f είναι proper) και διακριτό υποσύνολο του Y ταυτόχρονα, συνεπώς πεπερασμένο. Για το δεύτερο, έχουμε ότι για κάθε V να είναι μία γειτονιά του $f^{-1}(x)$ το $Y \setminus V$ θα είναι κλειστό του Y και καθώς η f είναι proper συνάρτηση, θα είναι κλειστή και το $f(Y \setminus V) := A$ θα είναι κλειστό του X με $x \notin A$. Έστω $U = X \setminus A$ να είναι μία ανοικτή γειτονιά του x. Τότε έχουμε $f^{-1}(U) = Y \setminus f^{-1}(A)$ και $f^{-1}(f(Y \setminus V)) \supset Y \setminus V$. Στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε το ότι για κάθε $f : A \to B$ με $A_0 \subset A$ ισχύει $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$. Συνεπώς έχουμε ότι $U = Y \setminus f^{-1}(f(Y \setminus V)) \subset V$. □

Θεώρημα VII.3.6. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $p : Y \to X$ μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση. Αυτή δεν έχει σημεία διακλάδωσης αν και μόνο αν είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός. Επιπροσθέτως, αν Y συμπαγής (ισχύει και με ασθενέστερη συνθήκη, όταν X, Y είναι τοπικά συμπαγείς χώροι με p proper απεικόνιση), τότε η p είναι μία καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω ότι η p δεν έχει σημεία διακλάδωσης και y τυχαίο σημείο του Y. Υπάρχει μία ανοικτή γειτονιά του Y έτσι ώστε η $p|_V$ να είναι 1-1. Καθώς η p συνεχής και ανοικτή (από VII.2.12) θα απεικονίζει ομοιομορφικά το ανοικτό V στο ανοικτό $U = p(V)$. Αντίστροφα, αν η p είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός, τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του y, έστω V που θα απεικονίζεται ομοιομορφικά σε ένα ανοικτό του X. Έτσι η $p|_V$ θα είναι 1-1 με συνέπεια το y να μην είναι σημείο διακλάδωσης. Τώρα από το θεώρημα VII.2.15 η p επί και ο X συμπαγής. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σημείο $x \in X$ έχει γειτονιά $U \subset X$ που είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Πράγματι θέτουμε $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ με $y_i \neq y_j \; \forall \, i \neq j$. Καθώς η p είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός, έχουμε ότι για κάθε $j = 1, \dots, n$ υπάρχει μία ανοικτή γειτονιά W_j του y_j και μία ανοικτή U_j του x έτσι ώστε η $p|_{W_j} : W_j \to U_j$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα W_j είναι ξένα ανά δύο. Όμως και η $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ είναι μία ανοικτή περιοχή του $p^{-1}(x)$. Η p είναι proper συνάρτηση, καθώς ο Y είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και διακριτή: αν δεν ήταν για κάποιο $\alpha \in X$, τότε από το θεώρημα ταυτότητας, θα ήταν ταυτοτικά ίση με τη σταθερή απεικόνιση $p(x) = \alpha$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα VII.3.5, από όπου υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n$ του x με $p^{-1}(U) \subset W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Θέτοντας $V_j = W_j \cap p^{-1}(U)$, θα έχουμε ότι τα V_j θα είναι ξένα με

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$$

και $p|_{V_j} : V_j \to U$ να είναι ένας ομοιομορφισμός για κάθε $j = 1, \dots, n$. □

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ επιφανειών Riemann που να είναι αναλυτική, proper, όχι σταθερή. Το σύνολο των σημείων διακλάδωσης R είναι κλειστό (για κάθε $p \in R$ υπάρχει γειτονιά του p, U_p με $U_p \cap R \neq \varnothing$ από την παρατήρηση VII.2.8) και διακριτό, δηλαδή κάθε $p \in R$ είναι μεμονωμένο (αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in R$ υπάρχει U_p με $U_p \cap R = \{p\}$. Από την ίδια παρατήρηση, μικραίνοντας τις ανοικτές περιοχές U του p, μπορούμε να καταλήξουμε στη ζητούμενη περιοχή). Τώρα καθώς f proper το $f(R) := S$ θα είναι κλειστό και διακριτό υποσύνολο του Y. Ονομάζουμε το S σύνολο των κρίσιμων τιμών της f Αν ορίσουμε $Y' = Y \setminus S$ και $X' = X \setminus f^{-1}(S)$, τότε όπως είδαμε, παίρνουμε μία αναλυτική καλυπτική απεικόνιση p n-φύλλων. Κάθε τιμή $c \in Y'$ η p την παίρνουμε ακριβώς n φορές. Για να επεκτείνουμε το συμπέρασμα αυτό και για τις κρίσιμες τιμές $s \in S$ πρέπει να λάβουμε υπόψιν και την πολλαπλότητα:

Θεώρημα VII.3.7. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $f : X \to Y$ μία proper όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση. Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n έτσι ώστε η f να παίρνει κάθε τιμή $c \in Y$ ακριβώς n φορές, προσμετρώντας και τις πολλαπλότητες.*

Απόδειξη. Έστω n ο αριθμός των φύλλων της καλυπτικής απεικόνισης $p := f|_{X'} : X' \to Y'$. Έστω $s \in S$ μία κρίσιμη τιμή της f και $f^{-1}(s) = \{x_1, \dots, x_r\}$ και ορίζουμε k_j να είναι η πολλαπλότητα της f στο σημείο x_j. Από την παρατήρηση VII.2.8 υπάρχουν U_j ανοικτές περιοχές των x_j και V_j ανοικτές περιοχές του s έτσι ώστε για κάθε $c \in V_j \setminus \{s\}$, το σύνολο $f^{-1}(c) \cap U_j$ να περιέχει ακριβώς k_j στοιχεία, με $j = 1, \dots, r$. Τώρα από το λήμμα VII.3.5 μπορούμε να βρούμε μία ανοικτή περιοχή $V \subset V_1 \cap \cdots \cap V_r$ του s έτσι ώστε $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Τότε για κάθε σημείο $c \in V \cap Y'$, θα έχουμε ότι το $f^{-1}(c)$ αποτελείται από $k_1 + \cdots + k_r$ σημεία. Όμως το $c \in Y'$ και συνεπώς $f^{-1}(c) = p^{-1}(c) = n$. Έτσι $n = k_1 + \cdots + k_r$. □

Πρόταση VII.3.8. *Έστω $f : X \to Y$ μία μη-σταθερή αναλυτική απεικόνιση και X, Y να είναι συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Τότε:*

1. *Το σύνολο σημείων διακλάδωσης $R \subset X$ όπως και το $S = f(R) \subset Y$ είναι πεπερασμένη.*
2. *Η απεικόνιση $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση n-φύλλων. Ονομάζουμε τον ακέραιο n βαθμό (degree) της αναλυτικής f και τον συμβολίζουμε με $n := \mathrm{deg} f$. Αυτός είναι το άθροισμα του πλήθους των αντίστροφων εικόνων ενός γνωστού $q \in Y$ μετρημένης της πολλαπλότητας της f σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία, δηλαδή:*
3. *Για κάθε $q \in Y$ ισχύει:*
$$\sum_{P \in f^{-1}(q)} e_f(P) = n.$$

Βλέπουμε ότι κάθε αναλυτική απεικόνιση που πληροί τις προϋποθέσεις της παραπάνω πρότασης μπορεί να επεκταθεί σε ένα τοπολογικό κάλυμμα n-φύλλων. Αυτός είναι ο λόγος που μία τέτοια αναλυτική απεικόνιση την ονομάζουμε αναλυτική καλυπτική απεικόνιση. Πρέπει να προσέξουμε ότι για αναλυτικά καλύμματα, είναι επιτρεπτό να περιέχουν σημεία διακλάδωσης, κάτι που δεν ισχύει για τοπολογικά καλύμματα.

Αν $f \in \mathcal{M}(X)$, όχι σταθερή, με X επιφάνεια Riemann, τότε έχουμε $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ με S να είναι διακριτό υποσύνολο του X. Βρίσκοντας μία συντεταγμενική περιοχή $\varphi : U \to X$ για κάθε $P \in X$ έτσι ώστε $\varphi(0) = P$, η $h = f \circ \varphi(z)$ είναι αναλυτική στο $U \setminus \{P\}$ και συνεπώς τη γράφουμε όπως και πριν σαν $h = f \circ \varphi(z) = z^k \cdot g(z)$ με g να είναι αναλυτική και $g(z) \neq 0 \, \forall \, z \in U$, επιτρέποντας τώρα στο k να πάρει και αρνητικές τιμές. Θα έχουμε έτσι ότι αν η πολλαπλότητα της f στο σημείο $P \in X$ είναι k, τότε:

- Αν $k > 0$ η f θα έχει ρίζα με πολλαπλότητα k στο P με $f(P) = 0$ και $k = e_f(P)$,
- Αν $k < 0$ η f θα έχει πόλο με πολλαπλότητα k στο P με $f(P) = \infty$ και $k = -e_f(P)$,
- Διαφορετικά $k = 0$,
- Αν το σημείο P είναι πόλος ή ρίζα, δηλαδή αν $k \neq 0$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ανωμαλία στο P.

Λήμμα VII.3.9. *Για κάθε συμπαγή επιφάνεια Riemann X και για κάθε όχι σταθερή μερόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(X)$, ο αριθμός των ριζών της ισούται με τον αριθμό των πόλων της, προσμετρώντας τις πολλαπλότητες:*

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_f(P) + \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_f(P).$$

Όμως από τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_f(P) - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_f(P).$$

και από το θεώρημα 2.21 θα έχουμε ότι

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = n - n = 0.$$

□

VII.3.2 Διακλαδιζόμενα καλύμματα

Θα δείξουμε το αντίστροφο της πρότασης VII.3.8, βλέποντας πώς από ένα τοπολογικό κάλυμμα μπορεί να προκύψει ένα αναλυτικό κάλυμμα μεταξύ επιφανειών Riemann.

Πρόταση VII.3.10. *Έστω Y επιφάνεια Riemann, S ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Y και $p : X' \to Y \setminus S$ μία καλυπτική απεικόνιση e φύλλων με X' να είναι συνεκτικός. Μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X' σαν ένα ανοικτό υποσύνολο μίας επιφάνειας Riemann X: $X' \hookrightarrow X$ με*

$$X = X' \cup \{ \text{ένα πεπερασμένο σύνολο} \}$$

έτσι ώστε η p να μπορεί να επεκταθεί σε μία proper, αναλυτική συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann $f : X \to Y$.

Απόδειξη. Το πρόβλημα μπορούμε να το δούμε τοπικά στον χώρο Y, προσπαθώντας να «γεμίσουμε» τα σημεία που λείπουν. Θεωρούμε τη συνήθη καλυπτική απεικόνιση

$$p_e : D^o \to D^o,\ z \mapsto z^e$$

με $D = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$, και $D^o = D \setminus \{0\}$. Γνωρίζοντας ότι $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ και ότι ο S^1 είναι ένα strong deformation retract του D^o, θα πρέπει ο εγκλεισμός $j : S^1 \to D^o$ να επάγει έναν ισομορφισμό των εμπλεκόμενων θεμελιωδών ομάδων. Έτσι $\pi_1(D^o) = \mathbb{Z}$ και συνεπώς κάθε συνεκτικός καλυπτικός τοπολογικός χώρος του με πεπερασμένα φύλλα, θα πρέπει να αντιστοιχεί σε πεπερασμένες ομάδες του $\mathbb{Z}$. Μα αυτές είναι οι $e\mathbb{Z}$ με $e \in \mathbb{N}$ με αντίστοιχες καλυπτικές απεικονίσεις τις p_e που αναφέραμε. Αυτό σημαίνει ότι οι καλυπτικοί χώροι του D^o θα είναι ίσοι μέχρι ισομορφισμό καλυπτικών χώρων. Πράγματι αν $p : E^o \to D^o$ μία καλυπτική απεικόνιση e φύλλων, από το πόρισμα V.2.42 οι δύο καλυπτικοί χώροι θα είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν οι δύο υποομάδες $p_*(\pi_1(E^o)), p_{e_*}(\pi_1(D^o))$ του $\pi_1(D^o) \cong \mathbb{Z}$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας. Όμως επειδή η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή ομάδα, κάτι τέτοιο θα συμβαίνει αν και μόνο αν αντιστοιχούν στην ίδια υποομάδα του $\mathbb{Z}$. Πράγμα που συμβαίνει, καθώς, αφού είναι e-fold καλυπτικοί χώροι, θα πρέπει να αντιστοιχούν στην υποομάδα $e\mathbb{Z}$. Έτσι αν $p : E^o \to D^o$ είναι καλυπτική απεικόνιση e-φύλλων, υπάρχει ομοιομορφισμός των καλυπτικών χώρων $\psi : D^o \to E^o$ με $p \circ \psi = p_e$, ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή βάσης. Μάλιστα έχουμε ακριβώς e επιλογές για τον ομοιομορφισμό ψ, που αντιστοιχούν στα e σημεία του E^o για μια συγκεκριμένη βάση. Οι υπόλοιπες επιλογές για το ψ έχουν τη μορφή $z \mapsto \psi(\exp(2\pi k/e) \cdot z)$ με $\exp(2\pi i k/e)$ να είναι μία από της e-οστές ρίζες της μονάδας και $k \in [1, e-1]$. Πράγματι, καθώς οι χώροι D^o και E^o είναι ισοδύναμοι καλυπτικοί χώροι, βλέπε ορισμό 1.16, θα πρέπει οι καλυπτικές απεικονίσεις p, p_e να είναι ισόμορφες. Πράγματι $p = p_e \circ \psi^{-1}$ με τύπο $z \mapsto \psi^{-1}(z) \mapsto (\psi^{-1}(z))^e$ και $z \mapsto \exp(2\pi i k/e) \cdot z \mapsto z^e$.

Τώρα είναι σαφές πώς θα «γεμίσουμε» τον καλυπτικό χώρο E^o. Ορίζουμε $E = E^o \cup \{p\}$ με $p \notin E^o$ και δίνουμε στον E δομή επιφάνειας Riemann έτσι ώστε: η επέκταση της ψ από το D^o στο D να απεικονίζει το 0 στο p και το εσωτερικό του D ομοιομορφικά στο εσωτερικό του και συνεπώς να αποτελεί έναν ομοιομορφισμό, $\widehat{\psi}$, με $\widehat{\psi}(D) \cong E$.

Επιστρέφοντας στην καλυπτική απεικόνιση $p : X' \to Y \setminus S$ του θεωρήματος, για $Q \in S$ μπορούμε να βρούμε συντεταγμενική περιοχή $\varphi : D \to \varphi(D) := U \subset Y$ με $\varphi(0) = Q$, έτσι ώστε $U \cap S = \{Q\}$ και με U^o να συμβολίζουμε το $U \setminus \{Q\}$. Θα έχουμε ότι κάθε τέτοιο U^o θα είναι ομαλά καλυμμένο, δηλαδή: $p^{-1}(U^o) = \cup_{n=1}^m V_n^o$ με τα V_n^o να είναι ξένα για κάθε $n = 1, \ldots, m$ και $p|_{V_i^o}(V_i^o) \cong U^o$. Τώρα ο περιορισμός της καλυπτικής απεικόνισης σε κάθε ένα από τα V_i^o είναι μία καλυπτική απεικόνιση, έστω e_i φύλλων, του U^o. Από τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε ομοιομορφισμούς $\psi_i : D^o \to V_i^o$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό: δηλαδή να ισχύει $p(\psi_i(z)) = \varphi(z^{e_i})$. Προσθέτουμε ένα σημείο για κάθε V_i^o έτσι ώστε $V_i^o \hookrightarrow V_i$ και κάθε ψ_i να επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό από το $D \to V_i$. Παίρνοντας αυτές τις επεκτάσεις για συντεταγμενικές περιοχές θα έχουμε την ξένη ένωση αυτών των V_i να μας δίνει μία επιφάνεια Riemann. Η απεικόνιση $V_i^o \to U^o$ επεκτείνεται σε μία αναλυτική απεικόνιση από το $V_i \to U$ έτσι ώστε να έχει δείκτη διακλάδωσης e_i στο σημείο που προσθέσαμε. Αν αυτό γίνει για κάθε σημείο του S, παίρνω τον χώρο X να είναι $X = X^o \cup S$ με το S να είναι πεπερασμένο. Αυτοί οι χάρτες δίνουν στον X δομή επιφάνειας Riemann (με την προϋπόθεση ότι οι χάρτες που προσθέσαμε είναι συμβατοί με αυτούς του X^o), και η καλυπτική απεικόνιση p επεκτείνεται σε μία αναλυτική $f : X \to Y$. □

VII.4 Επιφάνειες Riemann και Αλγεβρικές Καμπύλες

Έστω $F(z, w)$ όχι σταθερό πολυώνυμο δύο μεταβλητών με μιγαδικούς συντελεστές. Το σύνολο των ριζών του:

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 :\ F(z, w) = 0\}$$

είναι μια μιγαδική αφινική καμπύλη στο επίπεδο. Ταυτίζοντας το $\mathbb{C}^2$ με το $\mathbb{R}^4$, θα έχουμε το C να ορίζεται από δύο πραγματικές εξισώσεις: αυτές που μηδενίζουν το πραγματικό και αυτές που μηδενίζουν το φανταστικό μέρος του $F(z, w)$. Έτσι περιμένουμε το C να είναι μία επιφάνεια και θα έχουμε δίκιο, εκτός του ότι όπως και στις καμπύλες έτσι και στο C, μπορεί να υπάρχουν κάποιες ανωμαλίες. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της προηγούμενης ενότητας για να αφαιρέσουμε τις ανωμαλίες και να προσθέσουμε κάποια σημεία σε αυτά και στο άπειρο έτσι ώστε να πάρουμε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann. Μάλιστα αν το F δεν είναι ανάγωγο, τότε η επιφάνεια που θα πάρουμε θα είναι η ξένη ένωση επιφανειών που θα προέρχονται από τους ανάγωγους παράγοντες της F. Έτσι υποθέτουμε προς το παρόν ότι το πολυώνυμο F είναι ανάγωγο. Γράφουμε

$$F(Z, W) = a_0(Z)W^n + a_1(Z)W^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(Z)W + a_n(Z),$$

με $a_i(Z)$ πολυώνυμα ως προς το Z και $a_0(Z) \neq 0$, με $n > 0$ καθώς αν $n = 0$ $F = bZ+c$ και συνεπώς $C \cong \mathbb{C}$. Θέτουμε $F_w = \partial F/\partial W$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο ως προς W με $\deg F_w = n-1$:

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial W} = n \cdot a_0(Z)W^{n-1} + (n-1) \cdot a_1(Z)W^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(Z).$$

Λήμμα VII.4.1. *Υπάρχουν πολυώνυμα* $B(Z, W), C(Z, W), d(Z)$, *με* $d(Z) \neq 0$ *έτσι ώστε:*

$$B(Z, W) \cdot F(Z, W) + C(Z, W) \cdot F_w(Z, W) = d(Z).$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε χρήση του λήμματος Gauss

Λήμμα VII.4.2. *Αν* F *είναι ένα πολυώνυμο στον* $K[X, Y]$, *τότε αν το* F *είναι ανάγωγο στον* $K(X)[Y]$, *θα είναι ανάγωγο στον* $K[X, Y]$.

Είναι τώρα φανερό πως αν F είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[Z, W]$, τότε το F θα είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}(Z)[W]$. Εφαρμόζουμε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, διαιρώντας το F με το F_w και αφού (διώξουμε τους παρονομαστές θα έχουμε

$$b_0 \cdot F = Q_1 \cdot F_w + R_1,$$

όπου $b_0 \in \mathbb{C}[Z]$ και R_1 είναι ένα πολυώνυμο ως προς W με $\deg R_1 < n-1$. Αν ο βαθμός του R_1 είναι θετικός διαιρούμε με F_w παίρνοντας την εξίσωση:

$$b_1 \cdot F_w = Q_2 \cdot F_w + R_2,$$

συνεχίζοντας, βρίσκουμε εξισώσεις $b_i \cdot R_{i-1} = Q_{i+1} \cdot R_i + R_{i+1}$, μέχρι για κάποιο k, το πολυώνυμο R_{k+1} είναι μηδενικού βαθμού ως προς το W. Παρατηρούμε ότι το $R_{k+1} \neq 0$ γιατί διαφορετικά το R_k θα διαιρούσε το R_{k-1}, έπειτα το R_{k-2},..., και τελικά το F_w και το F πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας.

Θέτουμε $d(Z) = R_{k+1}$. Το $d(Z)$ είναι το ιδεώδες στο $\mathbb{C}[Z, W]$ που γεννάται από το F και το F_w. □

Παίρνοντας τα B, C και d του λήμματος με τέτοιον τρόπο ώστε να μην διαιρούνται όλα από ένα μη σταθερό πολυώνυμο ως προς Z, τότε το d είναι μοναδικό modulo τον πολλαπλασιασμό με μία σταθερά και ονομάζεται *διακρίνουσα* του F ως προς το W. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $d(Z)$ είναι ο Μ.Κ.Δ των F, F_w, δηλαδή $d(Z) = (F, F_w)$ και η διαδικασία που βρίσκουμε τα πολυώνυμα B, C είναι η ίδια διαδικασία που εφαρμόζουμε για την εύρεση των ακεραίων για να γράψουμε σαν γραμμικό συνδυασμό τον διαιρέτη και τον διαιρετέο με τον Μ.Κ.Δ, εφαρμόζοντας την αντίστροφη διαδικασία του Ευκλείδειου αλγόριθμου.

Παραδείγματα VII.4.3. 1. *Για* $F = W^2 + b(Z)W + c(Z)$ *θα πάρουμε διαιρώντας με* $F_w = 2W + b(Z)$ *πηλίκο* $W/2$ *και υπόλοιπο* $b(Z)W/2 + c(Z)$, *διαιρώντας ξανά το* F_w *με το νέο υπόλοιπο, παίρνουμε πηλίκο* $4/b(Z)$ *και υπόλοιπο* $-4c(Z)/b(Z) + b(Z)$. *Εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο στην τελευταία διαίρεση έχουμε* $2W+b(Z) = \big(b(Z)W/2+c(Z)\big)4/b(Z)-$

$4c(Z)/b(Z)+b(Z)$. *Πολλαπλασιάζοντας με* $-b(Z)$ *θα έχουμε* $(-b(Z))\big(2W+b(Z)\big) = (-4)\big(b(Z)W/2+c(Z)\big) + b(Z) - 4c(Z)$ *με*

$$R_2 = d(Z) = b(Z)^2 - 4c(Z)$$

να είναι η διακρίνουσα του F. *Τώρα* $b(Z)^2 - 4c(Z) = (2W + b(Z))(-b(Z) + 4(b(Z)W/2 + c(Z))$. *Όμως το υπόλοιπο από την πρώτη διαίρεση ισούται με* $\big(W^2+b(Z)W+c(Z)\big)-\big(2W+b(Z)\big)(W/2)$ *και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:*

$$d(Z) = \big(2W - b(Z)\big)\big(-2 - b(Z)\big) + 4\big(W^2 + b(Z)W + c(Z)\big),$$

όπου $B(Z,W) = 4$ *και* $C(Z,W) = \big(-2W - b(Z)\big)$.

2. *Όμοια αν* $F = W^3 + b(Z)W + c(Z)$ *προκύπτει ότι η διακρίνουσα ισούται με:*

$$d(Z) = F_w \cdot \big(4b(Z)^2 + 6b(Z)W^2 + 9c(Z)b(Z)\big) - F \cdot \big(18b(Z)W + 27c(Z)\big),$$

που είναι ίσο με $4b(Z)^3 + 27c(Z)^2$.

Τώρα θεωρούμε την πρώτη προβολή $\pi_1 : C \to \mathbb{C}$ με $\pi_1(z,w) = z$. Θα δούμε ότι αφαιρώντας κάποιο πεπερασμένο αριθμό σημείων, τότε η π_1 γίνεται μία τοπολογική καλυπτική απεικόνιση.

Λήμμα VII.4.4. *Υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων* $S \subset \mathbb{C}$ *έτσι ώστε η προβολή* $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ *να είναι μία πεπερασμένη καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα βλέπουμε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ και $d(Z) \neq 0$, τότε δεν υπάρχει w τέτοιο ώστε $F(z,w) = 0$ και $F_w(z,w) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $F(z,W)$ δεν έχει ρίζες με πολλαπλότητα μεγαλύτερης της μονάδας. Αν επιπροσθέτως πάρουμε το $a_0(z) \neq 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση θα έχει n ακριβώς διαφορετικές ρίζες. Επιλέγουμε το σύνολο S να είναι το

$$S = \{z \in \mathbb{C} : a_0(z) \cdot d(z) = 0\}.$$

Παίρνουμε $z_0 \notin S$ και θέτουμε $w_1, \ldots, w_n$ να είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f(z_0, W) = 0.$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε αναλυτικές συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_n$ που να είναι ορισμένες σε μία γειτονιά του z_0 έτσι ώστε $g_i(z_0) = w_i$ και $F(z, g_i(z)) = 0$. Παίρνουμε μικρούς, κλειστούς και ξένους δίσκους γύρω από αυτά τα n σημεία και θέτουμε γ_i να είναι προσανατολισμένη απλή καμπύλη γύρω από το σύνορο αυτών των δίσκων που περικλείουν τα w_i.

Ας δείξουμε στην αρχή ότι το λογαριθμικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο της F, δηλαδή το

$$\frac{\partial}{\partial W}(\log F(z,W)) = \frac{F_w}{F},$$

σε μία ρίζα της w_i ισούται με την πολλαπλότητα της ρίζας αυτής. Πράγματι αν η F έχει ρίζα w με πολλαπλότητα k, τότε σε κάποια γειτονιά του w θα είχαμε $F = (W-w)^k \cdot G$ με $G(W) \neq 0$ και G αναλυτική στην εν λόγω γειτονιά. Τότε $F_w = (W-w)^k \cdot G_W + k(W-w)^{k_1} \cdot G$. Διαιρώντας κατά μέλη τις F_w, F έχουμε:

$$\frac{F_w}{F} = \frac{k}{(W-w)} + \frac{G_w}{G}$$

με $\frac{G_w}{G}$ να είναι αναλυτική. Έτσι η $\frac{F_w}{F}$ έχει στο w απλό πόλο με $\mathrm{Res}(\frac{F_w}{F}) = k$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικού Υπολοίπου θα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F} dw = R_F,$$

όπου R_F ο αριθμός των ριζών που βρίσκονται εντός της καμπύλης γ, μετρημένης της πολλαπλότητάς τους. Γενικεύοντας για μία μερόμορφη F μπορούμε να κάνουμε τον ίδιο υπολογισμό βάζοντας ένα μείον στην πολλαπλότητα του κάθε πόλου. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F}dw = R_F - P_F,$$

όπου R_F, P_F οι αριθμοί των ριζών και των πόλων αντίστοιχα με μετρημένη την πολλαπλότητα, που ανήκουν στο εσωτερικό της καμπύλης γ.

Εξειδικεύοντας τα παραπάνω συμπεράσματα στην περίπτωσή μας, θα έχουμε ότι για κάθε z κοντά στο z_0 και για w στο εσωτερικό του δίσκου που ορίζει η καμπύλη γ_i θα έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{F_w}{F}dw = 1$$

καθώς το ολοκλήρωμα ισούται με τη μονάδα για $z = z_0$ και η τιμή του μεταβάλλεται για κάθε άλλο z, δηλαδή υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της $F(z, W)$ μέσα σε κάθε μία γ_i. Τώρα από το μιγαδικό ανάλογο του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση g με $g(z) = w$ τέτοια ώστε $F(z, g(z)) = 0$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $g_i(z)\frac{F_w}{F}$ θα έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με το $kg_i(z_0)$. Αν τώρα περιοριστούμε σε κάθε κύκλο γ_i το $k = 1$ και συνεπώς αφήνοντας το z να μεταβάλλεται έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} w\frac{F_w}{F}dw = g_i(z) = w_i = F^{-1}(z, 0).$$

Παίρνοντας U να είναι ο δίσκος γύρω από το z_0 όπου όλες οι παραπάνω $g_i(z)$ ορίζονται, θέτω $V_i = \{(z, g_i(z)) : z \in U\}$. Καθώς τα σημεία αυτά δίνουν όλες τις πιθανές ρίζες της $F(z, W) = 0$ με $z \in U$, βλέπουμε ότι το $\pi_1^{-1}(U)$ είναι η ένωση ανοικτών V_i και η π_1 απεικονίζει ομοιομορφικά κάθε V_i στο U, με αντίστροφη εικόνα που δίνεται από τον τύπο $z \mapsto (z, g_i(z))$. $\square$

Παρατήρηση VII.4.5. *Στο παραπάνω συμπέρασμα, ότι το λογαριθμικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο ισούται με τον αριθμό των ριζών μείον τον αριθμό των πόλων, μετρημένης της πολλαπλότητας, μπορούμε να φτάσουμε εισάγοντας την έννοια του winding number. Αν F μία μερόμορφη συνάρτηση με ρίζες a_i και πόλους b_k, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F}dw = \sum_i w(\gamma, a_i) - \sum_k w(\gamma, b_k)$$

για κάθε γ που είναι άθροισμα κλειστών μονοπατιών όχι απαραίτητα απλή καμπύλη, που δεν διέρχεται από κανέναν από τους παραπάνω πόλους και ρίζες. Όπου $w(\gamma, a_i)$ είναι η πολλαπλότητα της F στις ρίζες a_i και $w(\gamma, b_k)$ η πολλαπλότητα της F στον κάθε πόλο αντίστοιχα. Το $w(\gamma, a_i)$ ονομάζεται winding number και ισούται με

$$w(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-a}.$$

Μας λέει πόσες φορές ((τυλίγεται)) το κάθε κλειστό μονοπάτι γ γύρω από την κάθε ρίζα-πόλο. Πιο αυστηρά, αντιπροσωπεύει τον ακέραιο αριθμό (ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$) που προκύπτει από τη διαφορά της αρχής με το τέλος εάν ανορθώσουμε στον $\mathbb{R}$ (που είναι ο καθολικός καλυπτικός χώρος του S^1) το κλειστό μονοπάτι γ. Αυτή είναι και η γεωμετρική ματιά πάνω στην πολλαπλότητα της κάθε ρίζας -πόλου της F.

Τώρα σκεφτόμαστε το $\mathbb{C}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. και μεγαλώνουμε το σύνολο S προσθέτοντας ένα σημείο στο άπειρο. Από το παραπάνω λήμμα θα έχουμε μία καλυπτική απεικόνιση $X^o \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus S$, όπου $X^o = \{(z, w) : F(z, w) = 0 \text{ με } z \notin S\}$. Από την πρόταση VII.3.10, θα έχουμε αυτήν την καλυπτική απεικόνιση να δίνει δομή επιφάνειας Riemann στον X^o. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X^o είναι συνεκτικός χώρος.

Λήμμα VII.4.6. *Αν το $F(Z, W)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο, τότε ο X^o είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω Y^o να είναι μία συνεκτική συνιστώσα του X^o και X^o όχι συνεκτικός. Αν περιορίσουμε την καλυπτική απεικόνιση n-φύλλων $X^o \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus S$ στη συνεκτική συνιστώσα Y^o θα πάρουμε μία καλυπτική απεικόνιση με $m < n$ φύλλα.

Είναι γνωστό πως μπορούμε να γράψουμε κάθε πολυώνυμο συναρτήσει των ριζών του με τη βοήθεια των τύπων του Vieta. Για παράδειγμα το

$$\begin{aligned}a_2x^2 + a_1x + a_0 &= a_2(x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + e_1e_2)\\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= a_3(x^3 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)x^2 + (\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1)x - \rho_1\rho_2\rho_3),\end{aligned}$$

με ρ_i να είναι οι ρίζες.

Βλέποντας το $F(Z, W)$ σαν ένα πολυώνυμο στον $\mathbb{C}[Z][W]$ είναι σαφές ότι οι παραπάνω ρίζες θα είναι συναρτήσεις του Z. Γενικά αν $\mathbb{K}$ είναι σώμα, τότε $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ είναι ακέραια περιοχή, και έχουμε τις e_i να είναι οι *στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις* $x_1, \ldots, x_n$ επί του $\mathbb{K}$, να είναι οι συντελεστές ως προς y του πολυωνύμου $g(y) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n][y]$, όπου

$$\begin{aligned} g(y) &= (y - x_1)(y - x_2)\ldots(y - x_n)\\ &= y^n - e_1y^{n-1} + e_2y^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}e_{n-1}y + (-1)^n e_n\\ &= y^n + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu e_\nu y^{n-\nu}.\end{aligned}$$

Έστω $z \notin S$ και $e_1(z), \ldots, e_m(z)$ να είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις στις m τιμές του w, στα σημεία $\pi_1^{-1}(z) \cap Y^o$. Καθώς $F \in \mathcal{M}(X)$, έχουμε ότι $e_1(z), \ldots, e_m(z) \in \mathcal{M}(X)$. Θέτουμε

$$G = W^m - e_1(Z)W^{m-1} + \cdots + (-1)^m e_m(Z) \in \mathbb{C}(Z)[W],$$

και για κάθε $z \notin S$ έχουμε:

$$G(z, W) = \prod_{P \in \pi_1^{-1}(z) \cap Y^o} (W - w(P)),$$

$$F(z, W) = a_0(z) \prod_{P \in \pi_1^{-1}(z)} (W - w(P)).$$

Τώρα το G μηδενίζεται στο $C := V(I)$, όπου I να είναι το ιδεώδες που γεννάται από το πολυώνυμο F, δηλαδή $I = \langle F \rangle$ με F ανάγωγο και άρα I μέγιστο και συνεπώς πρώτο. Έτσι από το Nullstellensatz του Hilbert

$$G \in I(V(I)) \Rightarrow G \in \sqrt{I}$$

έχουμε ότι $I(V(I)) = \sqrt{I}$. Υπενθυμίζουμε ότι το ριζικό $\sqrt{I}$ του ιδεώδους I ορίζεται από

$$\sqrt{I} = \{F \in \mathbb{C}[Z, W], \text{ με } I \lhd \mathbb{C}[Z, W] : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ με } F^n \in I\}.$$

Όμως αφού το I είναι πρώτο, έχουμε $G \in I$ και συνεπώς $G \mid F$, άτοπο από την υπόθεσή μας. □

Από την πρόταση VII.3.10 εξάγουμε το παρακάτω σημαντικό συμπέρασμα:

Πόρισμα VII.4.7. *Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $F(z, w) \in \mathbb{C}[Z, W]$ επάγει μία καλυπτική απεικόνιση $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ με C το αλγεβρικό σύνολο μηδενισμού του F και S το (πεπερασμένο) σύνολο των σημείων διακλάδωσής του. Αυτή η απεικόνιση με τη σειρά της επεκτείνεται σε μία αναλυτική απεικόνιση $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, με X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $f \in \mathcal{M}(X)$. Αυτή η επιφάνεια Riemann ονομάζεται η επιφάνεια Riemann της αλγεβρικής καμπύλης C ή του πολυωνύμου F.*

VII.4.1 Βαθμός Υπερβατικότητας

Υπενθυμίζουμε μερικά στοιχεία από τη θεωρία υπερβατικών επεκτάσεων και τον βαθμό υπερβατικότητας. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [11, κεφ. 6 σελ. 311].

Ορισμός VII.4.8. *Έστω F επέκταση ενός σώματος K, και S υποσύνολο του F. Το S είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K αν υπάρχει ένα όχι ταυτοτικά μηδενικό πολυώνυμο $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ έτσι ώστε $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ για κάποια διαφορετικά $s_1, \dots, s_n \in S$. Το S είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K, αν το S δεν είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K.*

Κάθε υποσύνολο αλγεβρικά ανεξάρτητου συνόλου, είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο. Το κενό είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο, ενώ κάθε υποσύνολο του K είναι αλγεβρικά εξαρτημένο. Το μονοσύνολο $\{u\}$ είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K αν και μόνο αν το u είναι αλγεβρικό επί του K. Επίσης, κάθε στοιχείο ενός αλγεβρικά ανεξάρτητου συνόλου είναι αναγκαστικά υπερβατικό επί του σώματος K. Έτσι αν το F είναι μία αλγεβρική επέκταση επί του K, τότε το κενό σύνολο είναι το μόνο αλγεβρικά ανεξάρτητο υποσύνολο του F.

Η αλγεβρική (αν)εξαρτησία είναι επέκταση της γραμμικής (αν)εξαρτησίας. Ισχύει ότι κάθε αλγεβρικά ανεξάρτητο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο αλλά όχι το αντίστροφο.

Ορισμός VII.4.9. *Έστω F επέκταση ενός σώματος K. Μία υπερβατική βάση (transcendence base) του F επί του K είναι ένα υποσύνολο S του F τέτοιο ώστε το S να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K και να είναι μεγιστικό (ως προς το περιέχεσθαι) ανάμεσα σε όλα τα αλγεβρικά ανεξάρτητα υποσύνολα του F.*

Η ύπαρξη της υπερβατικής βάσης εξασφαλίζεται από το λήμμα του Zorn. Επίσης, υπάρχει μία αναλογία μεταξύ της υπερβατικής βάσης και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου: μία υπερβατική βάση δεν είναι βάση και του διανυσματικού χώρου παρόλο που σαν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο περιέχεται στη βάση.

Πρόταση VII.4.10. *Έστω F επέκταση του K και S υποσύνολο του F με S να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K. Το S είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K αν και μόνον αν το F είναι αλγεβρικό επί του $K(S)$. Κάθε πεπερασμένη υπερβατική βάση έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.*

Απόδειξη. [11, cor. VI.1.6, σελ. 314], [11, Th. VI.1.8, σελ. 314]. □

Ορισμός VII.4.11. *Η επέκταση F επί του K ονομάζεται καθαρά υπερβατική επέκταση (purely transcendental) αν $F = K(S)$, με $S \subset F$, να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του F.*

Θεώρημα VII.4.12. *Κάθε επέκταση σωμάτων F/K μπορεί να διασπαστεί σε μία σειρά επεκτάσεων*

$$K \subset E \subset F,$$

με F να είναι αλγεβρική επέκταση επί του E και το E να είναι καθαρά υπερβατική (purely transcendental) επέκταση επί του K.

Από τον ορισμό VII.4.10, έχουμε ότι το S θα είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K. Έτσι αν πάρουμε F να είναι μία τυχαία επέκταση του σώματος K, με S να είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K και $E = K(S)$, τότε το F θα είναι αλγεβρική επέκταση επί του E, δηλαδή η μόνη υπερβατική βάση επί του E θα είναι το $\varnothing$, και το E μία καθαρά υπερβατική επέκταση επί του K, πράγμα που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου.

Ορισμός VII.4.13. *Έστω F επέκταση του K. Ο βαθμός υπερβατικότητας του F επί του K είναι ο πληθικός αριθμός $|S|$, με S να είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K και συμβολίζεται με $\mathrm{tr.d}_K F$.*

Μάλιστα ο βαθμός υπερβατικότητας είναι ανεξάρτητος από την επιλογή υπερβατικής βάσης. Είναι το ανάλογο της διάστασης του διανυσματικού χώρου $[F:K]$. Επίσης, $\mathrm{tr.d}_K F \leqslant [F:K]$ και $\mathrm{tr.d}_K F = 0$ αν και μόνον αν η F είναι μία αλγεβρική επέκταση επί του σώματος K.

Πρόταση VII.4.14. *Αν έχουμε τη σειρά διαδοχικών επεκτάσεων σωμάτων $F/E/K$, τότε*

$$\mathrm{tr.d}_K F = \mathrm{tr.d}_E F + \mathrm{tr.d}_K E.$$

Απόδειξη. Δείτε [11, Θεώρ. 1.11 σελ. 316]. □

Τώρα γνωρίζουμε από το πόρισμα VII.2.17 ότι $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ και $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. Θα δούμε έτσι, ότι κάθε μερόμορφη συνάρτηση στη σφαίρα του Riemann, έχει βαθμό υπερβατικότητας υπέρ του $\mathbb{C}$ ίσο με μονάδα ή ισοδύναμα:

$$\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(z) = 1.$$

Πράγματι: Έστω $f/g \in \mathbb{C}(z)$ με $f, g \in \mathbb{C}[z], g \neq 0$. Επιλέγουμε το πολυώνυμο $\mathbb{C}[z,w] \ni h(z,w) = wg(z) - f(z)$. Τότε $h(z, f/g) = f/g \cdot g(z) - f(z) = 0$. Αυτό μας λέει ότι το σύνολο $\{z, f/g\}$ είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του $\mathbb{C}$ και έτσι το $\{z\}$ αποτελεί μία υπερβατική βάση του $\mathbb{C}(z)$ επί του $\mathbb{C}$. Άρα $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(z) = 1$ ή το $\mathbb{C}(z)$ είναι μία καθαρά υπερβατική επέκταση επί του $\mathbb{C}$.

Αν $\pi : Y \to X$ είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann, τότε για κάθε $f \in \mathcal{M}(X)$, η απεικόνιση $\pi^* := f \circ \pi$ είναι μία μερόμορφη συνάρτηση στον Y. Έτσι υπάρχει μία απεικόνιση

$$\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y),$$

η οποία είναι ένας μονομορφισμός σωμάτων.

Θεώρημα VII.4.15. *Αν X είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $\mathcal{M}(X)$ το σώμα μερόμορφων συναρτήσεων, τότε $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = 1$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{M}(X)$, με $z : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ να είναι μία αναλυτική συνάρτηση και $\deg z = n$. Είναι γνωστό ότι ο επαγώμενος μονομορφισμός $z^* : \mathbb{C}(x) \to \mathcal{M}(X)$ αποτελεί μία αλγεβρική επέκταση, βαθμού n, [14, prop. 1.21], [6, Θεωρ. 82 σελ. 50]. Έστω $w \in \mathcal{M}(X)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αλγεβρική σχέση μεταξύ των z, w, πράγμα που μας δείχνει ότι $\mathrm{tr.d}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = 1$. Έστω w_0 το ελάχιστο πολυώνυμο (ανάγωγο και μονικό) επί του $\mathbb{C}(z)[w]$ με τον μέγιστο βαθμό, δηλαδή υποθέτουμε ότι ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{C}(z,w_0) : \mathbb{C}(z)]$ είναι μέγιστος. Τότε για κάθε $w \in \mathcal{M}(X)$ θα έχουμε:

$$[\mathbb{C}(z,w,w_0) : \mathbb{C}(z)] = [\mathbb{C}(z,w,w_0) : \mathbb{C}(z,w_0)] \cdot [\mathbb{C}(z,w_0) : \mathbb{C}(z)]. \quad \text{(VII.1)}$$

Τώρα η χαρακτηριστική του $\mathbb{C}(z)$ ισούται με το μηδέν και έτσι κάθε επέκτασή του θα είναι απλή. Συνεπώς η επέκταση $\mathbb{C}(z,w,w_0) : \mathbb{C}(z)$ παράγεται από ένα στοιχείο t, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{C}(z,w,w_0) = \mathbb{C}(z,t).$$

Όμως θα πρέπει $[\mathbb{C}(z,w,w_0) : \mathbb{C}(z,w_0)] = 1$, γιατί αν $[\mathbb{C}(z,w,w_0) : \mathbb{C}(z,w_0)] > 1$, τότε από την VII.1 θα είχαμε ότι $[\mathbb{C}(z,t) : \mathbb{C}(z)] > [\mathbb{C}(z,w_0) : \mathbb{C}(z)]$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Έτσι $w \in \mathbb{C}(z,w_0)$ και συνεπώς $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z,w_0)$. □

Έτσι το $\mathcal{M}(X)$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη επέκταση του $\mathbb{C}$, με X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann, που έχει βαθμό υπερβατικότητας 1 επί του $\mathbb{C}$ ή ισοδύναμα το σώμα $\mathcal{M}(X)$ είναι ένα σώμα συναρτήσεων σε μία μεταβλητή επί του $\mathbb{C}$. Τέτοιες επεκτάσεις όμως οδηγούν σε αλγεβρικές καμπύλες C. Πράγματι, αφού ο βαθμός υπερβατικότητας του σώματος των μερόμορφων συναρτήσεων είναι 1, για τυχαίες μερόμορφες συναρτήσεις f, g στον X υπάρχει μη μηδενικό ανάγωγο πολυώνυμο $\Phi(Z,W) \in \mathbb{C}[Z,W]$ έτσι ώστε

$$\Phi(f,g) = 0,$$

με C να είναι η αλγεβρική καμπύλη του πολυωνύμου Φ. Από το πόρισμα VII.4.7 και το θεώρημα VII.4.15 θα έχουμε έτσι το εξής πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

Πόρισμα VII.4.16. *Κάθε συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann είναι η επιφάνεια Riemann μίας αλγεβρικής καμπύλης.*

Έστω X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann με $K := \mathcal{M}(X)$ το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων του X και $\Phi[T] \in K[T]$ να είναι ένα ανάγωγο μονικό πολυώνυμο βαθμού n. Τότε υπάρχει μία επιφάνεια Riemann Y ένα n-fold διακλαδιζόμενο proper αναλυτικό κάλυμμα, καθώς ο X είναι συμπαγής και η π proper, θα έχουμε ότι και ο Y είναι συμπαγής. $\pi : Y \to X$ και μία $F \in K$ έτσι ώστε να μηδενίζει το $(\pi^*\Phi)(F) = (\Phi \circ \pi)(F)$. Συμβολίζουμε την τριπλέτα αυτή με (Y, π, F) που δηλώνει την αλγεβρική καμπύλη $\Phi(T)$. Θέτουμε $L = \mathcal{M}(Y)$. Τότε θα έχουμε τον επαγόμενο μονορφισμό $\pi^* : K \to L$ και βλέπουμε το K σαν υπόσωμα του L. Η επέκταση L/K είναι όπως είδαμε αλγεβρική, βαθμού n. Επίσης, $L \cong K[T]/\langle P \rangle$. Μπορεί να αποδειχθεί, μέσω του θεωρήματος VII.3.2, ότι κάθε αναλυτικός αυτομορφισμός στο αναλυτικό κάλυμμα επάγει έναν αυτομορφισμό στο τοπολογικό κάλυμμα. Μάλιστα μπορούμε να φτάσουμε σε ένα βαθύτερο αποτέλεσμα, δείτε και [7, ασκ. 20.10, σελ. 283], [6, Th. 8.12, σελ. 57]

Θεώρημα VII.4.17. *Έστω $f \in L$. Κάθε αναλυτικός deck transformation $\sigma : Y \to Y$ του Y επί του X επάγει έναν αυτομορφισμό $f \mapsto \sigma f := f \circ \sigma^{-1}$ του L, που αφήνει σταθερό το σώμα K με την απεικόνιση:*

$$\mathrm{Aut}(Y/X) \to \mathrm{Gal}(L/K),$$

όπως αυτή ορίστηκε, να είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. Τέλος ο καλυπτικός χώρος είναι κανονικός, με την έννοια ότι το τοπολογικό κάλυμμα που επάγει από την VII.3.8 είναι κανονικό, αν η επέκταση είναι Galois.

VII.4.2 Μία εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois.

Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois θα μπορούσε να συνοψιστεί ως εξής: Δίνεται μία πεπερασμένη ομάδα G και ένα σώμα K μπορούμε να βρούμε μία Galois επέκταση L/K με ομάδα Galois την G; Αυτό είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα αν το σώμα K είναι το σώμα των ρητών αριθμών, για μια εισαγωγή δείτε τα [13], [16].

Στα παρακάτω θα αποδείξουμε ότι το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois έχει λύση, αν $K = \mathbb{C}(t)$ είναι το σώμα των ρητών συναρτήσεων μίας μεταβλητής επί του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με μια πεπερασμένη ομάδα G. Αυτή δέχεται μία παράσταση σε γεννήτορες και σχέσεις $G = \langle \Gamma : \ \Sigma \rangle$ με $G = F_n/R$, όπου F_n είναι η ελεύθερη ομάδα του Γ σε n το πλήθος στοιχεία και R η κανονική υποομάδα του F_n που γεννάται από τον Σ, δείτε [11, σελ. 67].

Έχουμε δείξει στην πρόταση V.2.47 ότι η F_n είναι η θεμελιώδης ομάδα της σφαίρας του Riemann, αν από αυτήν αφαιρέσουμε $n+1$ το πλήθος σημεία, δηλαδή του

$$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \dots, P_{n+1}\}$$

Κατασκευάζουμε τον καθολικό καλυπτικό χώρο $\widetilde{X}$ του X και θεωρούμε τον ενδιάμεσο χώρο $\widetilde{X}/R$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\
& \widetilde{X}/R \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \mathcal{M}(Y) \arrow[d, dash] \\
X \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(t)
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο $\widetilde{X}$ είναι καθολικό και συνεπώς κανονικό κάλυμμα του X, ο $\widetilde{X}$ είναι ένα G-κάλυμμα με $G = \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \cong \pi_1(X) = F_n$. Από την κατασκευή μας δηλαδή, ο $\widetilde{X}$ αποτελεί ένα F_n-κάλυμμα με

$X = \widetilde{X}/F_n$. Τώρα καθώς $R \lhd F_n$ έχουμε ότι ο $\widetilde{X}/R$ θα είναι ένα F_n/R-κάλυμμα του X με $F_n/R = \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)/\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/\widetilde{X}/R) \cong \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/R/X)$.

Από την πρόταση 2.24 μπορούμε να επεκτείνουμε το F_n/R-κάλυμμα του X σε ένα αναλυτικό (με σημεία διακλάδωσης τα $P_1, \dots, P_{n+1}$), proper κάλυμμα f μεταξύ των Riemann επιφανειών Y και $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (ο Y συμπαγής καθώς η f είναι proper). Παίρνοντας για $\mathcal{M}(Y)$ το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων του Y, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα VII.4.17 και καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M}(Y)/\mathbb{C}(t)) = F_n/R = G.$$

□

VII.5 Ολοκλήρωση σε επιφάνειες Riemann

VII.5.1 Διαφορικές μορφές

Ορισμός VII.5.1. *Μια ολόμορφη 1-μορφή σε κάποιο ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{C}$ είναι μια έκφραση ω της μορφής*

$$\omega = f(z)dz,$$

όπου f μια ολόμορφη συνάρτηση επί του V. Θα λέμε ότι η ω είναι μια ολόμορφη 1-μορφή σε συντεταγμένες z.

Η έννοια μεταφέρεται στις επιφάνειες Riemann μέσω της συμβατότητας των εκφράσεων σε επικαλυπτόμενους χάρτες.

Ορισμός VII.5.2. *Υποθέτουμε ότι $\omega_1 = f_1(z_1)dz_1$ είναι μια ολόμορφη 1-μορφή στη συντεταγμένη z_1 η οποία ορίζεται στο ανοιχτό σύνολο V_1 και $\omega_2 = f_2(z_2)dz_2$ μια ολόμορφη 1-μορφή, ορισμένη στο σύνολο V_2. Έστω $z_1 = T(z_2)$ μια ολόμορφη απεικόνιση. Θα λέμε ότι η 1-μορφή ω_1 μεταφέρεται στην 1-μορφή ω_2 μέσω του μετασχηματισμού T, όταν*

$$f_2(z_2) = f_1(T(z_2))T'(z_2).$$

Παρατήρηση VII.5.3. *Ουσιαστικά η ω_1 μεταφέρεται στην ω_2, όταν θέσουμε $dz_1 = T'(z_2)dz_2$.*

Ανάλογα ορίζονται και οι μερόμορφες 1-μορφές, τοπικά ως εκφράσεις της μορφής $f(z)dz$, όπου η συνάρτηση f είναι μερόμορφη.

Ορισμός VII.5.4. *Μια μερόμορφη 1-μορφή στο ανοιχτό $V \subset \mathbb{C}$ είναι μια έκφραση της μορφής $\omega = f(z)dz$ όπου f μερόμορφη συνάρτηση επί του V. Θα λέγεται μερόμορφη 1-μορφή στη συντεταγμένη z.*

Η συνθήκη συμβατότητας για μερόμορφες 1-μορφές είναι ανάλογη με αυτή των ολόμορφων 1-μορφών.

Ορισμός VII.5.5. *Υποθέτουμε ότι $\omega_1 = f_1(z_1)dz_1$ είναι μια μερόμορφη 1-μορφή στη συντεταγμένη z_1 και $\omega_2 = f_2(z_2)dz_2$ στη συντεταγμένη z_2. Έστω $z_1 = T(z_2)$ μια ολόμορφη απεικόνιση του V_2 στο V_1. Θα λέμε ότι η ω_1 μεταφέρεται στην ω_2 μέσω της T, όταν $f_2(z_2) = f_1(T(z_2))T'(z_2)$.*

Ορισμός VII.5.6. *Έστω X επιφάνεια Riemann. Μια μερόμορφη 1-μορφή επί της X είναι μια συλλογή από μερόμορφες 1-μορφές $\{\omega_i\}$, μία για κάθε χάρτη $z_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει ότι αν U_1, U_2 έχουν επικάλυψη, η αντίστοιχη μερόμορφη 1-μορφή ω_1 μεταφέρεται στην ω_2 μέσω της συνάρτησης αλλαγής συντεταγμένων $T = z_1 \circ z_2^{-1}$.*

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι μια μερόμορφη 1-μορφή ω ορίζεται σε μια περιοχή του σημείου $P \in X$. Επιλέγοντας τοπικές συντεταγμένες με αρχή το σημείο P μπορούμε να γράψουμε $\omega = f(z)dz$ όπου η f είναι μερόμορφη στο P.

Ορισμός VII.5.7. *Η τάξη της ω στο P θα συμβολίζεται με $\mathrm{ord}_P(\omega)$ και ορίζεται ως η τάξη της f στο σημείο $z = 0$.*

Αποδεικνύεται, ότι $\mathrm{ord}_P(\omega)$ είναι καλά ορισμένη και ανεξάρτητη από την επιλογή τοπικών συντεταγμένων στο P. Είναι επίσης φανερό ότι

$$(\text{Η } \omega \text{ είναι ολόμορφη στο } P\}) \Leftrightarrow \mathrm{ord}_P(\omega) \geqslant 0.$$

Θα λέμε ότι το P είναι μια *ρίζα* της ω τάξης n, όταν $\mathrm{ord}_P(\omega) = n > 0$. Θα λέμε ότι το p είναι *πόλος* της ω τάξης n όταν $\mathrm{ord}_P(\omega) = -n < 0$. Το σύνολο των ριζών και των πόλων μιας μερόμορφης 1-μορφής είναι διακεκριμένο σύνολο.

Παράδειγμα VII.5.8. *Ποιες είναι οι ολόμορφες 1-μορφές του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$; Θεωρούμε $U = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{\infty\}$ $V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0\}$ ως χάρτες συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι η μορφή παρίσταται ως $f(z)dz$ στο U και ως $g(w)dw$ στο V. Επικάλυψη έχουμε για $w = 1/z$ και η συνθήκη συμβατότητας είναι η*

$$f(z) = -g(1/z)\frac{1}{z^2} \text{ στο } \mathbb{C} - \{0\}. \tag{VII.2}$$

Έστω $f(z) = \sum a_n z^n$ και $g(w) = \sum b_n w^n$ τα αναπτύγματα Taylor των f, g αντίστοιχα. Από τη σχέση (VII.2) έχουμε $a_n = b_n$ για κάθε n. Συνεπώς δεν υπάρχουν μη-μηδενικές ολόμορφες 1-μορφές στην προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Παρατήρηση VII.5.9. *Μια 1-μορφή ω είναι μερόμορφη όταν είναι ολόμορφη εκτός από ένα διακριτό (discrete) σύνολο σημείων και για κάθε σημείο P υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f ορισμένη σε περιοχή του P ώστε $\omega = f(z)dz$ στην περιοχή αυτή.*

VII.5.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα σε επιφάνειες Riemann

Ορισμός VII.5.10. *Ένας δρόμος (path) σε μια επιφάνεια Riemann είναι μια συνεχής και τμηματικά C^∞ συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to X$, από ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ στο X. Τα σημεία $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ θα λέγονται τα τελικά σημεία του δρόμου. Ο δρόμος θα λέγεται κλειστός αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Ορισμός VII.5.11. *Μια C^∞ 1-μορφή σε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{C}$ είναι μια έκφραση της μορφής*

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z},$$

όπου f, g είναι C^∞-συναρτήσεις του V. Θα λέμε ότι η ω είναι 1-μορφή στη συντεταγμένη z. Ανάλογα ορίζονται ο νόμος μετασχηματισμού και ο ορισμός C^∞ 1-μορφής σε επιφάνειες Riemann X.

Επιλέγουμε μια διαμέριση $\{\gamma_i\}$ του δρόμου γ ώστε τα γ_i να είναι C^∞ στο κλειστό διάστημα ορισμού της $[a_{i-1}, a_i]$ και έχει εικόνα που περιέχεται στην περιοχή U_i με χάρτη z_i. Ως προς τον κάθε χάρτη z_i γράφουμε την 1-μορφή ω ως

$$\omega = f_i(z_i, \bar{z}_i)dz_i + g_i(z_i, \bar{z}_i)d\bar{z}_i.$$

Θεωρούμε τη σύνθεση $z_i \circ \gamma_i$ η οποία ορίζει τη συνάρτηση $z = z(t)$ για $t \in [a_{i-1}, a_i]$.

$$\int_\gamma \omega := \sum_i \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} \big(f_i(z(t), \bar{z}(t))z'(t) + g_i(z(t), \bar{z}(t))\big)\, z'(t)dt$$

Αν η εικόνα γ περιέχεται στην περιοχή ενός μοναδικού χάρτη $z : U \to V$ και αν $\omega = f dz + g d\bar{z}$, τότε

$$\int_\gamma \omega = \int_{z\circ\gamma} (f dz + g d\bar{z})$$

όπου το ολοκλήρωμα δεξιά είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δρόμου $z \circ \gamma$ στο ανοιχτό σύνολο V. Είναι άμεσα ελέγξιμο ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του χάρτη συντεταγμένων. Αυτό είναι ακριβώς το κίνητρο για τον ορισμό του πώς μια 1-μορφή μετασχηματίζεται μέσω μιας αλλαγής συντεταγμένων.

VII.5.3 Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα μιας μερόμορφης 1-μορφής

Έστω ω μια 1-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann η οποία είναι μερόμορφη στο σημείο $P \in X$. Επιλέγουμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων z με κέντρο το P και αναπτύσσουμε την ω ως μια σειρά Laurent:

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n\right) dz \text{ όπου } c_{-M} \neq 0.$$

Επομένως $\mathrm{ord}_P(\omega) = -M$.

Ορισμός VII.5.12. *Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο (residue) της ω στο P θα συμβολίζεται με $\mathrm{Res}_P(\omega)$ και ορίζεται ως ο συντελεστής c_{-1} στη σειρά Laurent της ω στο P.*

Παρατήρηση VII.5.13. *Η σειρά Laurent δεν είναι καλά ορισμένη. Θα δείξουμε όμως ότι ο συντελεστής c_{-1}, είναι καλά ορισμένος.*

Πρόταση VII.5.14. *Έστω ω μια μερόμορφη 1-μορφή ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου $P \in X$. Έστω γ ένας μικρός δρόμος στο X που περιέχει το P και κανέναν άλλο πόλο του ω. Τότε*

$$\mathrm{Res}_P(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega.$$

Απόδειξη. Έστω $z : U \to V$ ένας χάρτης του P, ο οποίος περιέχει την εικόνα του δρόμου γ. Γράφουμε $\omega = f(z)dz$ σε τοπικές συντεταγμένες z του V και υποθέτουμε ότι η $f(z)$ έχει ανάπτυγμα Laurent $\sum_n c_n z^n$. Τότε

$$\int_\gamma \omega = \int_{z\gamma} f(z)dz,$$

το οποίο είναι $2\pi i c_{-1}$ σύμφωνα με το θεώρημα υπολοίπων της κλασικής μιγαδικής ανάλυσης. □

Πόρισμα VII.5.15. *Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο μερόμορφης 1-μορφής είναι ένας καλά ορισμένος μιγαδικός αριθμός.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, αφού το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του χάρτη και συνεπώς ανεξάρτητο από τις τοπικές συντεταγμένες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του αναπτύγματος Laurent της 1-μορφής ω. □

Πόρισμα VII.5.16. *Έστω f μερόμορφη συνάρτηση στο σημείο $P \in X$. Το df/f είναι μερόμορφη 1-μορφή στο P και*

$$\mathrm{Res}_P\left(\frac{df}{f}\right) = \mathrm{ord}_P(f).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε έναν χάρτη με κέντρο το P, ο οποίος μας δίνει τοπικές συντεταγμένες z και υποθέτουμε ότι $\mathrm{ord}_P(f) = n$. Τότε $f = cz^n+$όροι μεγαλύτερης τάξης κοντά στο P και $c \neq 0$. Η $1/f = c^{-1}z^{-n}+$όροι μεγαλύτερης τάξης κοντά στο P. Το

$$df = \left(ncz^{n-1} + \text{όροι μεγαλύτερης τάξης}\right) dz$$

κοντά στο P. Επομένως

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{n}{z} + \text{όρους μεγαλύτερης τάξης}\right) dz.$$

Το $n = \mathrm{ord}_P(f)$ είναι εξ ορισμού το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της df/f. □

Σε κάθε πρώτο μάθημα μιγαδικής ανάλυσης διδάσκεται κανείς το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, ότι δηλαδή το άθροισμα των υπολοίπων είναι ίσο με κάποιο ολοκλήρωμα. Το αντίστοιχο θεώρημα σε επιφάνειες είναι πολύ ευκολότερο.

Θεώρημα VII.5.17. *Αν X συμπαγής επιφάνεια Riemann και ω μερόμορφη 1-μορφή αυτής, τότε το άθροισμα των ολοκληρωτικών της υπολοίπων είναι* 0.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι οι πόλοι της 1-μορφής αποτελούν ένα διακριτό σύνολο στην επιφάνεια Riemann X. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο, αφού η X είναι συμπαγής. Εστω $P_1, \dots, P_n$ οι πόλοι της ω και $(U_1, z_1), \dots, (U_n, z_n)$ χάρτες συντεταγμένων ξένοι ανα δύο, με $P_i \in U_i$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $z_i(P_i) = 0 \in \mathbb{C}$. Εστω S_i^* ανοιχτός δίσκος εντός του $z_i(U_i)$ με κέντρο το 0 , R_i ομόκεντρος κύκλος με τον S_i^* έντος του $z_i(U_i)$. Υπάρχουν συνάρτησεις f_i^* κλάσεως C^1 με $f_i^* = 1$ στο S_i^* και 0 εκτός του R_i. Θέτουμε $S_i := z_i^{-1}(S_i^*)$ και $f_i := f_i^* \circ z_i$. Εστω S η ένωση των S_i και $f = \sum f_i$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{\partial S} \omega = 0$. Η $(1-f)\omega$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη 1-μορφή με συμπαγή φορέα $M - S$. Καλύπτουμε τον συμπαγή φορέα με πεπερασμένες το πλήθος περιοχές συντεταγμένων και από το θεώρημα του Green στο επίπεδο έχουμε:

$$\iint_{M-S} d[(1-f)\omega] = \int_{\partial S} (1-f)\omega = 0$$

Όμως η ω είναι ολόμορφη στο $M - S$ συνεπώς $d\omega = 0$ στο $M - S$. Συνεπώς ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$\iint_{M-S} d(f\omega) = 0$$

Από την άλλη πλευρά όμως, λόγω του θεωρήματος Green και της πρώτης σχέσης, έχουμε:

$$2\pi i \sum_k \mathrm{res}_{P_k} \omega = \int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} f\omega = \iint_{M-S} d(f\omega) = 0$$

□

Παρατήρηση VII.5.18. *Το παραπάνω θεώρημα είναι η βάση για το θεώρημα Riemann-Roch το οποίο περιγράφει με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια τον χώρο των μερομόρφων συναρτήσεων με δοσμένους πόλους σε μια επιφάνεια Riemann.*

Πόρισμα VII.5.19. *Έστω f μια μη-σταθερά μερόμορφη συνάρτηση σε συμπαγή επιφάνεια Riemann. Τότε*

$$\sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(f) = 0$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων για την df/f. □

VII.5.4 Διαιρέτες και μερόμορφες συναρτήσεις

Οι διαιρέτες (divisors) είναι ένας τρόπος για να μπορέσουμε να οργανώσουμε σε ένα πακέτο τις ρίζες και πόλους των μερόμορφων συναρτήσεων και των 1-μορφών. Στη συνέχεια προκύπτει ότι μια ιδιαίτερα απλή ιδέα έχει και πολλές άλλες εφαρμογές.

Ορισμός VII.5.20. *Θα ονομάζουμε ομάδα διαιρετών (divisors) της επιφάνειας Riemann X την ελεύθερη αβελιανή ομάδα παραγόμενη από τα σημεία $P \in X$, δηλαδή την ομάδα των τυπικών αθροισμάτων της μορφής:*

$$D = \sum_{P \in X} n_P P$$

όπου τα $n_P \in \mathbb{Z}$ *και όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος είναι μηδέν. Την ομάδα αυτή θα τη συμβολίζουμε με* $\mathrm{Div}(X)$. *Βαθμός ενός διαιρέτη* D *είναι* $\deg D := \sum n_p$ *και εύκολα διαπιστώνουμε ότι* $\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων. Ο πυρήνας της απεικόνισης* $\deg$ *είναι υποομάδα της* $\mathrm{Div}(X)$ *και θα τη συμβολίζουμε με* $\mathrm{Div}^0(X)$. *Συχνά θα συμβολίζουμε τον συντελεστή του* n_P *του διαιρέτη* D *με* $D(P)$.

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον χώρο των συναρτήσεων

$$D : X \to \mathbb{Z}.$$

Για μια τέτοια D ορίζουμε τον φορέα της

$$\mathrm{supp}(D) = \{P \in X : D(P) \neq 0\}.$$

Το σύνολο των διαιρετών μπορεί να ταυτιστεί με τις συναρτήσεις $D : X \to \mathbb{Z}$ με πεπερασμένο φορέα.

Σε κάθε μερόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(X)$ αντιστοιχίζουμε τον διαιρέτη $\mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{ord}_P(f)P$. Τους διαιρέτες της μορφής $\mathrm{div}(f)$ θα τους λέμε κύριους και το σύνολό τους θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{PDiv}(X)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση div είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\mathrm{div} : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$. Έχοντας υπ' όψη τις ιδιότητες της $\mathrm{ord}_P(f)$ έχουμε τις ιδιότητες:

1. $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$
2. $\mathrm{div}(f/g) = \mathrm{div}(f) - \mathrm{div}(g)$
3. $\mathrm{div}(1/f) = -\mathrm{div}(f)$

Από αυτές έπεται ότι

$$\mathrm{PDiv}(X) \leqslant \mathrm{Div}(X)$$

και αφού X συμπαγής έχουμε ότι

$$\mathrm{PDiv}(X) \leqslant \mathrm{Div}_0(X)$$

Λήμμα VII.5.21. *Αν* f *μερόμορφη συνάρτηση στη συμπαγή επιφάνεια Riemann* X, *τότε*

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$$

Συχνά περιορίζουμε το ενδιαφέρον μόνο στις ρίζες ή μόνο στους πόλους μιας μερόμορφης συνάρτησης.

Ορισμός VII.5.22. *Ο διαιρέτης ριζών της* f, *ο οποίος θα συμβολίζεται με* $\mathrm{div}_0(f)$, *είναι ο*

$$\mathrm{div}_0(f) = \sum_{\substack{P \in X \\ \mathrm{ord}_P(f) > 0}} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P$$

ενώ ο διαιρέτης πόλων της f, *ο οποίος θα συμβολίζεται με* $\mathrm{div}_\infty(f)$ *είναι ο διαιρέτης*

$$\mathrm{div}_\infty(f) = \sum_{\substack{P \in X \\ \mathrm{ord}_P(f) < 0}} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P$$

Παρατήρηση VII.5.23. *Ισχύει ότι*

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}_0(f) - \mathrm{div}_\infty(f).$$

Ο διαιρέτης των μερόμορφων 1-μορφών, κανονικοί διαιρέτες

Έστω X μια επιφάνεια Riemann και ω μια μη-μηδενική μερόμορφη 1-μορφή επί της X.

Ορισμός VII.5.24. *Ο διαιρέτης της ω, θα συμβολίζεται με $\mathrm{div}(\omega)$, είναι ο διαιρέτης:*

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(\omega) \cdot P.$$

Κάθε τέτοιος διαιρέτης θα λέγεται κανονικός διαιρέτης του X. Το σύνολο των κανονικών διαιρετών του X θα συμβολίζεται με $\mathrm{KDiv}(X)$.

Παρατήρηση VII.5.25. *Έστω ω η 1-μορφή της σφαίρας του Riemann*

$$\mathrm{div}(\omega) = -2\infty,$$

όπου το ω δεν έχει ρίζες και έχει διπλό πόλο στο ∞. Πιο γενικά, αν $\omega = f(z)dz$ και $f = c\sum_i (z-\lambda_i)^{e_i}$ είναι μια ρητή συνάρτηση του z, τότε

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_i e_i\lambda_i - (2 + \sum_i e_i) \cdot \infty.$$

Ιδιαίτερα όλες οι μερόμορφες 1-μορφές της σφαίρας του Riemann έχουν βαθμό -2.

Από τον τύπο

$$\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega),$$

όπου η f είναι μια μη-μηδενική μερόμορφη συνάρτηση και ω μη-μηδενική μερόμορφη 1-μορφή επί του X. Δηλαδή αν προσθέσουμε έναν κύριο διαιρέτη σε έναν κανονικό διαιρέτη, προκύπτει και πάλι κανονικός διαιρέτης.

Υπάρχει μια ισχυρότερη μορφή αυτής της διαπίστωσης. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

Λήμμα VII.5.26. *Αν ω_1, ω_2 δύο μερόμορφες 1-μορφές σε επιφάνεια Riemann X και $\omega_1 \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδική μερόμορφη συνάρτηση f επί του X, τέτοια ώστε $\omega_2 = f\omega_1$.*

Απόδειξη. Έστω $z : U \to V \subset \mathbb{C}$ ένας χάρτης με τοπική συντεταγμένη z. Γράφουμε τις μορφές $\omega_i = g_i(z)dz$ με μερόμορφες συναρτήσεις g_i του V. Έστω $h = g_2/g_1$ το πηλίκο αυτών των συναρτήσεων. Η h είναι επίσης μια μερόμορφη συνάρτηση στο V. Στη συνέχεια ορίζουμε $f = h \circ z$. Η f είναι μερόμορφη συνάρτηση στο U. Αποδεικνύεται ότι η f είναι καλά ορισμένη ανεξάρτητα από την επιλογή του χάρτη συντεταγμένων. Προφανώς $\omega_2 = f\omega_1$. □

Πόρισμα VII.5.27. *Το σύνολο $\mathrm{KDiv}(X)$ των κανονικών διαιρετών είναι ακριβώς ένα σύμπλοκο της υποομάδας $\mathrm{PDiv}(X)$ των κυρίων διαιρετών. Με άλλα λόγια, η διαφορά δύο κανονικών διαιρετών είναι κύριος διαιρέτης. Επομένως,*

$$\mathrm{KDiv}(X) = \mathrm{div}(\omega) + \mathrm{PDiv}(X)$$

για κάθε μερόμορφη 1-μορφή ω.

VII.5.5 Γραμμική ισοδυναμία διαιρετών

Η παραπάνω ιδέα ότι δύο διαιρέτες διαφέρουν κατά κάποιο κύριο διαιρέτη, όσο απλή και αν φαίνεται, είναι η βασική διαδικασία οργάνωσης των διαιρετών.

Ορισμός VII.5.28. *Δύο διαιρέτες μιας επιφάνειας Riemann X θα λέγονται γραμμικά ισοδύναμες και θα συμβολίζονται ως $D_1 \sim D_2$ όταν η διαφορά τους είναι ένας κύριος διαιρέτης, δηλαδή όταν διαφέρουν κατά τον διαιρέτη μιας μερόμορφης συνάρτησης.*

Έστω X επιφάνεια Riemann. Ισχύουν:

1. Η γραμμική ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των διαιρετών της X.
2. Ένας διαιρέτης είναι ισοδύναμος με 0 αν και μόνο αν είναι κύριος διαιρέτης
3. Αν X συμπαγής, τότε γραμμικά ισοδύναμοι διαιρέτες έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλαδή

$$D_1 \sim D_2 \Rightarrow \deg D_1 = \deg D_2.$$

Παρατήρηση VII.5.29. *Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν X επιφάνεια Riemann, τότε*

1. *Αν f μερόμορφη μη-μηδενική συνάρτηση επί της X, τότε $\mathrm{div}_0(f) \sim \mathrm{div}_\infty(f)$*
2. *Κάθε δύο κανονικοί διαιρέτες επί της X είναι γραμμικά ισοδύναμοι και κάθε διαιρέτης ο οποίος είναι γραμμικά ισοδύναμος προς έναν κανονικό διαιρέτη είναι επίσης κανονικός διαιρέτης.*
3. *Αν X είναι η σφαίρα του Riemann, τότε κάθε δύο σημεία του X είναι γραμμικά ισοδύναμα. Πράγματι αν a, b σημεία (τα οποία χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε πεπερασμένα), τότε η συνάρτηση $f(z) = (z-a)/(z-b)$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση και $\mathrm{div}(f) = a-b$. Αν $b = \infty$ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την $f(z) = z-a$ με $\mathrm{div}(f) = z-a$.*

Ορισμός VII.5.30. *Η γραμμικά ισοδύναμη κλάση του κανονικού διαιρέτη λέγεται κανονική κλάση διαιρετών.*

Αν X συμπαγής επιφάνεια Riemann, τότε

1. Αν f μερόμορφη μη-μηδενική συνάρτηση επί του X, τότε $\deg(\mathrm{div}_0(f)) = \deg(\mathrm{div}_\infty(f))$
2. Αν έχουμε δύο κανονικούς διαιρέτες, αυτοί έχουν τον ίδιο βαθμό.

VII.5.6 Ο χώρος των συναρτήσεων και μορφών ενός διαιρέτη

Ένας από τους πιο σημαντικούς λόγους χρήσης των διαιρετών είναι να οργανώσουμε τις μερόμορφες συναρτήσεις μιας επιφάνειας Riemann. Είναι βολικό να ορίσουμε ότι $\mathrm{ord}_P(f) = \infty$ αν η f είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση σε μια περιοχή του P, ενώ θα θεωρούμε $\infty > n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Τέλος ορίζουμε την ομάδα του Picard

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/\mathrm{div}(\mathcal{M}(X))$$

.

Πρόταση VII.5.31. *Σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann ισχύουν τα παρακάτω:*

- $\mathrm{div}(f) = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathbb{C}^*$
- $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$

Απόδειξη.
- Αν $\mathrm{div}(f) = 0$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει πόλους, άρα είναι φραγμένη στο συμπαγές συνεκτικό σύνολο X και συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville είναι σταθερή, δηλαδή $f \in \mathbb{C}^*$.
- Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της διαφορικής μορφής $f'(z)/f(z)dz$ ταυτίζεται με τον αριθμό ριζών (λαμβάνω υπόψιν και τις πολλαπλότητες) αν αφαιρέσουμε τον αριθμό των πόλων συνεπώς, το πόρισμα VII.5.19 εφαρμοζόμενο για την $f(z)'/f(z)dz$ μας δίνει τελικά το ζητούμενο.

□

Λόγω της παραπάνω πρότασης μπορούμε να ορίσουμε και την ομάδα:

$$\mathrm{Pic}^0(X) := \mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{div}(\mathcal{M}(X))$$

και να συνοψίσουμε τα παραπάνω στην ακριβή ακολουθία:

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{M}(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}^0 X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0 X \longrightarrow 0.$$

Ο αριθμοθεωρητικός θα παρατηρήσει σίγουρα την αναλογία μεταξύ της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας και της ακριβούς ακολουθίας της ομάδας κλάσεων ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών:

$$1 \longrightarrow \text{μονάδες} \longrightarrow K^* \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{κλασματικά} \\ \text{ιδεώδη} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{ομάδα} \\ \text{κλάσεων} \end{pmatrix} \longrightarrow 1$$

Ορισμός VII.5.32. *Αν $D = \sum n_P P, D' = \sum n'_P P$ δυο διαιρέτες της επιφάνειας Riemann X, τότε ορίζουμε $D \geqslant D'$ αν και μόνο αν $n_p \geqslant n'_p$ $(\forall P \in X)$*

Έστω D ένας διαιρέτης μιας επιφάνειας Riemann X.

Ορισμός VII.5.33. *Ο χώρος των μερόμορφων συναρτήσεων με πόλους φραγμένους από τον D είναι το σύνολο*

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) : \mathrm{div}(f) \geqslant -D\},$$

ο οποίος έχει τη δομή $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου.

Αν $D_1 \leqslant D_2$, τότε $\mathcal{L}(D_1) \subset \mathcal{L}(D_2)$. Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι ολόμορφη αν και μόνο αν $\mathrm{div}(f) \geqslant 0$. Επομένως $L(0) = \mathcal{O}_X$, δηλαδή οι ολόμορφες συναρτήσεις στο X. Αν X είναι συμπαγής, τότε

$$\mathcal{L}(0) = \{\text{σταθερές συναρτήσεις επί της } X\} \cong \mathbb{C}.$$

Πράγματι μια ολόμορφη συνάρτηση σε συμπαγή επιφάνεια Riemann, αφού δεν έχει πόλους δεν θα έχει ούτε ρίζες και θα είναι σταθερά.

Πρόταση VII.5.34. *Αν X συμπαγής επιφάνεια Riemann και D διαιρέτης με $\deg(D) < 0$, τότε $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.*

Πρόταση VII.5.35. *Αν X συμπαγής επιφάνεια Riemann και D διαιρέτης της X, τότε*

$$\dim \mathcal{L}(D) \leqslant 1 + \deg(D).$$

Η παραπάνω πρόταση δείχνει για $D \neq 0$, ότι η $\mathcal{L}(D)$ είναι πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος (για $D = 0$ έχουμε δείξει ότι $\mathcal{L}(0)$ είναι μονοδιάστατος) και θα συμβολίζουμε με $\ell(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$.

Πρόταση VII.5.36. *Εστω $D \in \mathrm{Div}(X)$*

- *Αν $\deg(D) < 0$, τότε $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ και $\ell(D) = 0$*
- *Αν D, D' διαιρέτες που διαφέρουν κατά κύριο, τότε $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D')$ και $\ell(D) = \ell(D')$.*

Απόδειξη.

- Εστω $f \in \mathcal{L}(D)$, τότε $0 = \deg(\mathrm{div}(f)) \geqslant \deg(-D) = -\deg(D) > 0$.

- Αν $D = D' + \mathrm{div}(g)$, τότε η συνάρτηση

$$\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D')$$

$$f \longmapsto fg$$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{C}$-διανυσματικών χώρων.

□

Ορισμός VII.5.37 (Χώρος των μερομορφικών 1-μορφών)**.** *Ο χώρος των μερομόρφων 1-μορφών με πόλους φραγμένους από το* D *είναι ο χώρος*

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) : \mathrm{div}(\omega) \geqslant -D\}.$$

Από τον ορισμό $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{L}^{(1)}(0) = \Omega^1(X)$ ο χώρος των global ολόμορφων διαφορικών.

Πρόταση VII.5.38. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) \cong \mathcal{L}(D+K)$$

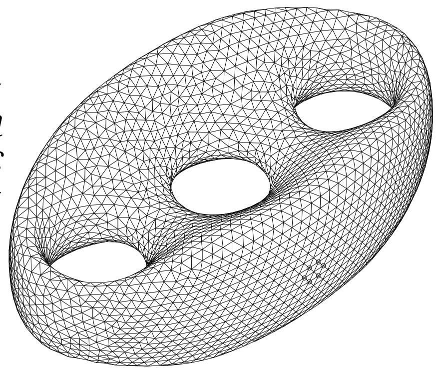
Απόδειξη. Απλή εφαρμογή του ορισμού και του ότι $K = \mathrm{div}(\omega)$. □

VII.6 Ο τύπος των Riemann-Hurwitz

Θεωρούμε μια συμπαγή πολλαπλότητα πραγματικής διάστασης 2. Μια τριγωνοποίηση της S είναι μια διάσπαση της S σε κλειστά σύνολα που το καθένα από αυτά είναι ομοιομορφικό με ένα τρίγωνο, ώστε δύο τρίγωνα να είναι ή ξένα μεταξύ τους ή να ενώνονται κατά μήκος μιας ακμής ή κατά μήκος μιας μόνο κορυφής.

Ορισμός VII.6.1. *Μια συμπαγής επιφάνεια πραγματικής διάστασης 2 όπως παραπάνω, εφοδιασμένη με μία τριγωνοποίηση με* v *το πλήθος κορυφές,* e *το πλήθος ακμές και* t *το πλήθος όψεις τριγώνων. Η χαρακτηριστική του Euler της* S *είναι ο ακέραιος*

$$\chi_S = v - e - t.$$



Παρατήρηση VII.6.2. *Στην παρακάτω πρόταση, το γένος είναι το τοπολογικό γένος το οποίο μετράει τον αριθμό από «τρύπες» μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann, δείτε την κατασκευή του παραδείγματος V.2.25. Το γένος μπορεί να οριστεί και με διαφορετικούς τρόπους για παράδειγμα με τη βοήθεια του θεωρήματος Riemann-Roch. Θα δώσουμε μια αιτιολόγηση της ισοδυναμίας των ορισμών στο VII.7.6.*

Πρόταση VII.6.3. *Η χαρακτηριστική του Euler είναι ανεξάρτητη της επιλογής της τριγωνοποίησης. Για μία συμπαγή πολλαπλότητα πραγματικής διάστασης 2 και γένους* g*, η χαρακτηριστική του Euler είναι* $2-2g$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μια τριγωνοποίηση, μπορούμε να έχουμε μια λεπτότερη τριγωνοποίηση με τους παρακάτω τρόπους:

- Μπορούμε να θεωρήσουμε μια επιπλέον κορυφή στο εσωτερικό ενός τριγώνου την οποία να την ενώσουμε με τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει τη χαρακτηριστική του Euler.

- Μπορούμε να προσθέσουμε μια κορυφή σε μια πλευρά ενός τριγώνου και δύο ακμές που ενώνουν την έξτρα κορυφή με τις απέναντι κορυφές διχοτομώντας τα αντίστοιχα τρίγωνα. Και πάλι η χαρακτηριστική του Euler δεν αλλάζει.

Είναι σαφές ότι και συνδυασμοί τέτοιων εκλεπτύνσεων δεν αλλάζουν τη χαρακτηριστική του Euler.

Αν τώρα έχουμε δυο τριγωνοποιήσεις, μπορούμε να τις υπερθέσουμε και να προσθέσουμε κατάλληλες κορυφές και ακμές ώστε να οδηγηθούμε σε μια τριγωνοποίηση η οποία αποτελεί εκλέπτυνση των δύο αρχικών. Συνεπώς η χαρακτηριστική του Euler των δύο αρχικών τριγωνοποιήσεων είναι ίδια.

Τέλος για να υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική του Euler μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann γένους g μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πολύγωνο του παραδείγματος V.2.25 στο οποίο προσθέτουμε ακμές ώστε να το τριγωνίσουμε. Τις πλευρές και κορυφές που θα ταυτιστούν τις μετράμε μόνο μία φορά. $\square$

Παρατήρηση VII.6.4. *Το θεώρημα VII.2.20 ύπαρξης μερόμορφης συνάρτησης εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τριγωνοποίησης σε κάθε συμπαγή επιφάνεια Riemann. Πράγματι η μερόμορφη συνάρτηση δίνει μια συνάρτηση $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Η προβολική ευθεία έχει την τριγονοποίηση αποτελούμενη από τα δύο τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία $\{0, 1, \infty\}$, δηλαδή έχουμε μια τριγωνοποίηση με δύο τρίγωνα, τρεις κορυφές και τρεις ακμές και χαρακτηριστική Euler 2. Την τριγωνοποίηση αυτή την κάνουμε λεπτότερη προσθέτοντας τα σημεία διακλάδωσης της F και τις ανάλογες ακμές και στη συνέχεια παίρνουμε μια τριγωνοποίηση της X θεωρώντας τις αντίστροφες εικόνες των κορυφών, ακμών και τριγώνων μέσω της F.*

Θεώρημα VII.6.5 (Ο τύπος του Hurwitz). *Θεωρούμε μια μη-σταθερή ολόμορφη συνάρτηση $F : X \to Y$ μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann. Για κάθε σημείο διακλάδωσης P συμβολίζουμε με e_P τον βαθμό διακλάδωσης. Αν g_X, g_Y είναι τα γένη των επιφανειών Riemman X, Y αντίστοιχα, έχουμε*

$$2g_X - 2 = \deg(F) \cdot (2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια τριγωνοποίηση της Y όπου κάθε σημείο της Y που διακλαδίζεται να είναι κορυφή τριγώνου. Μια τέτοια τριγωνοποίηση μπορεί να προκύψει ως εκλέπτυνση κάποιας τριγωνοποίησης. Υποθέτουμε ότι αυτή έχει v το πλήθος κορυφές, e το πλήθος ακμές και t το πλήθος τρίγωνα. Αυτή την τριγωνοποίηση την ανασηκώνουμε σε μια τριγωνοποίηση της X η οποία υποθέτουμε ότι έχει v' το πλήθος κορυφές, e' ακμές και t' το πλήθος τρίγωνα.

Αφού τα σημεία διακλάδωσης είναι μόνο κορυφές, έχουμε ότι $e' = \deg(F)e$ και $t' = \deg(F)t$. Σταθεροποιούμε μια κορυφή $Q \in Y$. Το πλήθος των προεικόνων της είναι ίσο με

$$|F^{-1}(Q)| = \sum_{P \in F^{-1}(Q)} 1 = \deg(F) + \sum_{P \in F^{-1}(Q)} (1 - e_P).$$

Συνεπώς το συνολικό πλήθος των κορυφών της X είναι ίσο με

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\text{κορυφές} Q \in Y} \deg(F) + \sum_{P \in F^{-1}(Q)} (1 - e_P) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{κορυφές} Q \in Y} \sum_{P \in F^{-1}(Q)} (e_P - 1) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{κορυφές} P \in X} (e_P - 1). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned}
2g_X - 2 &= -\chi_X = -v' + e' - t' \\
&= -\deg(F)c + \sum_{\text{κορυφές} P \in X} (e_P - 1) + \deg(F)e - \deg(F)t \\
&= -\deg \chi_Y + \sum_{\text{κορυφές} P \in X} (e_P - 1) \\
&\deg(F)(2g_Y - 2) + + \sum_{\text{κορυφές} P \in X} (e_P - 1).
\end{aligned}$$

□

Ας θεωρήσουμε μια επιφάνεια Riemann και μία μερόμορφη συνάρτηση $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Ας υποθέσουμε ότι αυτή έχει βαθμό $d = \deg(F)$. Ο τύπος των Riemann-Hurwitz δίνει ότι

$$\sum_{P \in X} (e_P - 1) = 2g_X - 2 + 2\deg(F).$$

Θεωρούμε επίσης τη μερόμορφη 1-μορφή $\omega = dz$ στον $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ η οποία έχει διπλό πόλο στο ∞ και πουθενά αλλού πόλο, συνεπώς έχει βαθμό -2. Θεωρούμε το pullback της $\eta = F^*(\omega)$ στην X. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\deg \operatorname{div} \eta &= \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(\eta) \\
&= \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(F^*(\omega)) \\
&= \sum_{P \in X} \big((1 + \operatorname{ord}_{F(P)}(\omega))e_P - 1\big) \\
&= \sum_{\substack{Q \neq \infty \\ P \in F^{-1}(Q)}} (e_P - 1) + \sum_{P \in F^{-1}(\infty)} (-e_P - 1) \\
&= \sum_{P \in X} (e_P - 1) - \sum_{P \in F^{-1}(\infty)} 2e_P \\
&= 2g - 2 + 2\deg(F) - 2\deg(F) \\
&= 2g_X - 2.
\end{aligned}$$

VII.7 Το Θεώρημα Riemann-Roch

VII.7.1 Το πρόβλημα του Mitag-Leffler

Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann. Για κάθε σημείο $P \in X$ επιλέγουμε μια τοπική συντεταγμένη z_P κεντραρισμένη στο P.

Ορισμός VII.7.1. *Ένας διαιρέτης ουρών Laurent είναι ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα της μορφής*

$$\sum_P r_P(z_P)P,$$

όπου τα $r_P(z_P)$ είναι πολυώνυμα Laurent στη συντεταγμένη z_P, δηλαδή πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής:

$$r_P(z_P) = \sum_{n=N}^{M} a_n z_P^n, \text{ όπου } a_n \in \mathbb{Z}.$$

Το σύνολο των διαιρετών ουρών Laurent με την τυπική πρόσθεση αποτελεί μια αβελιανή ομάδα, την οποία θα τη συμβολίζουμε με $\mathcal{T}(X)$.

Επίσης, για κάθε διαιρέτη D *σχηματίζουμε την υποομάδα*

$$\mathcal{T}[D](X) = \left\{ \sum_P r_P P : \begin{array}{c} \text{για κάθε } P \text{ με } r_P \neq 0 \text{ ο μεγαλύτερος όρος του} \\ r_P \text{ έχει βαθμό γνήσια μικρότερο από } -D(P) \end{array} \right\}$$

Στον παραπάνω ορισμό, το $\mathcal{T}[0](X)$ είναι η ομάδα των ουρών Laurent όπου κάθε συντελεστής r_P έχει αποκλειστικά αρνητικούς όρους.

Για κάθε διαιρέτη D ορίζεται μια συνάρτηση

$$\alpha_D : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{T}[D](X)$$

η οποία στέλνει τη μερόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(X)$ στο άθροισμα $\sum_P r_P P$, όπου r_P είναι η αποκοπή αναπτύγματος Laurent της f όπου πετάμε έξω όλους τους όρους βαθμού $-D(P)$ και μεγαλύτερου.

Παρατηρούμε ότι μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}(D)$ αν και μόνο αν δεν έχει όρους τάξης μικρότερους του $-D(P)$ σε κάθε σημείο $P \in X$. Συνεπώς

$$\mathcal{L}(D) = \ker(\alpha_D).$$

Θεωρούμε έναν διαιρέτη ουρών Laurent $Z \in \mathcal{T}[D](X)$ και μπορούμε να ρωτήσουμε αν ανήκει στην εικόνα του α_D, δηλαδή αν υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση f της οποίας αν κόψουμε τα αναπτύγματα Laurent θα πάρουμε τον Z.

Το πρόβλημα της κατασκευής συναρτήσεων με δεδομένες ουρές Laurent σε συγκεκριμένα σημεία και πουθενά αλλού πόλους ονομάζεται το *πρόβλημα του Mittag-Leffler* για την επιφάνεια X.

Το πρόβλημα του Mittag-Leffler μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια του συμπυρήνα της α_D το οποίο συμβολίζουμε με

$$H^1(D) = \operatorname{coker}(\alpha_D) = \frac{\mathcal{T}[D](X)}{\operatorname{Im}(\alpha_D).} \tag{VII.3}$$

Δηλαδή εξ ορισμού ένας διαιρέτης ουρών Laurent είναι στην εικόνα του α_D αν και μόνο αν η κλάση του στο $H^1(D)$ είναι 0. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{T}[D](X) \longrightarrow H^1(D) \to 0. \tag{VII.4}$$

VII.7.2 Το θεώρημα των Riemann-Roch

Το πρόβλημα του να υπολογιστεί η διάσταση των χώρων $\mathcal{L}(D)$ απαντάται μέσω του θεωρήματος των Riemann-Roch.

Θεώρημα VII.7.2 (Riemann-Roch, πρώτη μορφή)**.** *Έστω* D *διαιρέτης στην αλγεβρική καμπύλη* X*, τότε*

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0).$$

Η παραπάνω έκφραση δεν είναι απολύτως ικανοποιητική, γιατί έχουμε μεταφέρει το πρόβλημα στον υπολογισμό της διάστασης του $H^1(D)$ και $H^1(0)$ τα οποία σχετίζονται με την ύπαρξη μερόμορφων συναρτήσεων με συγκεκριμένες ουρές Laurent.

Το θεώρημα υπολοίπων θα παίξει έναν σημαντικό ρόλο. Ας υποθέσουμε ότι $Z = \sum r_P P \in \mathcal{T}[0](X)$, και $Z = \alpha_0(f)$ για κάποια μερόμορφη συνάρτηση f. Τότε για κάθε ολόμορφο διαφορικό ω, το $f\omega$ μπορεί να έχει πόλους μόνο στους πόλους της f και οι αρνητικοί όροι των αναπτυγμάτων

Laurent του διαφορικού $f\omega$ καθορίζονται από τους αρνητικούς όρους των αναπτυγμάτων της f αλλά και από τα αναπτύγματα του ω. Το θεώρημα των υπολοίπων μας δίνει ότι

$$\sum_{P\in X} \mathrm{Res}_P(r_P\omega) = 0, \tag{VII.5}$$

αν $\alpha_0(f) = \sum r_P P$. Δηλαδή η (VII.5) είναι μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας τέτοιας f. Επιπλέον, κάθε ολόμορφο διαφορικό επιβάλλει τέτοιες συνθήκες και το θεώρημα Riemann-Roch στην ουσία μετρά όλες αυτές τις συνθήκες.

Έστω D ένας διαιρέτης στο X και ω μια μερόμορφη 1-μορφή στον χώρο $\mathcal{L}^1(-D)$, δηλαδή εξ ορισμού $\mathrm{div}(\omega) \geqslant D$ ή ισοδύναμα $\mathrm{ord}_P(\omega) \geqslant D(P)$ για κάθε $P \in X$. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\omega = \left(\sum_{n=D(P)}^{\infty} c_n z_P^n\right) dz_P$$

στην τοπική συντεταγμένη z_P κεντραρισμένη στο P.

Τη μερόμορφη συνάρτηση f τη γράφουμε ως $f = \sum_k a_k z_P^k$ Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f\omega$ στο P, δηλαδή ο συντελεστής του z_P^{-1} υπολογίζεται ίσο με

$$\mathrm{Res}_P(f\omega) = \sum_{n=D(P)}^{\infty} c_n a_{-1-n}$$

και εξαρτάται από τους συντελεστές a_i του αναπτύγματος της f για $i < -D(P)$. Δηλαδή εξαρτάται μόνο από τον διαιρέτη ουρών Laurent $\alpha_D(f)$, το οποίο εκφράζει την αποκοπή της σειράς Laurent της f.

Μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση υπολοίπου:

$$\mathrm{Res}_\omega : \mathcal{T}[D](X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

για $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, θέτοντας

$$\mathrm{Res}_w\left(\sum r_P P\right) = \sum_P \mathrm{Res}_P(r_P\omega).$$

Δηλαδή

$$\sum_P \mathrm{Res}_P(f\omega) = \mathrm{Res}_\omega(\alpha_D(f)) \text{ όταν } \omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D).$$

Δηλαδή το Res_ω μηδενίζεται στην εικόνα του α_D όταν $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$. Δηλαδή το Res_w δίνει μια καλά ορισμένη γραμμική συνάρτηση:

$$\mathrm{Res}_\omega : H^1(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

την οποία μπορούμε να τη βλέπουμε ως ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου $H^1(D)^*$.

Θεώρημα VII.7.3 (Serre Duality)**.** *Η γραμμική συνάρτηση:*

$$\mathrm{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) \to H^1(D)^*$$

είναι ισομορφισμός μιγαδικών διανυσματικών χώρων. Ιδιαιτέρα για κάθε κανονικό διαιρέτη K της X,

$$\dim H^1(D) = \dim \mathcal{L}^{(1)}(-D) = \dim \mathcal{L}(K-D).$$

Απόδειξη. Δείτε το [14, κεφ. VI], ο υπολογισμός για τη διάσταση του $H^1(D)$ προέρχεται από την ακριβή ακολουθία της εξίσωσης (VII.4). □

Η παραπάνω κατασκευή δίνει ότι $H^1(0) = \mathcal{L}(K)$, θα ονομάσουμε την κοινή αυτή διάσταση «αναλυτικό γένος».

Αν για έναν διαιρέτη D θέσουμε $\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D)$ έχουμε την παρακάτω μορφή του θεωρήματος:

Θεώρημα VII.7.4 (Riemann-Roch). *Εστω X λεία καμπύλη και K κανονικός διαιρέτης της X. Υπάρχει ένας ακέραιος $g \geqslant 0$, τέτοιος ώστε για κάθε διαιρέτη $D \in \mathrm{Div}(X)$ να έχουμε:*

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg D - g + 1$$

Πόρισμα VII.7.5.

- $\ell(K) = g$
- $\deg(K) = 2g - 2$
- *αν* $\deg D > 2g - 2$, *τότε* $\ell(D) = \deg(D) - g + 1$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\ell(0) = 1$, αφού οι παντού ολόμορφες συναρτήσεις ταυτίζονται με τις σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή με το $\mathbb{C}$ που έχει διάσταση 1. Ο τύπος του Riemann-Roch για $D = 0$ δίνει $\mathcal{L}(K) = g$. Στη συνέχεια ο ίδιος τύπος για $D = K$ δίνει τον τύπο του βαθμού $\deg K = 2g - 2$. □

Παρατήρηση VII.7.6. *Με τη βοήθεια του τύπου των Riemann-Hurwitz έχουμε υπολογίσει ότι ο βαθμός μιας μερόμορφης 1-μορφής άρα και κάθε κανονικού διαιρέτη είναι $2g - 2 = -\chi_X$, όπου g είναι το τοπολογικό γένος. Το γεγονός αυτό μαζί με το προηγούμενο πόρισμα μας δίνει ότι το τοπολογικό γένος ταυτίζεται με το αναλυτικό γένος.*

Θα δώσουμε μία πλήρη απόδειξη του θεωρήματος Riemann-Roch μέσω της θεωρίας των σωμάτων συναρτήσεων και των Adelé στο κεφάλαιο VIII.

VII.7.3 Μερικές εφαρμογές του Θεωρήματος Riemann-Roch

Καμπύλες γένους 0

Λήμμα VII.7.7. *Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann. Αν για ένα σημείο P έχουμε $\ell(P) > 1$, τότε $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Έστω X μια επιφάνεια Riemann. Αν $\ell(P) > 1$, τότε υπάρχει μια μη σταθερή μερόμορφη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ η οποία είναι βαθμού ένα, άρα ισομορφισμός. □

Πρόταση VII.7.8. *Μια επιφάνεια Riemman γένους 0 είναι ισόμορφη με το $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Έστω ένα σημείο $P \in X$. Ο κανονικός διαιρέτης K έχει βαθμό -2, συνεπώς

$$\ell(P) = \deg(P) + 1 - g + \ell(K - P) = 2.$$

Το ζητούμενο έπεται από το λήμμα VII.7.7. □

Καμπύλες γένους 1

Θεώρημα VII.7.9. *(Κανονική μορφή Weierstrass): Κάθε καμπύλη E γένους 1 δίνεται στο αφινικό επίπεδο από μια κυβική αλγεβρική εξίσωση της μορφής:*

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

η οποία είναι μη-ιδιόμορφη. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε δομή αβελιανής ομάδας στα σημεία της καμπύλης με ουδέτερο στοιχείο ένα καθορισμένο σημείο O.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα τη δομή ομάδας κάνοντας χρήση του θεωρήματος Riemann-Roch. Εστω P, Q δύο σημεία της καμπύλης. Θεωρούμε τον διαιρέτη:

$$A := P + Q - O.$$

Ισχύει $\deg A = 1$, το γένος g ισούται με 1, και από το θεώρημα Riemann-Roch έχουμε $\dim \mathcal{L}(A) = 1$. Συνεπώς υπάρχει μοναδική κατά προσέγγιση σταθεράς f με δυο απλούς πόλους στα P, Q και δυο ρίζες. Η μία είναι το O, την άλλη ρίζα την ονομάζουμε $P + Q$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η πράξη αυτή δίνει δομή μεταθετικής ομάδας στην καμπύλη. Ας αποδείξουμε για παράδειγμα τον προσεταιρισμό:

$$(P + Q) + R = P + (Q + R)$$

Ορίζουμε $\Sigma := (P + Q) + R$ και θεωρούμε τους κύριους διαιρέτες:

$$(f) = P + Q - (P + Q) - O$$

$$(g) = (P + Q) + R - \Sigma - O$$

$$(h) = Q + R - (Q + R) - O$$

έχουμε τότε :

$$(f \cdot g) = P + Q + R - \Sigma - 2O$$

$$(1/h) = (Q + R) + O - Q - R$$

$$(f \cdot g/h) = P + (Q + R) - \Sigma - O$$

άρα

$$\Sigma = P + (Q + R).$$

Για να δείξουμε την αλγεβρική σχέση: έχουμε $\mathcal{L}(O) = \langle 1 \rangle$,

$$\dim \mathcal{L}(2.O) = \deg(2 \cdot O) = 2$$

και μία βάση αποτελούν οι συναρτήσεις $\{1, x\}$, όπου η x είναι συνάρτηση στο σώμα συναρτήσεων της ελλειπτικής καμπύλης E με διπλό πόλο στο O και κανένα άλλο πόλο. Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο και

$$\dim(\mathcal{L}(3 \cdot O)) = 3 \Rightarrow \mathcal{L}(3 \cdot 0) = \langle 1, x, y \rangle,$$

δηλαδή υπάρχει συνάρτηση y με μοναδικό πόλο στο O τάξης ακριβώς 3.

$$\dim(\mathcal{L}(4 \cdot 0)) = 4 \Rightarrow \mathcal{L}(4 \cdot O) = \langle 1, x, y, x^2 \rangle,$$

δηλαδή δεν χρειάζεται να προσθέσουμε καινούργια συνάρτηση.

$$\dim(\mathcal{L}(5 \cdot 0)) = 5 \Rightarrow \mathcal{L}(5 \cdot 0) = \langle 1, x, y, x^2, xy \rangle$$

και

$$\dim(\mathcal{L}(6 \cdot 0)) = 6 \Rightarrow \mathcal{L}(6 \cdot 0) = \langle 1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2 \rangle$$

συνεπώς οι παραπάνω 7 συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$ay^2 + bxy + cxy = dx^3 + hx^2 + ex + g$$

η οποία μετά από κατάλληλο μετασχηματισμό έρχεται στη μορφή:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

□

Οι καμπύλες γένους δύο είναι υπερελλειπτικές

Μία καμπύλη που ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$y^2 = P(z)$$

ονομάζεται υπερελλειπτική.

Έστω X μια καμπύλη γένους 2. Ένας κανονικός διαιρέτης έχει βαθμό 2. Αφού $\ell(K) = 2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $K > 0$ και υπάρχει μια μη-σταθερή μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathcal{L}(K)$. Αυτή ορίζει μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ βαθμού 2. Συνεπώς το σώμα $\mathcal{M}(X)$ είναι μια επέκταση βαθμού 2 του $\mathbb{C}(z)$, άρα $f^2 \in \mathbb{C}(x)$, δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα $p(z), q(z) \in \mathbb{C}(z)$, ώστε

$$p(z)f^2 = q(z) \Leftrightarrow \big(p(z)f\big)^2 = p(z)q(z).$$

VII.8 Το θεώρημα Abel-Jacobi

Έστω X επιφάνεια Riemann, ορίσαμε στο V.2.43 την πρώτη ομάδα ομολογίας ως την αβελιανοποίηση της πρωταρχικής ομάδας. Συνήθως η πρώτη ομάδα ομολογίας $H_1(X, \mathbb{Z})$ ορίζεται ως το πηλίκο της ομάδας όλων των κλειστών αλυσίδων της X ως προς την υποομάδα των συνόρων

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{CLCH}(X)}{\mathrm{BCH}(X)}$$

όπου αλυσίδα είναι πεπερασμένο άθροισμα δρόμων με ακέραιους συντελεστές, δηλαδή αθροίσματα της μορφής

$$\sum_i n_i\gamma_i : n_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \text{ δρόμος επί το X.}$$

Σε κάθε αλυσίδα αντιστοιχεί ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα σημείων του X, όπου σε κάθε γ_i αντιστοιχίζουμε τη διαφορά των άκρων και επεκτείνουμε γραμμικά. Η απεικόνιση αυτή επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων από την ομάδα $\mathrm{Ch}(X)$ στην ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το σύνολο των σημείων της X. Ο πυρήνας του ομομορφισμού αυτού είναι το σύνολο των αλυσίδων οι οποίες έχουν κάθε τελικό σημείο κάποιας γ_i ίσο με κάποιο αρχικό σημείο κάποιας άλλης γ_j. Ο πυρήνας συμβολίζεται με $\mathrm{CLCH}(X)$ και είναι το σύνολο των κλειστών αλυσίδων επί του X.

Αν D είναι τριγωνοποιήσιμο κλειστό σύνολο, υποσύνολο του X, τότε η αλυσίδα ∂D είναι κλειστή αλυσίδα. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι το ∂T για κάθε τρίγωνο είναι κλειστό. Τέτοιες κλειστές αλυσίδες λέγονται αλυσίδες συνόρων της X (boundary chains). Η υποομάδα της $\mathrm{CLCH}(X)$ που παράγεται από όλες τις αλυσίδες συνόρων ∂D συμβολίζεται με $\mathrm{BCH}(X)$.

Η ισοδυναμία των ορισμών δίνεται θεωρώντας κάθε δρόμο στο X ως μία κλειστή αλυσίδα ορίζοντας με αυτό τον τρόπο μία συνάρτηση

$$\pi_1(X, x_0) \to H_1(X, \mathbb{Z})$$

Το θεώρημα Hurewitz [9, 2A.1] εξασφαλίζει ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι επιμορφισμός και έχει ως πυρήνα τον μεταθέτη της $\pi_1(X, x_0)$.

Για μια συμπαγή επιφάνεια Riemann X γένους $g = g(X)$ η $H_1(X, \mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού $2g$. Ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας $H_1(X, \mathbb{Z})$ προκύπτει κάνοντας χρήση της παράστασης της X ως ένα πολύγωνο με $4g$-πλευρές, όπως δόθηκε στο παράδειγμα V.2.25.

Το σύνολο $\{(a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2 \dots, b_g)\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(X)$ η οποία έχει την παράσταση

$$\left\langle a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant g, \prod_{i=1}^{g}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1 \right\rangle.$$

και

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \cdots \mathbb{Z}a_g + \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}b_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_g$$

VII.8.1 Περίοδοι 1-μορφών

Έστω ω μια κλειστή C^∞ 1-μορφή της X. Αν D είναι ένα τριγωνοποιημένο υποσύνολο της X, από το θεώρημα του Stokes προκύπτει ότι

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega = \iint_D 0 = 0,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της ω ως προς οποιοδήποτε σύνορο είναι ίσο με 0. Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε μορφής ω ως προς μια κλειστή αλυσίδα εξαρτάται από την κλάση ομολογίας στην οποία ανήκει το σύνορο. Δηλαδή για κάθε κλάση ομολογίας $[c] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ ισχύει

$$\int_{[c]} \omega = \int_c \omega.$$

Ιδιαίτερα, δεδομένου ότι κάθε ολόμορφη 1-μορφή είναι κλειστή, τα ολοκληρώματα των 1-μορφών ως προς τις κλάσεις ομολογίας της $H_1(X, \mathbb{Z})$ είναι καλά ορισμένα.

Ιδιαίτερα για κάθε κλάση ομολογίας $[c] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ λαμβάνουμε ένα καλά ορισμένο συναρτησιοειδές στον διανυσματικό χώρο $\Omega(X)$ των ολόμορφων 1-μορφών, το οποίο ορίζεται από την ολοκλήρωση πάνω στο c

$$\int_{[c]} : \Omega(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Ορισμός VII.8.1. *Ένα γραμμικό συναρτησιοειδές*

$$\lambda : \Omega(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

θα λέγεται περίοδος, όταν $\lambda = \int_{[c]}$ *για κάποια κλάση ομολογίας* $[c] \in H_1(X, \mathbb{Z})$.

Το σύνολο Λ των συναρτησιοειδών που είναι περίοδοι αποτελεί υποομάδα του δυϊκού χώρου $\Omega(X)^*$.

Η Ιακωβιανή μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann

Ο χώρος πηλίκο των συναρτησιοειδών του $\Omega(X)$ modulo την ομάδα των περιόδων Λ είναι θεμελιώδους σημασίας.

Ορισμός VII.8.2. *Έστω X συμπαγής επιφάνεια Riemann. Η Ιακωβιανή της X συμβολίζεται με* $\mathrm{Jac}(X)$ *και είναι*

$$\mathrm{Jac}(X) = \frac{\Omega(X)^*}{\Lambda}.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε βάσεις για να περιγράψουμε την Ιακωβιανή. Έστω $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ μια βάση του $\Omega(X)$. Αυτό μας επιτρέπει να ταυτίσουμε τον διανυσματικό χώρο $\Omega(X)^*$ με τον χώρο στηλών $\mathbb{C}^g$ μέσω του ισομορφισμού

$$\Omega(X)^* \ni \lambda \longmapsto (\lambda(\omega_1), \lambda(\omega_2), \ldots, \lambda(\omega_g))^t$$

Ιδιαίτερα, κάθε περίοδος αντιστοιχεί σε κάποιο τέτοιο διάνυσμα. Η περίοδος που αντιστοιχεί στην κλάση συνομολογίας $[c]$, μιας κλειστής αλυσίδας c είναι το διάνυσμα:

$$\left(\int_c \omega_1, \int_c \omega_2, \ldots, \int_c \omega_g\right)^t$$

Επομένως

$$\mathrm{Jac}(X) \cong \frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$$

όπου Λ η υποομάδα της $\mathbb{C}^g$ που αντιστοιχεί στις περιόδους. Επομένως η $\mathrm{Jac}(X)$ είναι μια αβελιανή ομάδα.

Η απεικόνιση Abel-Jacobi

Για να εκμεταλλευτούμε πλήρως την κατασκευή της Ιακωβιανής μιας επιφάνειας Riemann X θα περιγράψουμε αναλυτικότερα τη σχέση Ιακωβιανής και επιφάνειας. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω της συνάρτησης των Abel-Jacobi. Επιλέγουμε ένα βασικό σημείο $P_0 \in X$. Για κάθε σημείο P της X επιλέγουμε έναν δρόμο γ_P επί της X, από το P_0 ως το P. Θα θέλαμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$A : X \longrightarrow \Omega(X)^*$$

η οποία στέλνει το P στο συναρτησιοειδές κατά μήκος του δρόμου γ_P,

$$A(P)(\omega) = \int_{\gamma_P} \omega$$

Η παραπάνω συνάρτηση δεν είναι καλά ορισμένη. Αν κανείς επιλέξει έναν άλλο δρόμο γ'_P από το P_0 στο P διαφορετικό του γ_P, τότε η τιμή $A(P)$ διαφέρει από την αρχική κατά ένα συναρτησιοειδές το οποίο είναι το ολοκλήρωμα ως προς την κλειστή αλυσίδα $\gamma_P - \gamma'_P$. Με άλλα λόγια, το $A(P)$ είναι καλά ορισμένο modulo την υποομάδα των περιόδων. Επομένως η συνάρτηση A είναι καλά ορισμένη ως συνάρτηση:

$$A : X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

και λέγεται συνάρτηση των Abel-Jacobi της επιφάνειας Riemann X. Εξαρτάται βέβαια από το αρχικό σημείο P_0. Αν επιλέξουμε μια βάση $\{\omega_i\}$ της $\Omega(X)$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση των Abel-Jacobi A ως συνάρτηση στο $\mathbb{C}^g/\Lambda$ που δίνεται από τον τύπο

$$A(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \int_{P_0}^{P_1} \omega_2, \ldots, \int_{P_0}^{P_1} \omega_g \right)^t \mod \Lambda,$$

όπου Λ η ομάδα των περιόδων του $\mathbb{C}^g$.

Επέκταση της συνάρτησης A στους διαιρέτες

Έστω $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ένας διαιρέτης της X. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση A στους διαιρέτες

$$\begin{aligned} A : \mathrm{Div}(X) &\longrightarrow \mathrm{Jac}(X) \\ \sum n_P P &\longmapsto \sum n_p A(P), \end{aligned}$$

η οποία είναι προφανώς ένας ομομορφισμός ομάδων, θα λέγεται και πάλι συνάρτηση των Abel-Jacobi και θα συνεχίσουμε να τη συμβολίζουμε με A.

Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι ο περιορισμός της A στους διαιρέτες βαθμού 0 της X

$$A_0 : \mathrm{Div}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X).$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η επιλογή του αρχικού σημείου P_0 στον ορισμό της συνάρτησης των Abel-Jacobi δεν επηρεάζει τη συνάρτηση A_0.

Πρόταση VII.8.3. *Η συνάρτηση A_0 είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του αρχικού σημείου P_0 επί της X.*

Απόδειξη. Έστω ότι επιλέγουμε ένα σημείο P'_0 διαφορετικό από το P. Έστω γ ένας δρόμος από το P_0 στο P'_0 της X. Στον τύπο της $A(P)$, αν αλλάξουμε το αρχικό σημείο P_0 με το P'_0, παρατηρούμε ότι η εικόνα του διανύσματος διαφέρει από την αρχική κατά το διάνυσμα

$$v := \left(\int_\gamma \omega_1, \int_\gamma \omega_2, \ldots, \int_\gamma \omega_g \right)^t \mod \Lambda$$

Το $\nu \in \mathrm{Jac}(X)$ είναι ανεξάρτητο του P. Επομένως, αν

$$D = \sum_{P \in X} n_P P \in \mathrm{Div}^0(X),$$

τότε $\sum_{P\in X} n_P = 0$ δίνει ότι $A(\sum_{P\in X} n_P P)$ διαφέρει από το αρχικό κατά $\sum_{P\in X} n_P \nu = \nu \sum_{P\in X} n_P = 0$. □

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα των Abel-Jacobi. Υπενθυμίζουμε ότι, αν f μερόμορφη σε μια συμπαγή επιφάνεια Riemann, τότε ο διαιρέτης $\mathrm{div}(f)$ έχει βαθμό μηδέν. Αλλά αυτό δεν είναι είναι μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας διαιρέτης κύριος διαιρέτης.

Θεώρημα VII.8.4. *Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann γένους $g = g(X)$ και $D \in \mathrm{Div}_0(X)$. Ο D είναι διαιρέτης μιας μερόμορφης συνάρτησης της επιφάνειας Riemann X αν και μόνο αν $A_0(D) = 0$ στην $\mathrm{Jac}(X)$.*

Ο τελεστής ίχνος

Αν $F : X \to Y$ ολόμορφη συνάρτηση ανάμεσα στις επιφάνειες Riemann X, Y και σ συνάρτηση ή μορφή της Y. Μέσω της “pullback” διαδικασίας κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $F^*\sigma$ της X.

Θα πάμε αντίστροφα. Αν σ είναι μια συνάρτηση ή μορφή στην X θα ορίσουμε το ίχνος της επί της Y. Έστω h μερόμορφη συνάρτηση επί της X και $Q \in Y$, το οποίο δεν είναι σημείο διακλάδωσης της F. Αν $\deg F = d$, υπάρχουν d το πλήθος προεικόνες του $Q \in Y$ έστω $P_1, P_2, \ldots, P_d$. Αφού η πολλαπλότητα της F σε κάθε ένα από τα σημεία P_i είναι εξ υποθέσεως ένα, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο ενός χάρτη που περιέχει το Q ώστε

$$F^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_d$$

με $F|_{V_i}$ ολόμορφη για κάθε $1 \leqslant i \leqslant d$. Επιπλέον, κάθε η F περιορισμένη στα V_i αντιστρέφεται και έστω $\phi_i : U \to V_i$ η αντίστροφη της $F|_{V_i}$.

Ορισμός VII.8.5. *Ίχνος της h επί της U είναι η συνάρτηση*

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{i=1}^{d} h \circ \phi_i = \sum_{i=1}^{d} \phi^*(h|_{V_i}).$$

Η συνάρτηση ίχνος σε σημείο $Q \in Y$ είναι απλά το άθροισμα των προεικόνων της $F : X \to Y$,

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{P \in F^{-1}(Q)} h(P).$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει, όταν η h δεν έχει πόλους σε καμμία από τις προεικόνες του Q. Αν h ολόμορφη στα P_i, τότε η $\mathrm{Tr}(h)$ ολόμορφη στο Q.

Από την ταξινόμηση των ιδιαζόντων σημείων έχουμε

$$\text{Η } \mathrm{Tr}(h) \text{ έχει } \begin{cases} \text{Ουσιαστική ανωμαλία στο σημείο διακλάδωσης} \\ \text{Άρσιμη ανωμαλία στο σημείο διακλάδωσης} \\ \text{Πόλο στο σημείο διακλάδωσης} \end{cases}$$

Ισχυριζόμαστε ότι στη χειρότερη των περιπτώσεων τα σημεία διακλάδωσης είναι το πολύ πόλοι του ίχνους $\mathrm{Tr}(h)$, δηλαδή έχουμε μερομορφία και μάλιστα αν η h είναι ολόμορφη σε κάθε προεικόνα ενός σημείου του Y, τότε και η $\mathrm{Tr}(h)$ είναι ολόμορφη. Όπως θα δούμε παρακάτω, αρκεί να ελέγξουμε την περίπτωση που το σημείο διακλάδωσης Q έχει μοναδική προεικόνα P με πολλαπλότητα m.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την τοπική κανονική μορφή. Αν $F : X \to Y$ ολόμορφη μη-σταθερή απεικόνιση ορισμένη στο σημείο $P \in X$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος m με την ακόλουθη ιδιότητα:

Για κάθε χάρτη $z_2 : U_2 \to V_2$ της Y επικεντρωμένο στο $F(P)$, υπάρχει χάρτης $z_1 : U_1 \to V_1$ της X επικεντρωμένος στο P, ώστε $z_2(F(z_1^{-1}(z))) = z^m$.

$$\begin{tikzcd} X & U_1 \arrow[l, hook'] \arrow[r, "z_1"] \arrow[d, "F"] & V_1 \subset \mathbb{C} \arrow[d, "z^m"] \\ Y & U_2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, "z_2"] & V_2 \subset \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Επομένως, από το θεώρημα αυτό μπορούμε να επιλέξουμε τοπική συντεταγμένη z επικεντρωμένη στο Q και τοπική συντεταγμένη w επικεντρωμένη στο P ώστε $z = w^m$.

Υποθέτουμε ότι η h έχει ανάπτυγμα Laurent $\sum_n c_n w^n$. Έστω $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Για $z \neq 0$, το ίχνος $\mathrm{Tr}(h)(z)$ υπολογίζεται και πάλι ως το άθροισμα των προεικόνων όπως και προηγουμένως. Οι προεικόνες κάθε $z = w^n$ για $z \neq 0$ είναι $\zeta^i w$ $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Επομένως

$$\mathrm{Tr}(h)(z) = \mathrm{Tr}(h)(w^m) = \sum_{i=0}^{m-1} h(\zeta^i w) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_n (\zeta^i w)^n = \sum_n \left(\sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{in} \right) w^n$$

Από την άλλη ισχύει

$$\sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{in} = \begin{cases} m, \text{ αν } m \mid n \\ 0 \text{ αν } m \nmid n, \end{cases}$$

επομένως οι όροι που απομένουν στο άθροισμα είναι για $n = mk$. Συνεπώς αν h μερόμορφη στο P, τότε και η $\mathrm{Tr}(h)$ είναι μερόμορφη στο Q και μάλιστα αν h ολόμορφη στο P, τότε η $\mathrm{Tr}(h)$ είναι ολόμορφη στο Q.

Αν τώρα το Q έχει περισσότερες από μια προεικόνες, τότε η συνάρτηση $\mathrm{Tr}(h)$ είναι απλό άθροισμα ιχνών το οποίο προκύπτει από περιοχές με μοναδική προεικόνα. Συνεπώς και πάλι το ίχνος μερόμορφης συνάρτησης είναι μερόμορφη όπως και πριν.

Ανάλογα υπολογίζεται αντίστοιχο θεώρημα για την ύπαρξη ίχνους μιας μερόμορφης 1-μορφής.

Πρόταση VII.8.6. *Αν $F : X \to Y$ μη-σταθερή ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann και ω μια 1-μερόμορφη μορφή, τότε για κάθε $Q \in Y$, ισχύει*

$$\mathrm{Res}_Q(\mathrm{Tr}(\omega)) = \sum_{P \in F^{-1}(Q)} \mathrm{Res}_P(\omega).$$

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την περίπτωση που η προεικόνα του Q έχει μοναδική προεικόνα P πολλαπλότητας m.

Η $\omega = h(w)dw$, $h = \sum_n c_n w^n$ και $\mathrm{Res}_P(\omega) = c_{-1}$. Αλλά

$$\mathrm{Tr}(\omega) = \sum_k c_{km-1} z^{k-1} dz$$

□

Ο συντελεστής του z^{-1} προκύπτει για $k = 0$ και είναι πάλι ο c_{-1}.

Μια αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων

Θα δώσουμε μια αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος υπολοίπων η οποία δεν χρησιμοποιεί την έννοια της ολοκλήρωσης. Μάλιστα η απόδειξη αυτή ισχύει για αλγεβρικές καμπύλες ορισμένες πάνω από οποιοδήποτε σώμα. Θέλουμε να δείξουμε ότι για μία 1-μορφή το άθροισμα των υπολοίπων είναι 0. Η ιδέα είναι απλή: αρκεί να θεωρήσουμε μια μη-σταθερή μερόμορφη συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann, η οποία αντιστοιχεί σε μια ολόμορφη συνάρτηση $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Θεωρούμε τη μερόμορφη μορφή $\mathrm{Tr}(\omega)$ στο $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Διαλέγοντας μια αφινική συντεταγμένη μπορούμε να γράψουμε

$$\mathrm{Tr}(\omega) = r(z)dz,$$

όπου το $r(z) \in \mathbb{C}(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση. Χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα για να διασπάσουμε την $r(z)$ σε άθροισμα όρων όπου ο καθένας έχει τη μορφή $c(z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ και $a, c \in \mathbb{C}$. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα υπολοίπων για τη διαφορική μορφή $c(z-a)^n dz$. Αν το $n \leqslant -2$, τότε έχουμε έναν μοναδικό πόλο στο a με υπόλοιπο 0. Αν $n = -1$, έχουμε απλό πόλο στο a με υπόλοιπο c και απλό πόλο στο ∞ με υπόλοιπο $-c$. Για το τελευταίο παρατηρήστε ότι για $Z = 1/z$

$$dz = -z^2 d(1/z) = -\frac{1}{Z}dZ,$$

συνεπώς

$$c\frac{dz}{z-a} = -c\frac{z^2}{z-a}d(1/z) = -c\frac{1}{Z^2}\frac{Z}{1-aZ}dZ = -\frac{c}{Z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu Z^\nu.$$

Συνεπώς το θεώρημα

Αν $n \geqslant 0$, έχουμε μοναδικό πόλο στο ∞ τάξης τουλάχιστον 2 και πάλι με υπόλοιπο 0.

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{P\in X} \mathrm{Res}_P(\omega) &= \sum_{Q\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \sum_{P\in F^{-1}(Q)} \mathrm{Rep}_P(\omega) \\ &= \sum_{Q\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_Q(\mathrm{Tr}(\omega)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ολοκλήρωση της συνάρτησης ίχνους

Έστω γ ένας δρόμος στην επιφάνεια Riemann Y και ω μια μερόμορφη 1-μορφή της επιφάνειας Riemann X της οποίας οι πόλοι δεν ανήκουν στην προεικόνα των σημείων της γ. Σε αυτή την περίπτωση, το ολοκλήρωμα του ίχνους κατά μήκος της καμπύλης γ είναι καλά ορισμένο. Πώς σχετίζεται με το ολοκλήρωμα της 1-μορφής ω;

Εκτός των σημείων διακλάδωσης της F, για κάθε σημείο Q της Y έχουμε m προεικόνες του Q και η F είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Συνεπώς, σχεδόν όλα τα σημεία της γ (όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος) μπορούν να ανυψωθούν (lift) σε ακριβώς m δρόμους $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$. Οι δρόμοι αυτοί ενώνονται μαζί στα σημεία διακλάδωσης της F τα οποία βρίσκονται πάνω από όλα τα σημεία διακλάδωσης της γ.

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τις κλειστές θήκες αυτών των ανυψωμένων δρόμων και έτσι λαμβάνουμε d ανυψώσεις που θα τις συμβολίζουμε πάλι με γ_i.

Ορισμός VII.8.7. *Ως pullback του δρόμου γ της Y ορίζεται η αλυσίδα*

$$F^*\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m.$$

Επεκτείνουμε γραμμικά και έτσι μπορούμε να ορίσουμε το pullback για κάθε αλυσίδα της Y.

Πρόταση VII.8.8. *Έστω $F : X \to Y$ μια μη-σταθερή ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann. Έστω ω μια ολόμορφη 1-μορφή επί της X και γ μια αλυσίδα της Y. Τότε*

$$\int_{F^*\gamma} \omega = \int_{\mathrm{Tr}(\omega)} .$$

Απόδειξη. Τα ολοκληρώματα δεν βλέπουν τα σημεία διακλάδωσης της F και μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο δρόμος γ δεν περνά από κανένα σημείο διακλάδωσης της F. Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα αριστερά της ισότητας είναι το άθροισμα όλων των ολοκληρωμάτων της ω, με προσθετέους όλα τα ολοκληρώματα των (υπερυψωμένων) καμπυλών γ_i. Το ολοκλήρωμα στα δεξιά της ισότητας είναι ένα ολοκλήρωμα του αθροίσματος των κατάλληλων ω και επομένως είναι τα ίδια. □

VII.8.2 Ικανή συνθήκη του Θεωρήματος Abel-Jacobi

Έστω $D = \mathrm{div}(f)$ ένας διαιρέτης μη-σταθερής μερόμορφης συνάρτησης σε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann X. Έστω $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ η αντιστοιχούσα ολόμορφη απεικόνιση βαθμού d στη σφαίρα του Riemann, η οποία ορίζεται ως

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{αν } x \text{ όχι πόλος της } f \\ \infty & \text{αν } x \text{ πόλος της } f \end{cases}$$

Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μερόμορφες συναρτήσεις και ολόμορφες συναρτήσεις στη σφαίρα του Riemann μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικά επιχειρήματα για τη μελέτη μερόμορφων συναρτήσεων και παίζει έναν κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας.

Στη σφαίρα του Riemann επιλέγουμε έναν δρόμο από το ∞ στο 0, ο οποίος να μην διέρχεται από κανένα σημείο διακλάδωσης της F (εκτός ίσως από το 0 και το ∞). Η αλυσίδα pullback

$$F^*\gamma = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i$$

είναι το άθροισμα των δρόμων στους οποίους ο καθένας ενώνει έναν πόλο της f με μία ρίζα της f. Συμβολίζουμε με $q_i := \gamma_i(0)$ και $p_i = \gamma_i(1)$ έτσι ώστε ο διαιρέτης ριζών της f και $\sum q_i$ είναι ο διαιρέτης πόλων της f. Ιδιαίτερα μπορούμε να γράψουμε τον διαιρέτη D της f ως

$$D = \sum_{i=1}^{d} (p_i - q_i).$$

Αν λοιπόν αφαιρέσουμε αυτό το διάνυσμα από τον παραπάνω τύπο του $A_0(D)$, έχουμε

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{i=1}^{d} \left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_i} \omega_g \right)^t \mod \Lambda \\ &= \left(\int_{F^*\gamma} \omega_1, \ldots, \int_{F^*\gamma} \omega_g \right)^t \mod \Lambda \end{aligned}$$

Η j-στή συντεταγμένη του τελευταίου διανύσματος είναι $\int_{F^*\gamma} \omega_j$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση

$$\int_{F^*\gamma} \omega_j = \int_{\gamma} \mathrm{Tr}(\omega_j).$$

Το ω_j είναι ολόμορφο διαφορικό, άρα και το ίχνος $\mathrm{Tr}(\omega_j)$ είναι ολόμορφο στη σφαίρα του Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Αλλά το γένος $g(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = 0$ και δεν έχει ολόμορφα διαφορικά, οπότε $\mathrm{Tr}(\omega_j) = 0$. Στη συνέχεια επιλέγουμε μια βάση $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ των ολόμορφων διαφορικών της X καθώς και ένα σημείο βάσης $x \in X$.

Για κάθε i, επιλέγουμε έναν δρόμο α_i από το x στο p_i και έναν δρόμο β_i από το x στο q_i. Η συνάρτηση Abel-Jacobi και A_0 απεικονίζει τον διαιρέτη D.

$$A_0(D) = \sum_{i=1}^{d} \left(\int_{\alpha_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i} \omega_g \right)^t - \left(\int_{\beta_i} \omega_1, \dots, \int_{\beta_i} \omega_g \right)^t \mod \Lambda$$

Για κάθε i, έστω h_i ο κλειστός δρόμος $\alpha_i = \gamma_i - \beta_i$. Αφού αυτός είναι ένας κλειστός δρόμος, το διάνυσμα

$$\left(\int_{h_i} \omega_1, \dots, \int_{h_i} \omega_g \right)^t$$

είναι η περίοδος Λ για κάθε i. Αυτό ισχύει για κάθε $j = 1, 2, \dots, g$ και επομένως έχουμε

$$\left(\int_{F^*h} \omega_1, \dots, \int_{F^*h} \omega_g \right) = (0, 0, \dots, 0).$$

Αυτό σημαίνει ότι $A_0(D) = 0$ στην $\mathrm{Jac}(X)$.

VII.8.3 Η ικανή συνθήκη του Θεωρήματος Abel-Jacobi

Η απόδειξη θα χρειαστεί μερικά βοηθητικά λήμματα που αφορούν τις περιόδους. Υπενθυμίζουμε ότι για μία συμπαγή επιφάνεια Riemann γένους $g(X) = g$. Το standard πολύγωνο $\mathcal{P}$ ταυτοποίησης της X και τις $4g$ πλευρές αυτού $\{a_i, b_i, a_i', b_i'\}_{i=1}^{g}$, Επίσης, οι a_i και a_i' ταυτοποιούνται στην X σε έναν κλειστό δρόμο a_i και τα b_i και b_i' ταυτοποιούνται στην X σε έναν κλειστό δρόμο b_i. Γύρω από το πολύγωνο $\mathcal{P}$ εμφανίζονται οι πλευρές με τη σειρά a_i, b_i, a_i' (ανάποδα) και b_i' (ανάποδα). Για μια μορφή σ της X, συμβολίζουμε με

$$A_i(\sigma) = \int_{a_i} \sigma \text{ και } B_i(\sigma) = \int_{b_i} \sigma \text{ για } i = 1, 2, \dots, g$$

τις τιμές των ολοκληρωμάτων της σ κατά μήκος των κλειστών δρόμων της X. Για μια σταθερή 1-μορφή σ οι παραπάνω $2g$-αριθμοί θα λέγονται *περίοδοι* της σ.

Οι αριθμοί A_i λέγονται a-περίοδοι και οι B_i λέγονται b-περίοδοι.

Έστω λοιπόν τώρα σ είναι μια κλειστή C^∞ 1-μορφή της X. Η μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως μορφή της $\mathcal{P}$. Επιλέγουμε ένα σημείο βάσης x στο εσωτερικό της $\mathcal{P}$. Για κάθε σημείο $p \in \mathcal{P}$ ορίζουμε

$$f_\sigma(P) = \int_x^P \sigma$$

το ολοκλήρωμα το παίρνουμε σε οποιονδήποτε δρόμο από το x στο P ο οποίος ανήκει εξ ολοκλήρου μέσα στο $\mathcal{P}$. Η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη, αφού η σ είναι κλειστή και τα ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα του δρόμου, αφού το $\mathcal{P}$ είναι απλά συνεκτικό. Τέλος σημειώνουμε ότι η f_σ είναι C^∞ στην $\mathcal{P}$ και μάλιστα $df_\sigma = \sigma$ από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Ιδιαίτερα, αν σ είναι ολόμορφη, το ίδιο ισχύει και για την f_σ.

Λήμμα VII.8.9. *Έστω σ, τ κλειστές C^∞ 1-μορφές επί της X. Τότε*

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_\sigma \tau = \sum_{i=1}^{g} \left(A_i(\sigma)B_i(\tau) - A_i(\tau)B_i(\sigma)\right).$$

Εδώ

$$\partial \mathcal{P} := \sum_{i=1}^{g} (a_i + b_i - a_i' - b_i)$$

είναι η συνοριακή αλυσίδα του $\mathcal{P}$. Η ισότητα ισχύει ακόμα και αν το τ είναι μια μερόμορφη 1-μορφή επί της X, η οποία δεν έχει κανέναν πόλο κατά μήκος των καμπυλών a_i και b_i.

Απόδειξη. Για κάθε σημείο P επί της πλευράς a_i, θα συμβολίζουμε με P' το αντίστοιχο σημείο της a_i' το οποίο ταυτίζεται με το P στην X. Έστω α_P ένας δρόμος μέσα στο $\mathcal{P}$ από το P στο P'.

$$f_\sigma(P) - f_\sigma(P') = \int_x^P \sigma - \int_x^{P'} \sigma = -\int_{\alpha_P} \sigma$$

αφού τα ολοκληρώματα της σ σε κλειστούς δρόμους είναι μηδέν. Τώρα όμως στην X ο α_P είναι κλειστός δρόμος και είναι ομοτοπικός με τον δρόμο b_i. Επομένως, αφού η σ είναι κλειστή, έχουμε

$$f_\sigma(P) - f_\sigma(P') = -B_i(\sigma),$$

για κάθε $P \in a_i$. Κάνουμε το ίδιο για ένα σημείο Q που ανήκει στην b_i και έστω Q' το σημείο που είναι το αντίστοιχο του Q στην b_i'. Έστω β_Q ένας δρόμος από το Q στο Q'. Τότε

$$f_\sigma(Q) - f_\sigma(Q') = \int_x^q \sigma - \int_x^{Q} \sigma = -\int_{\beta_Q} \sigma.$$

Τώρα, αν η καμπύλη β_Q θεωρηθεί επί του X, είναι ομοτοπική με τη την a_i', η οποία είναι η $-a_i$ οπότε

$$f_\sigma(Q) - f_\sigma(Q') = A_i(\sigma),$$

για κάθε $Q \in b_i$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι αφού η τ είναι 1-μορφή της X, οι τιμές της στα a_i και a_i' είναι ίσες και το ίδιο ισχύει για τις b_i και b_i'. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathcal{P}} f_\sigma \tau &= \sum_{i=1}^{g} \left(\int_{a_i} - \int_{a_i'} + \int_{b_i} - \int_{b_i'} \right) f_\sigma \tau \\
&= \sum_{i=1}^{g} \left(\int_{P \in a_i} \left(f_\sigma(P) - f_\sigma(P')\right) \tau + \int_{Q \in b_i} \left(f_\sigma(Q) - f_\sigma(Q')\right) \tau \right) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \left(\int_{P \in a_i} -B_i(\sigma)\tau + \int_{Q \in b_i} A_i(\sigma)\tau \right) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \left(-B_i(\sigma)A_i(\tau) + A_i(\sigma)B_i(\tau)\right).
\end{aligned}$$

□

Λήμμα VII.8.10. *Υποθέτουμε ότι $\omega \neq 0$ είναι μια ολόμορφη 1-μορφή στην X. Τότε*

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{g} A_i(\omega)\overline{B_i(\omega)} \right) < 0$$

Απόδειξη. Τοπικά, γράφουμε $\omega = f(z)dz$. Επομένως $\overline{\omega} = \overline{f(z)}\,\overline{dz}$ και

$$\omega \wedge \overline{\omega} = |f|^2 dz \wedge d\bar{z} = -2i|f|^2 dx \wedge dy.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathrm{Im} \iint_X \omega \wedge \overline{\omega} < 0.$$

□

Στο λήμμα VII.8.9 θέτουμε $\sigma = \omega$ και $\tau = \overline{\omega}$ και έχουμε

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_\omega \overline{\omega} = \iint_{\mathcal{P}} d(f_\omega \overline{\omega})$$

το οποίο από το θεώρημα του Stokes είναι ίσο με

$$\iint_{\mathcal{P}} (df_\omega \wedge \overline{\omega} + f_\omega d\overline{\omega}) = \iint_{\mathcal{P}} \omega \wedge \overline{\omega}$$

αφού $df_\omega = \omega$ και $\overline{\omega} = 0$ (η ω είναι ολόμορφη).

Από $\mathrm{Im} \iint_X \omega \wedge \overline{\omega} < 0$ και το λήμμα VII.8.9 αφού

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_\omega \overline{\omega} = \iint \omega \wedge \overline{\omega},$$

έχουμε

$$\mathrm{Im} \left(\sum_{i=1}^{g} A_i(\omega)\overline{B_i(\omega)} - A_i(\overline{\omega})B_i(\omega) \right) < 0.$$

Έστω ότι το $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι το άθροισμα

$$\sum_i A_i(\omega)B_i(\overline{\omega}).$$

Αφού $A_i(\omega) = \overline{A_i(\omega)}$ και $B_i(\overline{\omega}) = \overline{B_i(\omega)}$, το παραπάνω άθροισμα γράφεται $z_0 - \bar{z}_0 = 2iy_0$, δηλαδή $\mathrm{Im}(z - \bar{z}_0) < 0 \Rightarrow y_0 < 0$.

Πόρισμα VII.8.11. *Έστω ω μια ολόμορφη 1-μορφή επί της X με $A_i(\omega) = 0$ για κάθε i. Τότε $\omega = 0$. Ανάλογα ισχύει το ίδιο όταν $B_i(\omega) = 0$ για κάθε i.*

Απόδειξη. Αν $A_i(\omega) = 0$, τότε $A_i(\overline{\omega}) = 0$ συνεπώς το άθροισμα στο λήμμα VII.8.10 είναι 0, άτοπο αφού $\omega \neq 0$. Το ίδιο και για $B_i(\omega) = 0$ για κάθε i. □

Περίοδοι μέσω πινάκων

Έστω $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ βάση των ολόμορφων διαφορικών. Θεωρούμε τους $g \times g$ πίνακες

$$A = (A_i(\omega_j)), \quad B = (B_i(\omega_j))$$

τους οποίους ονομάζουμε *πίνακες περιόδων* της X ως προς την επιλογή των στοιχείων της βάσης των ολόμορφων διαφορικών και των δρόμων $\{a_i, b_i\}$ που παράγουν το $H_1(X, \mathbb{Z})$.

Λήμμα VII.8.12. *Οι A και B είναι μη-ιδιάζοντες πίνακες.*

Απόδειξη. Χρήση του πορίσματος επαληθεύουν μια συμμετρική ιδιότητα. □

Λήμμα VII.8.13. *Ισχύουν* $A^tB = B^tA$.

Απόδειξη. Κρατάμε σταθερά τα j και k. Εφαρμόζουμε το λήμμα VII.8.9 για $\sigma = \omega_j$, $\tau = \omega_k$. Επομένως

$$\int_{\partial\mathcal{P}} f_{\omega_j}\omega_k = \iint_{\mathcal{P}} d(f_{\omega_j}\omega_k) = \iint \omega_j \wedge \omega_k + f_{\omega_j} d\omega_k = 0$$

αφού $\omega_j \wedge \omega_k = 0$ και ω_k ολόμορφη, οπότε $d\omega_k = 0$. Επομένως από το λήμμα VII.8.9 έχουμε

$$\sum_{i=1}^{g} A(\omega_i)B_i(\omega_k) = \sum_{i=1}^{g} A_i(\omega_k)B_i(\omega_j)$$

και $A^tB = B^tA$. □

Λήμμα VII.8.14. *Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη* X *και ένα πεπερασμένο σύνολο* $\{P_i\}$ *επί της* X *και αντίστοιχο σύνολο μιγαδικών* $\{r_i\}$. *Υπάρχει μερόμορφη 1-μορφή* ω *επί της* X *με πόλους τα* P_i *όχι άλλους πόλους με* $P_i(\omega) = r_i$ *για κάθε* i *αν και μόνο αν* $\sum_i r_i = 0$.

Απόδειξη. Έστω g το γένος της επιφάνειας Riemman X. Αν $g = 0$, τότε μπορούμε να γράψουμε ακριβώς τη διαφορική μορφή.

Θα υποθέσουμε ότι το γένος $g \geqslant 1$. Θεωρούμε τον διαιρέτη $D = \sum_i P_i$. Ένα linear system είναι ένα σύνολο θετικών διαιρετών ισοδύναμων προς έναν διαιρέτη. Το κανονικό linear system είναι το σύνολο θετικών διαιρετών ισοδύναμων με τον κανονικό διαιρέτη. Αν σε ένα linear system δεν υπάρχει κάποιο σημείο που να ανήκει στο στήριγμα όλων των διαιρετών, τότε αυτό λέγεται base point free. Αφού το $g \geqslant 1$, το κανονικό linear system είναι *base point free*. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε σημείο P της X το $\mathcal{L}(K-P) \neq \mathcal{L}(K)$. Πράγματι, έχουμε ότι $\mathcal{L}(P) = \mathbb{C}$ (Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο αυτό δεν μπορεί να συμβεί, διαφορετικά η ημιομάδα του Weierstrass θα ήταν οι φυσικοί) και το θεώρημα Riemann-Roch δίνει ότι

$$1 = \ell(P) = \ell(K-P) + \deg(P) + 1 - g$$

από όπου έχουμε ότι $\ell(K-P) = g-1$, οπότε ο $\mathcal{L}(K-P)$ δεν μπορεί να είναι ίσος με τον $\mathcal{L}(K)$ που έχει διάσταση g. Συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε έναν κανονικό διαιρέτη K ο οποίος να μην έχει κανένα από τα P_i στο στήριγμά του. Θεωρούμε μια μερόμορφη 1-μορφή ω_0 με $\mathrm{div}(\omega_0) = K$. Αφού $K \geqslant 0$, η ω_0 είναι ολόμορφη. Θα ψάξουμε να βρούμε f ώστε η $f\omega_0$ να είναι η ζητούμενη 1-μορφή.

Διαλέγουμε μια τοπική συντεταγμένη z_i σε κάθε σημείο P_i και γράφουμε

$$\omega_0 = (c_i + z_i g_i)dz_i,$$

όπου η $g_i(z_i)$ είναι ολόμορφη στο z_i και επιπλέον $c_i \neq 0$, διαφορετικά το P_i θα ήταν μία ρίζα του ω_0 και συνεπώς θα εμφανιζόταν στο K. Θεωρούμε τον διαιρέτη Z, ο οποίος υποστηρίζεται στα P_i και η τιμή του στα P_i είναι το πολικό κομμάτι $(r_i/c_i)z_i^{-1}$. Μια λύση στο πρόβλημά μας είναι μια καθολική μερόμορφη συνάρτηση ώστε $a_K(f) = Z$. Μια τέτοια f δεν έχει πόλους παρά μόνο στα P_i και τα σημεία στο στήριγμα του K. Σε κάθε σημείο Q του στηρίγματος του K ο πόλος δεν επιτρέπεται να είναι μεγαλύτερος από την τάξη ρίζας του ω_0. Συνεπώς η 1-μορφή $f\omega_0$ δεν έχει άλλο πόλο σε τέτοιο Q. Ο πόλος της f στο P_i είναι απλός όπως ο πόλος της $f\omega_0$ και το υπόλοιπο της $f\omega_0$ πρέπει να είναι ακριβώς r_i.

Μπορούμε να λύσουμε τώρα το Mittag-Leffler πρόβλημα και να βρούμε τη ζητούμενη συνάρτηση αν και μόνο αν η κλάση του Z είναι μηδέν στο $H^1(K)$, σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην (VII.3). Ο $H^1(K)$ είναι μονοδιάστατος, συνεπώς υπάρχει μόνο μία συνθήκη για τα Z ώστε να ισχύει το τελευταίο την οποία τη γνωρίζουμε: το άθροισμα των υπολοίπων θα πρέπει να είναι μηδέν. Συνεπώς αυτή είναι η μοναδική συνθήκη και αρκεί για την ύπαρξη της f και κατά συνέπεια του ω.

□

Λήμμα VII.8.15. *Έστω D ένας διαρέτης βαθμού μηδέν σε μια συμπαγή επιφάνεια Riemann X, για τον οποίο ισχύει $A_0(D) = 0$ στην Ιακωβιανή $\mathrm{Jac}(X)$. Υπάρχει μια μερόμορφη 1-μορφή ω της X με τις ιδιότητες:*

1. *Η ω έχει απλούς πόλους στα σημεία που η $D \neq 0$, και δεν έχει άλλους πόλους.*
2. $\mathrm{Res}_P(\omega) = D(P)$ *σε κάθε σημείο* $P \in X$.
3. *Οι περίοδοι a και της ω είναι ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.*

Απόδειξη. Αφού $\deg D = 0$, έπεται αμέσως από το λήμμα VII.8.14 ότι ισχύουν οι (1) και (2). Ας αποδείξουμε την (3). Έστω τ μια τέτοια μορφή που να ισχύουν οι (1) και (2). Παρατηρούμε ότι για οποιεσδήποτε σταθερές c_i, η μορφή

$$\omega = \tau - \sum_{i=1}^{g} c_i \omega_i$$

επαληθεύει τις δύο πρώτες συνθήκες (1) και (2). Επομένως, θα επιτρέψουμε τα c_i να «παίζουν» ώστε για μια σωστή επιλογή των c_i να επαληθεύεται και η (3).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε κανένα σημείο για το οποίο ισχύει $D(P) \neq 0$ δεν ανήκει στις καμπύλες a_i και b_i. Για κάθε $k = 1, 2, \dots, g$ ορίζουμε

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{g} \left(A_i(\omega_k) B_i(\tau) - A_i(\tau) B_i(\omega_k) \right).$$

Από το λήμμα VII.8.9 έχουμε

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{P}} f_{\omega_k} \tau = \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}_P(f_{\omega_k} \tau)$$
$$\sum_{P \in X} \mathrm{Res}_P(f_{\omega_k} \tau).$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα υπολοίπων για ολοκληρώματα μερόμορφων συναρτήσεων σε μιγαδικές περιοχές.

Αφού η f_{ω_k} είναι ολόμορφη και η τ έχει απλούς πόλους στα σημεία στα οποία ισχύει $D(P) \neq 0$, με υπόλοιπο $D(P)$, έχουμε ότι

$$\mathrm{Res}_P(f_{\omega_k} \tau) = f_{\omega_k}(P) D(P)$$

Επομένως,

$$\rho_k = \sum_P D(P) f_{\omega_k}(P) = \sum_P D(P) \int_{P_0}^{P} \omega_k,$$

όπου P_0 είναι ένα σημείο της X που το επιλέξαμε ως base point της X. Από τον ορισμό της απεικόνισης των Abel-Jacobi αυτή είναι ακριβώς η k-στη συνιστώσα της απεικόνισης Abel-Jacobi εφαρμοσμένης στον διαιρέτη D.

Εξ υποθέσεως $A_0(D) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g)^t$ είναι ένα διάνυσμα περίοδος στο Λ. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g) = \sum_{i=1}^{g} m_i (A_i(\omega_1), \dots, A_i(\omega_g)) - \sum_{i=1}^{g} n_i (B_i(\omega_1), \dots, B_i(\omega_g))$$

για κάποιους ακέραιους m_i, n_i, δηλαδή υπάρχουν n_i και m_i ώστε να ισχύει

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{g} m_i A_i(\omega_k) - \sum_{i=1}^{g} n_i B(\omega_k).$$

Όμως από τον ορισμό του ρ_k έχουμε

$$\rho_k = \sum_{\nu=1}^{g} \frac{B_\nu(\tau)}{2\pi i} A_\nu(\omega_k) - \sum_{\nu=1}^{g} \frac{A_\nu(\tau)}{2\pi i} B_\nu(\omega_k).$$

Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις καταλήγουμε στό συμπέρασμα ότι

$$\sum_{\nu=1}^{g} (B_\nu(\tau) - 2\pi i m_i) A_i(\omega_k) = \sum_{\nu=1}^{g} (A_\nu(\tau) - 2\pi i n_i) B_i(\omega_k) \text{ για κάθε } k.$$

Έστω τώρα a το διάνυσμα με i-στη συνιστώσα $A_i(\tau) - 2\pi i n_i$ και b το διάνυσμα με i-στη συνιστώσα $B_i(\tau) - 2\pi i m_i$. Η παραπάνω ισότητα μπορεί να εκφραστεί εν συντομία στη μορφή

$$A^t b = B^t a.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία των γραμμικών μετασχηματισμών

$$\mathbb{C}^g \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{2g} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}^g \tag{VII.6}$$

όπου τα α και β δίνονται μέσω πινάκων

$$\alpha = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ και } \beta = (B^t, -A^t).$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι A και B είναι μη-ιδιάζοντες. Συνεπώς οι α και β έχουν μέγιστο βαθμό g. Η ιδιότητα της συμμετρίας $A^t B = B^t A$ συνεπάγεται ότι

$$\beta \circ \alpha = (B^t - A^t) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = B^t A - A^t B = 0.$$

Λόγω των διαστάσεων έπεται ότι η ακολουθία (VII.6) είναι ακριβής, επομένως $\ker(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$. Από τα παραπάνω είδαμε ότι το διάνυσμα $\binom{a}{b}$, το οποίο έχει διάσταση $2g$ ανήκει στον πυρήνα της β, επομένως ανήκει στην εικόνα της α. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα διάνυσμα c ώστε

$$Ac = a \text{ και } Bc = b.$$

Το c είναι το διάνυσμα που χρειαζόμαστε για να το χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του ω. Αν c_j είναι η j-στή συνιστώσα του c, ορίζουμε $\omega = \tau - \sum_j c_j \omega_j$ και υπολογίζουμε τις περιόδους της ω

$$\begin{aligned} A_i(\omega) &= A_i(\tau) - \sum_j c_j A_i(\omega_j) \\ &= A_i(\tau) - (\text{ την } i - \text{στή συνιστώσα της } Ac = a) \\ &= A_i(\tau) - (A_i(\tau) - 2\pi i n_i) = 2\pi n_i \end{aligned}$$

και όμοια

$$B_i(\omega) = B_i(\tau) - (B_i(\tau) - 2\pi i m_i) = 2\pi i m_i.$$

Συνεπώς η 1-μορφή ω έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Το προηγούμενο λήμμα είναι το σημαντικότερο βήμα στη διαδικασία της απόδειξης. Έστω D ένας διαιρέτης βαθμού 0 με $A_0(D) = 0$ στην $\operatorname{Jac}(X)$ και ω μια μερόμορφη 1-μορφή για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες (1), (2) και (3) και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(P) = \exp\left(\int_{P_0}^{P} \omega \right).$$

Αφού οι περίοδοι της ω είναι ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$, έχουμε ότι τα υπόλοιπα της ω είναι ακέραιοι αριθμοί, οπότε η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη, ανεξάρτητη από τον δρόμο που επιλέξαμε από το P_0 ως το P. Επίσης, η f είναι ολόμορφη στα σημεία στα οποία η ω είναι ολόμορφη, δηλαδή σε όλα τα σημεία εκτός από το στήριγμα του διαιρέτη D.

Θα δείξουμε ότι η f είναι μερόμορφη και ότι $D = \mathrm{div}(f)$. Υποθέτουμε ότι το P ανήκει στο στήριγμα του διαιρέτη D με $D(P) =: n \neq 0$. Κοντά στο P, αν θεωρήσουμε τοπικές συντεταγμένες z με κέντρο το P μπορούμε να γράψουμε την ω ως

$$\omega = \frac{n}{z} + g(z),$$

όπου η $g(z)$ είναι ολόμορφη. Επομένως κοντά στο P το ολοκλήρωμα $\int_{P_0}^{z} \omega$ έχει τη μορφή $n \ln(z) + h(z)$, με $h(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση h. Επομένως η f έχει τη μορφή

$$f(z) = z^n e^{h(z)}$$

η οποία είναι μερόμορφη. Επίσης, $\mathrm{ord}_P(f) = n$ οπότε $\mathrm{div}(f) = D$.

VII.9 Ελλειπτικές καμπύλες

Ορισμός VII.9.1. *Ελλειπτική καμπύλη είναι κάθε αλγεβρική προβολική καμπύλη E πάνω από ένα σώμα K, γένους 1 με ένα σταθερό προκαθορισμένο σημείο O επάνω της.*

Με χρήση του Θεωρήματος Riemann-Roch είδαμε στο θεώρημα VII.7.9 ότι κάθε ελλειπτική καμπύλη στους μιγαδικούς αριθμούς ικανοποιεί μια αφινική εξίσωση της μορφής:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

αλλά και ότι τα σημεία της έχουν δομή ομάδας.

Παρατήρηση VII.9.2. *Η παραπάνω αλγεβρική καμπύλη είναι μη ιδιόμορφη αλγεβρική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{C}^2$, δηλαδή το κάθετο διάνυσμα που δίνεται από τις $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Αυτό συμβαίνει γιατί, αν η κυβική καμπύλη είχε ιδιομορφίες, τότε θα δέχοταν ρητή παραμετρικοποίηση, απλά περιστρέφοντας μια ευθεία γύρω από την ιδιομορφία, και συνεπώς γένος 0. Με βάση αυτόν τον τύπο μπορούμε να ορίσουμε ελλειπτικές καμπύλες σε οποιοδήποτε σώμα, ως τις μη ιδιόμορφες κυβικές καμπύλες της παραπάνω μορφής. Επιπλέον, αν η χαρακτηριστική του σώματος που δουλεύουμε είναι διάφορη του $2, 3$, τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται στην παρακάτω μορφή*

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

τη λεγόμενη κανονική μορφή του Weierstrass. Στο επόμενο μάλιστα κεφάλαιο θα δείξουμε ότι το θεώρημα Riemann-Roch ισχύει σε κάθε σώμα συναρτήσεων-αλγεβρική καμπύλη και όχι μόνο σε αλγεβρικές καμπύλες υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών.

Θα ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία ορίζοντας ένα πλήθος σταθερές οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στην παρακάτω μελέτη μας.

Ο μετασχηματισμός $y \longrightarrow \frac{1}{2}(y - a_1x - a_3)$ δίνει στην καμπύλη τη μορφή:

$$E : y^2 = 4x^3 + b_2x^2 + 2b_4x + b_6$$

με

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, \\ b_4 &= 2a_4 + a_1a_3, \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6. \end{aligned}$$

ορίζουμε επιπλέον τις σταθερές:

$$\begin{aligned}
&b_8 = a_1^2 a_6 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2,\\
&c_4 = b_2^2 - 24b_4,\\
&c_6 = b_2^3 + 36b_2 b_4 - 216b_6,\\
&\Delta = -b_2^2 b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2 b_4 b_6\\
&j = c_4^3/\Delta
\end{aligned}$$

και ο μετασχηματισμός:

$$(x, y) \longrightarrow ((x - 3b_2)/36, y/216),$$

οδηγεί στην εξίσωση του Weierstrass:

$$E : y^2 = x^3 - 27c_4 x - 56c_6$$

Ορισμός VII.9.3. *Η ποσότητα Δ λέγεται διακρίνουσα της E και η j απόλυτη αναλλοίωτος.*

Θεώρημα VII.9.4. *Δύο εξισώσεις του Weierstrass για την ελλειπτική καμπύλη E σχετίζονται με έναν γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής:*

$$X = u^2 X' + r$$

$$Y = u^3 Y' + s u^2 X' + t$$

όπου $u, r, s, t \in \overline{K}, u \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $\{x, y\}$ και $\{x', y'\}$, δυο σύνολα συντεταγμένων Weierstrass στην ελλειπτική καμπύλη E. Τότε τα x και x' έχουν πόλους τάξης 2 στο O, και τα y, y' έχουν πόλους τάξης 3 στο O. Συνεπώς τα $\{1, x\}$ και $\{1, x'\}$ είναι και τα δυο βάσεις του $\mathcal{L}(2O)$ και ομοίως τα $\{1, x, y\}$ και $\{1, x', y'\}$ είναι και τα δύο βάσεις του $\mathcal{L}(3O)$. Αρα υπάρχουν σταθερές $u_1, u_2, r, s_2, t \in K$ με $u_1 u_2 \neq 0$ τέτοια ώστε:

$$x = u_1 x' + r, \quad y = u_2 y' + s_2 x' + t.$$

Όμως τα $\{1, x\}$ και $\{1, x'\}$ ικανοποιούν εξισώσεις Weierstrass, συνεπώς πρέπει $u_1^3 = u_2^2$. Θέτουμε λοιπόν $u = u_2/u_1$ και $s = s_2/u_1^2$ από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Οι παραπάνω κατασκευές είναι ανεξάρτητες του σώματος. Ιδιαίτερα όμως στην περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο και που το σώμα είναι το $\mathbb{C}$ μπορούμε να έχουμε μια αναλυτική περιγραφή.

Όλες οι ελλειπτικές καμπύλες είναι τοπολογικά ισόμορφες και προκύπτουν ως χώροι πηλίκα του καθολικού καλύμματός τους, που εδώ είναι το $\mathbb{C}$, με κάποιο δικτυωτό (lattice) Λ, δηλαδή διακριτή υποομάδα του $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$-διάστασης 2.

$$E(\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$$

Αυτή η κατασκευή δίνει αυτόματα και τη μιγαδική δομή στην $E(\mathbb{C})$ και όπως θα δούμε αργότερα έχουμε ισόμορφες (στην κατηγορία των επιφανειών Riemann) ελλειπτικές καμπύλες μόνο στην περίπτωση που τα αντίστοιχα δικτυωτά είναι ομόθετα, δηλαδή αν Λ_1, Λ_2 δύο δικτυωτά του $\mathbb{C}$, τότε

$$\left(\frac{\mathbb{C}}{\Lambda_1} \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda_2}\right) \Leftrightarrow (\Lambda_1 = \alpha\Lambda_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*)\,.$$

Δηλαδή δύο δικτυωτά $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \bigoplus \mathbb{Z}\omega_2$ και $\Lambda' = \mathbb{Z}\omega_1' \bigoplus \mathbb{Z}\omega_2'$ είναι ομόθετα αν και μόνο αν οι δυο βάσεις διαφέρουν κατά μετασχηματισμό του $SL_2(\mathbb{Z})$. Αν γράψουμε τα δικτυωτά κατά τρόπο που η πρώτη τους συντεταγμένη να είναι 1, δηλαδή: $\Lambda = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}\omega$, όπου $\omega = \omega_2/\omega_1$, τότε κάθε δικτυωτό περιγράφεται από έναν μιγαδικό αριθμό με θετικό φανταστικό μέρος.

Ορισμός VII.9.5. *Το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με θετικό φανταστικό μέρος.*

Είναι γνωστό ότι το $\mathbb{H}$ μπορεί να αποκτήσει μετρική Riemann που να δίνεται από τον τύπο

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

και η ομάδα των ισομετριών είναι η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ [3, άσκηση 4 κεφ. 1]. Θεωρούμε τη διακριτή υποομάδα των ισομετριών $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, η οποία δρα στο $\mathbb{H}$ ώς εξής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

Η δράση είναι εντός του $\mathbb{H}$ λόγω της θετικής ορίζουσας του παραπάνω πίνακα.

Παρατήρηση VII.9.6. *Το πηλίκο*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$$

παραμετρίζει το σύνολο των μη αναλυτικά ισόμορφων, υπέρ το $\mathbb{C}$ ελλειπτικών καμπυλών. Πράγματι, έστω οι $\mathbb{Z}$ βάσεις, $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_1', \omega_2'\}$, τών δικυωτών Λ και Λ' αντιστοίχως. Τα δικτυωτά είναι ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός του $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ώστε:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a\omega_1' + b\omega_2'}{c\omega_1' + d\omega_2'} = \frac{a\frac{\omega_1'}{\omega_2'} + b}{c\frac{\omega_1'}{\omega_2'} + d}$$

συνεπώς το πηλίκο $z := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ που δίνει την κλάση ισοδυναμίας μετασχηματίζεται υπό την $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ακριβώς με τη δράση που ορίσαμε.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε, δεδομένης μιας ελλειπτικής καμπύλης $E/\mathbb{C}$, το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεών της, έστω $\mathbb{C}(E)$ και κατά συνέπεια να καταλήξουμε στο πολυώνυμο από το οποίο αυτή ορίζεται. Είναι σαφές ότι το σώμα $\mathbb{C}(E)$ είναι ισόμορφο με το σώμα των διπλά περιοδικών συναρτήσεων από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ ως προς το δικτυωτό Λ. Κάθε τέτοια μη σταθερή συνάρτηση πρέπει να έχει τουλάχιστον δυο πόλους ή έναν πόλο τουλάχιστον τάξης 2. Πράγματι, αν $f \in \mathbb{C}(E)$, τότε η διαφορική μορφή $f(z)dz$ γραμμένη στον τοπικό χάρτη (U_z, z) έχει άθροισμα ολοκλήρωτικων υπολοίπων 0, και συνεπώς τουλάχιστον δυο πόλους ή έναν πόλο τάξης 2. Ακολουθώντας τα βήματα του Weierstrass θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε διπλά περιοδική συνάρτηση με διπλό πόλο σε κάθε περίοδο, δείτε και [1, κεφ 7].

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

όπου τα ω διατρέχουν όλα τα στοιχεία του δικυωτού Λ, με $\mathbb{Z}$ βάση την: $\{\omega_1, \omega_2\}$. Θα δείξουμε ότι είναι Λ-περιοδική και καλώς ορισμένη συνάρτηση του z. Αρχίζουμε αποδεικνύοντας τη σύγκλιση της παραπάνω σειράς.

Ισχυρισμός: υπάρχει σταθερά $M(R)$ που εξαρτάται από την ακτίνα R τέτοια ώστε:

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} \right| \leqslant \frac{M(R)}{|\omega|^2} \quad \forall \omega : |\omega| > R$$

Πράγματι θεωρούμε όλες τις περιόδους με $|\omega| > R$ και διαλέγουμε μία με το μικρότερο μέτρο έστω, $|\omega| = R + d, d > 0$. Για $|z| \leqslant R$ και για $|\omega| \geqslant R + d$ ισχύει:

$$\left| \frac{z-\omega}{\omega} \right| = \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| \geqslant 1 - \left| \frac{z}{\omega} \right| \geqslant 1 - \frac{R}{R+d}$$

συνεπώς αρκεί για $M(R)$ να πάρουμε το $M = (1 - R/(R+d))^2$.

Θεωρούμε τον δίσκο:$|z| \leqslant R$ και εξαιρούμε τις πεπερασμένες περιόδους που περιέχονται στον δίσκο αυτό και σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό έχουμε:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \leqslant \frac{MR(2|\omega| + R)}{\omega^4} \leqslant \frac{MR(2 + R/|\omega|)}{|\omega|^3} \leqslant \frac{3MR}{|\omega|^3}$$

οπότε το άθροισμα πάνω σε όλες τις εξωτερικές περιόδους είναι αναλυτική συνάρτηση για όλα τα εσωτερικά $|z| < R$. Πράγματι οι σειρές

$$\sum_{\omega \in \Lambda \ \omega \neq 0} |\omega|^{-\alpha}$$

είναι συγκλίνουσες για $\alpha > 2$ όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς συγκρίνοντάς τες με το

$$\iint \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}.$$

Για την περιοδικότητα της $\wp$ παρατηρούμε ότι η παράγωγος γράφεται:

$$\wp(z)' = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

συνάρτηση περιοδική ως προς το δικτυωτό Λ. Αρα

$$\wp'(z+\omega) = \wp'(z) \quad \forall\, \omega \in \Lambda$$

άρα η συνάρτηση $\wp(z-\omega) - \wp(z)$ είναι σταθερή και θέτοντας την τιμή $z = -\omega/2$ βλέπουμε ότι είναι σταθερή ίση με 0, συνεπώς η $\wp$ είναι περιοδική.

Θεώρημα VII.9.7 (Το ανάπτυγμα Laurent της $\wp$ στο 0.)**.** *Έστω* $r = \min\{|\omega| : \omega \neq 0\}$ *για* $0 < |z| < r$ *έχουμε*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}$$

όπου $G_n = \sum \omega^{-n}, n \geqslant 3$ *οι σειρές του Eisenstein.*

Απόδειξη. Αφού $0 < |z| < r$, έχουμε $|z/\omega| < 1$. Συνεπώς

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-\frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right),$$

συνεπώς

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n$$

Αθροίζουμε ως προς τα $\omega \in \Lambda$ και τελικά βρίσκουμε:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{z^n}{\omega^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) G_{n+2} z^n.$$

Παρατηρούμε ότι η $\wp$ είναι άρτια συνάρτηση, συνεπώς όλοι οι συντελεστές $G_{2n+1} = 0$.

Θεώρημα VII.9.8 (Διαφορική εξίσωση της $\wp$)**.** *Ισχύει ότι:*

$$\wp^{2\prime}(z) = 4\wp^3(z) - 60 G_4 \wp(z) - 140 G_6$$

Θα καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα θεωρώντας γραμμικούς συνδιασμούς δυνάμεων των $\wp, \wp'$ που εξουδετερώνουν τον πόλο $z = 0$. Από το ανάπτυγμα της $\wp$ στο 0 έχουμε το αντίστοιχο ανάπτυγμα της παραγώγου:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 6G_4 z + 20G_6 z^3 + ...+$$

$$\wp^{2\prime}(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{24}{z^2}G_4 - 80G_6 + ...+$$

$$4\wp^3(z) = \frac{4}{z^6} + \frac{36}{z^2}G_4 + 60G_6 + ...$$

$$\wp^{2\prime}(z) - 4\wp^3(z) - \frac{60}{z^2}G_4\wp(z) = -140G_6 + ...$$

όπου η τελευταία έκφραση δεν έχει πόλους, είναι σταθερή και συνεπώς ίση με $-140G_6$. □

Η παραπάνω έκφραση είναι σημαντική γιατί παραμετρίζει την ελλειπτική καμπύλη, δηλαδή δίνει μία συνάρτηση

$$\mathcal{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

$$z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z), 1)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σώμα των ελλειπτικών συναρτήσεων είναι ισόμορφο με την παρακάτω αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{C}(X)$:

$$\mathbb{C}(E) = \mathbb{C}(\wp, \wp') \simeq \frac{\mathbb{C}(X)[Y]}{\langle Y^2 - 4X^3 + g_2 X + g_3 \rangle}$$

όπου $g_2 := 60G_4$ και $g_3 = 140G_6$. Οι ελλειπτικές καμπύλες υπέρ του $\mathbb{C}$ είναι αβελιανές ομάδες ως πηλίκα των αβελιανών ομάδων $\mathbb{C}/\Lambda$ ή λόγω Riemann-Roch όπως είδαμε στην αρχή. Οι εξισώσεις του Weierstrass $\wp, \wp'$ δίνουν μια κομψή αλγεβρική έκφραση της δομής ομάδας. Πράγματι παρατηρούμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(u+z) & -\wp'(u+z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και συνεπώς τρία σημεία έχουν άθροισμα 0 αν και μόνο αν είναι συνευθειακά. Η παρατήρηση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε δομή ομάδας σε οποιοδήποτε σώμα από τις αλγεβρικές εξισώσεις της ιδιότητας του συνευθειακού.

Παρατήρηση VII.9.9. *Οι ελλειπτικές καμπύλες είναι οι μοναδικές καμπύλες που δέχονται δομή ομάδας όπου οι πράξεις είναι ολόμορφες συναρτήσεις. Πράγματι η δομή ομάδας μας επιτρέπει να ορίσουμε ένα πουθενά μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο, το οποίο όπως είναι γνωστό [10, σελ. 133] γίνεται μόνο αν η χαρακτηριστική Euler είναι 0, δηλαδή αν το γένος είναι* 1.

Παρατήρηση VII.9.10. *Οι ελλειπτικές καμπύλες επεκτείνουν με θαυμάσιο τρόπο την έννοια του κυκλοτομικού σώματος αριθμών. Πράγματι στα κυκλοτομικά σώματα αριθμών μας ενδιαφέρει η αριθμητική των σημείων πεπερασμένης τάξης του κύκλου* S^1, *ενώ στις ελλειπτικές καμπύλες η αριθμητική των σημείων πεπερασμένης τάξης του τόρου* $S^1 \bigoplus S^1$. *Οι ομοιότητες είναι πολλές, για παράδειγμα οι* n *ρίζες της μονάδας υπολογίζονται με τις υπερβατικές συναρτήσεις* $e^{2\pi i x}$ *στο σημείο* $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$, *ομοίως τα σημεία τάξης* n *υπολογίζονται από τις τιμές στο* $\frac{1}{n}\Lambda$ *των συναρτήσεων Weierstrass* $\wp, \wp'$. *Η αναλογία αυτή είναι μεγάλης σημασίας για την απόδειξη του Θεωρήματος Fermat.*

VII.9.1 Κυβικές καμπύλες του Weierstrass

Θεώρημα VII.9.11. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Μια κυβική καμπύλη (σε οποιοδήποτε σώμα K) που δίνεται από μία εξίσωση Weierstrass ταξινομείται:*
   - *μη ιδιόμορφη, αν και μόνο αν $\Delta \neq 0$*
   - *ιδιόμορφη τύπου κόμβου (node form), αν και μόνο αν $\Delta = 0$ και $c_4 \neq 0$*
   - *ιδιόμορφη τύπου ακίδας (cusp form), αν και μόνο αν $\Delta = c_4 = 0$*
2. *Δύο ελλειπτικές καμπύλες είναι ισόμορφες στο $\overline{K}$ αν και μόνο αν έχουν την ίδια j-αναλλοίωτο.*
3. *Έστω $j_0 \in \overline{K}$, τότε υπάρχει ελλειπτική καμπύλη, ορισμένη στο (j_0), με j αναλλοίωτο j_0*

Απόδειξη. 1. Έστω ότι η δίνεται από την εξίσωση του Weierstrass

$$E : f(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6$$

Ξεκινούμε δείχνοντας ότι το σημείο στο άπειρο δεν είναι ποτέ ιδιόμορφο. Μελετούμε λοιπόν την ομογενή εξίσωση στο $\mathbb{P}^2(K)$

$$F(x, y, z) = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3$$

στο σημείο $0 = [0, 1, 0]$
$\partial F/\partial z(0, 0) = 1 \neq 0$ αρα όχι ιδιόμορφο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι E είναι ιδιόμορφη στο σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$. Ο μετασχηματισμός $x = x' + x_0, y = y' + y_0$ αφήνει το Δ και το c_4 αναλλοίωτα, άρα χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η E είναι ιδιόμορφη στο (0,0). Τότε

$$a_6 = f(0, 0) = 0, \quad a_4 = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad a_3 = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$$

και η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$E : f(x, y) = y^2 + a_1xy - x^3 - a_2x^2$$

$$c_4 = (a_1^2 + 4a_2)^2, \quad \Delta = 0$$

Τώρα, όπως είναι γνωστό, η συμπεριφορά των εφαπτομένων στο σημειο $(0, 0)$ δίνεται από την τετραγωνική μορφή:

$$y^2 + a_1xy - a_2x^2$$

και το αν θα έχουμε ή όχι δύο η μία διπλή εφαπτομένη εξαρτάται από το αν η διακρίνουσα της τετραγωνικής αυτής μορφής, δηλαδή η

$$c_4 = (a_1^2 + 4a_2)^2$$

είναι 0 η όχι. Τέλος είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\Delta = 0$, τότε η κυβική καμπύλη είναι ιδιόμορφη.

2. Είδαμε ότι οι μετασχηματισμοί που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή της εξίσωσης Weierstrass είναι οι:
$$x = u^2x' + r$$
$$y = u^3y' + u^2sx' + t$$
με $u, r, s, t \in \overline{K}, u \neq 0$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι πρόκειται για ισομορφισμούς ελλειπτικών καμπυλών, αφού μεταφέρουν ευθείες σε ευθείες και τέλος αφήνουν την j συνάρτηση αναλλοίωτη.

   Για το αντίστροφο παρατηρούμε ότι αν E, E' ελλειπτικές καμπύλες με την ίδια j συνάρτηση και με εξισώσεις
$$y^2 = x^3 + Ax + B$$
$$y'^2 = x'^3 + A'x' + B',$$
τότε
$$(4A)^3/(4A^3 + 27B^2) = (4A')^3/(4A'^3 + 27B'^2) \text{ συνεπώς } A^3B'^2 = A'^3B^2$$
Ψάχνουμε για ισομορφισμό της μορφής $(x, y) = (u^2x', u^3y')$ και θεωρούμε τρεις περιπτώσεις:

$A = 0$, δηλαδή $(j = 0)$ και $B \neq 0$ (αφού $\Delta \neq 0$) και παίρνουμε τελικά $u = (B/B')^{1/6}$

$B = 0$, δηλαδή $(j = 1728)$, τότε $\neq 0, B' = 0$ και $u = (A/A')^{1/4}$

$AB \neq 0$, δηλαδή $(j \neq 0, 1728)$, τότε $'B' \neq 0$ οπότε παίρνουμε $u = (B/B')^{1/6} = (A/A')^{1/4}$

3. Αν $j_0 \neq 0, 1728$, τότε η καμπύλη:
$$E : y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{(j_0 - 1728)}x - \frac{1}{j_0 - 1728}$$
έχει $\Delta = \frac{j_0^2}{(j_0-1728)^3}$ και $j = j_0$ ενώ για τις άλλες δυο περιπτώσεις απλά παρατηρούμε ότι οι
$E : y^2 + y = x^3$
$E : y^2 = x^3 + x$
έχουν $\Delta = -27$, $j = 0$ και $\Delta = -64$, $j = 1728$ αντίστοιχα.

Η μελέτη της j συνάρτησης απαντά στο πρόβλημα ισομορφίας ελλειπτικών καμπυλών στην αλγεβρική κλειστότητα του σώματος που δουλεύουμε. Για να απαντήσουμε στο ανάλογο πρόβλημα για σώματα μικρότερα της αλγεβρικής κλειστότητας, χρειαζόμαστε την Galois συνομολογία $^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(E))$ [12, κεφ.7], αλλά προς το παρόν θα περιοριστούμε στο να ορίσουμε την έννοια της Hasse-invariant και μάλιστα στην ειδική περίπτωση που $j_0 \neq 0, 1728$. Όπως είδαμε πιο πριν, αν δύο ελλειπτικές καμπύλες έχουν την ίδια j-αναλοίωτο, τότε:
$$\left(\frac{A}{A'}\right)^3 = \left(\frac{B}{B'}\right)^2$$
το οποίο σημαίνει ότι
$$\frac{A}{A'} = t^2 \ , \ \frac{B}{B'} = t^3$$

και ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} x &\longmapsto tx \\ y &\longmapsto t^{3/2}y \end{aligned}$$

που ορίζεται στο $(t^{1/2})$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. Δηλαδή δυο ελλειπτικές καμπύλες με την ίδια j-αναλλοίωτο γίνονται ισόμορφες σε μια τετραγωνική, το πολύ, επέκταση του σώματος ορισμού τους. Ο έλεγχος για το αν υπάρχει ισομορφία στα πλαίσια του αρχικού σώματος ελέγχεται με το αν οι Hasse συναρτήσεις των δύο ελλειπτικών καμπυλών που ορίζονται ώς:

$$\delta_E := -\frac{1}{2}A/B \bmod K^{*2}$$

είναι ίσες ή όχι. Ο παράγων $-\frac{1}{2}$ εισάγεται για ιστορικούς λόγους. Πράγματι, από τους παραπάνω τύπους έχουμε:

$$A/B = A'/tB' \Leftrightarrow -At/2B = -A'/2B'$$

συνεπώς $\delta_E = \delta_{E'}$ αν και μόνο αν $t \in K^{*2}$. □

Βιβλιογραφία

[1] Ahlfors, L. V. *Complex analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, pp. xi+331. ISBN: 0-07-000657-1.

[2] Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, pp. ix+128.

[3] Carmo, M. P. do. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992, pp. xiv+300. ISBN: 0-8176-3490-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2201-7.

[4] Churchill, R. & Brown, J. *Μιγαδικές Συναρτήσεις και εφαρμογές 2η έκδοση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1998.

[5] Farkas, H. M. & Kra, I. *Riemann surfaces*. Vol. 71. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1980, pp. xi+337. ISBN: 0-387-90465-4.

[6] Forster, O. *Lectures on Riemann surfaces*. Vol. 81. Graduate Texts in Mathematics. Translated from the German by Bruce Gilligan. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, pp. viii+254. ISBN: 0-387-90617-7.

[7] Fulton, W. *Algebraic topology*. Vol. 153. Graduate Texts in Mathematics. A first course. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xviii+430. ISBN: 0-387-94326-9; 0-387-94327-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4180-5.

[8] Griffiths, P. A. *Introduction to algebraic curves*. Vol. 76. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Chinese by Kuniko Weltin. Providence, RI: American Mathematical Society, 1989, pp. x+221. ISBN: 0-8218-4530-6.

[9] Hatcher, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002, pp. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[10] Hirsch, M. W. *Differential topology*. Vol. 33. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1976 original. Springer-Verlag, New York, 1994, pp. x+222. ISBN: 0-387-90148-5.

[11] Hungerford, T. W. *Algebra*. Rinehart and Winston, Inc., New York: Holt, 1974, pp. xix+502.

[12] Husemöller, D. *Elliptic curves*. Second. Vol. 111. Graduate Texts in Mathematics. With appendices by Otto Forster, Ruth Lawrence and Stefan Theisen. Springer-Verlag, New York, 2004, pp. xxii+487. ISBN: 0-387-95490-2.

[13] Malle, G. & Matzat, B. H. *Inverse Galois theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. xvi+436. ISBN: 3-540-62890-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-12123-8.

[14] Miranda, R. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Vol. 5. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995, pp. xxii+390. ISBN: 0-8218-0268-2. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/005.

[15] Silverman, J. H. *The arithmetic of elliptic curves*. Second. Vol. 106. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009, pp. xx+513. ISBN: 978-0-387-09493-9. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-09494-6.

[16] Völklein, H. *Groups as Galois groups*. Vol. 53. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. An introduction. Cambridge University Press, 1996, pp. xviii+248. ISBN: 0-521-56280-5. URL: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511471117.

[17] Καρανικολόπουλος, Σ. *Uniformization Αλγεβρικών Καμπυλών*. MA thesis. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2005.

VIII

Αλγεβρικά σώματα συναρτήσεων

VIII.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Ορισμός VIII.1.1. *Ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων F/K (μίας μεταβλητής) είναι μια επέκταση F/K του αρχικού σώματος K, ώστε το F να είναι μια αλγεβρική επέκταση του ρητού σώματος $K(x)$, όπου το x είναι ένα υπερβατικό στοιχείο υπεράνω του K.*

Σε ένα σώμα συναρτήσεων F/K θεωρούμε το σύνολο

$$\widetilde{K} = \{z \in F : z \text{ είναι αλγεβρικό πάνω από το } K\}.$$

Το $\widetilde{K}$ είναι σώμα το οποίο θα το λέμε το σώμα των σταθερών του F/K και ισχύει $K \subset \widetilde{K} \subsetneq F$. Θα λέμε ότι το K είναι αλγεβρικά κλειστό στο F ή K είναι το πλήρες σώμα των σταθερών του F αν και μόνο αν $\widetilde{K} = K$.

Παράδειγμα VIII.1.2. *Το σώμα $F = K(x)$, για κάποιο $x \in F$ υπερβατικό υπεράνω του F είναι το απλούστερο παράδειγμα αλγεβρικού σώματος συναρτήσεων. Το τυχαίο στοιχείο του σώματος $F(x)$ είναι της μορφής*

$$a \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i(x)^{n_i},$$

όπου $a \in K$, τα πολυώνυμα $p_i(x)$ είναι μονικά, ανάγωγα, ανά δύο διαφορετικά και $n_i \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός VIII.1.3. *Ένας δακτύλιος εκτίμησης του σώματος συναρτήσεων F/K είναι ένας δακτύλιος $\mathcal{O} \subset F$ ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. $K \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq F$
2. *Για κάθε $z \in F$ έχουμε ότι $z \in \mathcal{O}$ ή $z^{-1} \in \mathcal{O}$.*

Παράδειγμα VIII.1.4. *Στο ρητό σώμα συναρτήσεων $K(x)$ και για $p(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο, μπορούμε να θεωρήσουμε τον δακτύλιο εκτίμησης*

$$\mathcal{O}_{p(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in K[X], p(x) \nmid g(x) \right\}.$$

Πρόταση VIII.1.5. *Έστω ο $\mathcal{O}$ είναι δακτύλιος εκτίμησης του σώματος συναρτήσεων F/K. Τότε ισχύουν:*

1. *Ο $\mathcal{O}$ είναι τοπικός δακτύλιος, δηλαδή έχει ένα μοναδικό μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \backslash E(\mathcal{O})$, όπου $E(\mathcal{O})$ είναι η ομάδα των μονάδων του δακτυλίου $\mathcal{O}$.*
2. *Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in F$ έχουμε $x \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow x^{-1} \notin \mathcal{O}$.*
3. *Για το σώμα των σταθερών $\widetilde{K}$ έχουμε $\widetilde{K} \subset \mathcal{O}$ και $\widetilde{K} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$.*

Απόδειξη. 1. Παρατηρούμε ότι το $\mathfrak{m}$ είναι ιδεώδες. Πράγματι αν $x \in \mathfrak{m}$, τότε το $x^{-1} \notin \mathcal{O}$. Έστω $r \in \mathcal{O}$. Τότε το $xr \notin E(\mathcal{O})$, διαφορετικά $(xr)^{-1} \in \mathcal{O}$, $r \in \mathcal{O}$ και το γινόμενό τους $x^{-1} \in \mathcal{O}$, άτοπο.

Επίσης αν $x, y \in \mathfrak{m}$, τότε $x/y \in \mathcal{O}$ ή $y/x \in \mathcal{O}$, έστω $x/y \in \mathcal{O}$. Τότε

$$x + y = y(1 + x/y) \in \mathfrak{m},$$

αφού $y \in \mathfrak{m}$ και $1 + x/y \in \mathcal{O}$.

Αφού δείξαμε ότι το $\mathfrak{m}$ είναι ιδεώδες είναι σαφές ότι είναι μέγιστο, αφού όποιο ιδεώδες περιέχει το $\mathfrak{m}$, περιέχει μια μονάδα και ταυτίζεται με τον $\mathcal{O}$.

2. Σαφές από τον ορισμό

3. Έστω $r \in \widetilde{K}$. Υποθέτουμε ότι $r \notin \mathcal{O}$. Συνεπώς από την ιδιότητα του δακτυλίου εκτίμησης $r^{-1} \in \mathcal{O}$. Αφού είναι αλγεβρικό πάνω από το K, υπάρχουν στοιχεία $a_1, \dots, a_m \in K$ με

$$a_m(r^{-1})^m + \cdots + a_1(r^{-1}) + 1 = 0,$$

συνεπώς

$$r^{-1}(a_m(r^{-1})^{m-1} + \cdots + a_1) = -1.$$

Καταλήγουμε στο ότι

$$r = -(a_m(r^{-1})^{m-1} + \cdots + a_1) \in K[r^{-1}] \subset \mathcal{O},$$

συνεπώς $r \in \mathcal{O}$, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $r \notin \mathcal{O}$. Συνεπώς $\widetilde{K} \subset \mathcal{O}$. Η υπόθεση $\widetilde{K} \cap \mathfrak{m} = 0$ είναι σαφής, αφού κάθε μη μηδενικό στοιχείο σε σώμα είναι αντιστρέψιμο.

□

Θεώρημα VIII.1.6. *Έστω $\mathcal{O}$ ένας δακτύλιος εκτίμησης του σώματος συναρτήσεων F/K και έστω $\mathfrak{m}$ το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Το $\mathfrak{m}$ είναι κύριο.*

2. *Αν $\mathfrak{m} = t\mathcal{O}$, τότε κάθε μη μηδενικό $r \in F$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $r = t^n u$ για $n \in \mathbb{Z}$ και $u \in E(\mathcal{O})$.*

3. *Το $\mathcal{O}$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών. Κάθε ιδεώδες του $\mathcal{O}$ είναι της μορφής $t^n\mathcal{O}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.*

Ορισμός VIII.1.7. *Ένας δακτύλιος που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται διακριτός δακτύλιος εκτίμησης (discrete valued ring, DVR).*

Λήμμα VIII.1.8. *Θεωρούμε έναν δακτύλιο εκτίμησης $\mathcal{O}$ του σώματος συναρτήσεων F/K, και έστω $\mathfrak{m}$ το μέγιστο ιδεώδες του. Θεωρούμε το μη μηδενικό στοιχείο $x \in \mathfrak{m}$. Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$ ώστε $x_1 = x$ και $x_i \in x_{i+1}\mathfrak{m}$ για $1, \dots, n-1$. Τότε έχουμε*

$$n \leqslant [F : K(x)] \leqslant \infty.$$

Απόδειξη. Η επέκταση $F/K(x)$ είναι πεπερασμένη, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπεράνω του σώματος $K(x)$. Έστω ότι υπάρχει κάποιος μη-τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)x_i = 0$ με $\lambda_i(x) \in K(x)$. Μετά από πολλαπλασιασμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $\lambda_i(x) \in K[x]$ και ότι το x δεν τα διαιρεί όλα. Θα συμβολίζουμε με

$a_i = \lambda_i(0)$ τον σταθερό όρο των $\lambda_i(x)$. Ορίζουμε $j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $a_j \neq 0$ και $a_i = 0$ για όλα τα $i > j$. Γράφουμε

$$-\lambda_j(x)x_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i(x)x_i.$$

Έχουμε ότι $\lambda_i(x) \in \mathcal{O}$, αφού $x = x_1 \in \mathfrak{m}$. Διαιρώντας με x_j, έχουμε

$$-\lambda_j(x) = \sum_{i<j} \lambda_i(x)\frac{x_i}{x_j} + \sum_{i>j} \frac{x}{x_j}\mu_i(x)x_i.$$

Το δεξί μέρος ανήκει στο $\mathfrak{m}$. Πράγματι εξ υποθέσεως $x_i \in x_j\mathfrak{m}$ για $i < j$. Ενώ $\lambda_i(x) = x\mu_i(x)$ για $i > j$. Συνεπώς $\lambda_j(x) \in \mathfrak{m}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι $a_j = \lambda_j(x) - x\mu_j(x) \in \mathfrak{m} \cap K$. Αφού $a_j \neq 0$ καταλήξαμε σε αντίφαση. □

Απόδειξη. (του θεωρήματος VIII.1.6)

1. Αν το ιδεώδες $\mathfrak{m}$ δεν είναι κύριο, διαλέγουμε ένα στοιχείο $0 \neq x_1 \in \mathfrak{m}$. Αφού $\mathfrak{m} \neq x_1\mathcal{O}$, υπάρχει ένα $x_2 \in \mathfrak{m} \backslash x_1\mathcal{O}$. Συνεπώς, $x_2x_1^{-1} \notin \mathcal{O}$ και καταλήγουμε στο ότι $x_2^{-1}x_1 \in \mathfrak{m}$ ή ισοδύναμα $x_1 \in x_2\mathfrak{m}$. Με επαγωγή μπορεί κανείς να κατασκευάσει μια άπειρη ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ στο $\mathfrak{m}$, με $x_i \in x_{i+1}\mathfrak{m}$, το οποίο είναι σε αντίθεση με το λήμμα VIII.1.8.

2. Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάθε στοιχείο $z \in \mathcal{O}$ γράφεται στη μορφή $z = t^n u$, όπου u είναι μονάδα του $\mathcal{O}$. Αν το z είναι μονάδα, τότε $z = u$ και $n = 0$. Έστω ότι $z \in \mathfrak{m}$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μέγιστο $m \geqslant 1$ ώστε $z \in t^m\mathcal{O}$, αφού η ακολουθία

$$x_1 = z, x_2 = t^{m-1}, x_3 = t^{m-3}, \ldots, x_m = t$$

είναι φραγμένη από το προηγούμενο λήμμα. Γράφουμε $z = t^m u$, με $u \in \mathcal{O}$. Το u είναι μονάδα γιατί αν όχι, θα ήταν στοιχείο του $\mathfrak{m}$ και συνεπώς διαιρετό με t, οπότε ο συνολικός εκθέτης του t θα ήταν μεγαλύτερος από το m. Είναι σαφές ότι η γραφή του z ως $t^m u$ είναι μοναδική.

3. Έστω $\{0\} \neq I \lhd \mathcal{O}$ ένα ιδεώδες του $\mathcal{O}$. Το σύνολο $S = \{\kappa \in \mathbb{N} : t^\kappa \in I\}$ είναι μη κενό, αφού αν $x \in I$, τότε $x = t^m u \in I$ και συνεπώς $t^m \in I$. Θεωρούμε το μικρότερο φυσικό n που ανήκει στο S. Είναι σαφές ότι $t^n\mathcal{O} \in I$. Από την άλλη, αν $y = t^s u \in I$, τότε $s \in S$, συνεπώς $t^n \mid y$ και $y \in t^n\mathcal{O}$.

□

Ορισμός VIII.1.9. *Μία θέση P του σώματος συναρτήσεων F/K είναι ένα μέγιστο ιδεώδες κάποιου δακτύλιου εκτίμησης $\mathcal{O}$ του F/K. Κάθε στοιχείο $t \in P$ ώστε $P = t\mathcal{O}$ λέγεται τοπική παράμετρος για το P ή πρώτο στοιχείο.*

Ορισμός VIII.1.10. *Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_F$ το σύνολο των θέσεων του σώματος συναρτήσεων F/K.*

Παρατήρηση VIII.1.11. *Η γνώση μιας θέσης P καθορίζει πλήρως τον δακτύλιο εκτίμησης*

$$\mathcal{O} = \{z \in F : z^{-1} \notin P\}.$$

Θα ονομάζουμε με $\mathcal{O}_P$ τον δακτύλιο εκτίμησης της θέσης P.

Κάθε δακτύλιος εκτίμησης ορίζει μια διακριτή εκτίμηση στο F/K.

Ορισμός VIII.1.12. *Μια διακριτή εκτίμηση του F/K είναι μία συνάρτηση $\nu : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ η οποία ικανοποιεί:*

1. *$\nu(x) = \infty$ αν και μόνο αν $x = 0$*

2. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ *για κάθε* $x, y \in F$

3. $\nu(x+y) \geqslant \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ *για κάθε* $x, y \in F$

4. *Υπάρχει στοιχείο* $z \in F$ *με* $\nu(z) = 1$

5. $\nu(a) = 0$ *για κάθε* $0 \neq a \in K$.

Το σύμβολο ∞ μπορεί να οριστεί τυπικά ως κάποιο στοιχείο εκτός $\mathbb{Z}$ το οποίο να ικανοποιεί τις ιδιότητες $\infty + \infty = \infty + n = n + \infty = \infty$ και $\infty > m$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.

Για $F \ni z \neq 0$ αν $z \in \mathcal{O}$ γράφουμε $z = t^n u$ και θέτουμε $\nu(z) = n \in \mathbb{N}$. Αν $z \notin \mathcal{O}$, τότε $z^{-1} \in \mathcal{O}$, οπότε θέτουμε $\nu(z) = -\nu(z^{-1}) < 0$.

Παρατήρηση VIII.1.13. *Από κάθε διακριτή εκτίμηση* ν *μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική. Σταθεροποιούμε έναν πραγματικό αριθμό* $0 < c < 1$ *και ορίζουμε την*

$$|\cdot|_\nu : F \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \begin{cases} c^{\nu(z)} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

Θεώρημα VIII.1.14. *Για ένα σώμα συναρτήσεων* F/K *και* ν_P *τη διακριτή εκτίμηση που αντιστοιχεί στο* P *έχουμε*

1.
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P &= \{z \in F : \nu_P(z) \geqslant 0\} \\ E(\mathcal{O}_P) &= \{z \in F : \nu_P(z) = 0\} \\ P &= \{z \in F : \nu_P(z) > 0\} \end{aligned}$$

2. *Ένα στοιχείο είναι τοπική παράμετρος στο* P *αν και μόνο αν* $\nu_P(x) = 1$.

3. *Κάθε δακτύλιος εκτίμησης είναι ένας μέγιστος υποδακτύλιος του* F.

Απόδειξη. Επαλήθευση με βάση τους ορισμούς. □

Ορισμός VIII.1.15. 1. *Για μία θέση* P *και ένα στοιχείο* $z \in F$, *αν* $\nu_P(z) \geqslant 0$ *ορίζουμε*

$$z(P) = z \mod P$$

την τιμή του P *μέσω της* z. *Αυτή είναι ένα στοιχείο του σώματος* $F_P := \mathcal{O}_{\mathcal{P}}/P$, *το οποίο θα το ονομάζουμε το σώμα υπολοίπων της θέσης* P.

2. *Αν* $\nu_P(z) < 0$, *θα λέμε ότι το* z *έχει πόλο στη θέση* P, *θα γράφουμε* $z(P) = \infty$, *ενώ την τιμή* $|\nu_P(z)| \in \mathbb{N}$ *θα τη λέμε τάξη του πόλου.*

3. *Αν* $\nu_P(z) > 0$, *θα λέμε ότι το* z *έχει ρίζα στη θέση* P *και την τιμή* $\nu_P(z)$ *θα την ονομάζουμε τάξη της ρίζας.*

4. *Θα ονομάζουμε βαθμό της θέσης* P *την τιμή*

$$\deg(P) := [F_P : K].$$

Θέσεις βαθμού 1 *θα ονομάζονται ρητές.*

Λήμμα VIII.1.16. *Ισχύει ότι* $\deg P < \infty$

Απόδειξη. Έστω $0 \neq x \in P$. Θα αποδείξουμε ότι $\deg P \leqslant [F : K(x)] < \infty$. Είναι σαφές ότι ισχύει $[F : K(x)] < \infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συλλογή στοιχείων $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{O}_P$ των οποίων οι κλάσεις $z_1(P), \dots, z_n(P) \in F_P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες υπεράνω του σώματος K είναι γραμμικά ανεξάρτητη υπεράνω του σώματος $K(x)$.

Πράγματι, έστω ένας γραμμικός συνδυασμός

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) z_i = 0 \tag{VIII.1}$$

με $\lambda_i(x) \in K(x)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα $\lambda_i(x) \in K[x]$ και ότι δεν είναι όλα διαιρετά με x. Δηλαδή $\lambda_i(x) = a_i + x g_i(x)$, με $a_i \in K, g_i(x) \in K[x]$, όπου δεν είναι όλα τα $a_i = 0$. Αφού το $x \in P$, έχουμε ότι $\lambda_i(P) = a_i$. Συνεπώς η εξίσωση (VIII.1) αν εφαρμόσουμε τη θέση P γράφεται

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)(P) z_i(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i(P),$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι τα $z_1(P), \dots, z_n(P)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του K. □

VIII.1.1 Divisors

Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι το K είναι αλγεβρικά κλειστό στο F/K, δηλαδή ότι το K είναι το πλήρες σώμα σταθερών του F.

VIII.1.2 Ανεξαρτησία εκτιμήσεων

Το θεώρημα αυτό αναφέρει ότι αν έχουμε $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ είναι ανά δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους εκτιμήσεις του F/K και γνωρίζουμε τις τιμές $\nu_1(z), \dots, \nu_{n-1}(z)$ για κάποιο στοιχείο $z \in F$, τότε δεν γνωρίζουμε τίποτε για την εκτίμηση του $\nu_n(z)$.

Θεώρημα VIII.1.17 (Ασθενές θεώρημα προσέγγισης). *Έστω F/K ένα σώμα συναρτήσεων και $P_1, \dots, P_n$ ανά δύο διαφορετικές θέσεις του F/K, $x_1, \dots, x_n \in F$ και $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο $x \in F$ ώστε*

$$\nu_{P_i}(x - x_i) = r_i, \ \text{για } 1, \dots, n.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1 Υπάρχει κάποιο $u \in F$ με $\nu_1(u) > 0$ και $\nu_i(u) < 0$ για όλα τα $i = 2, \dots, n$. Ο ισχυρισμός θα αποδειχθεί με επαγωγή. Για $n = 2$ παρατηρούμε ότι $\mathcal{O}_{P_1} \not\subset \mathcal{O}_{P_2}$ και αντιστρόφως, αφού οι δακτύλιοι εκτίμησης είναι μέγιστοι γνήσιοι υποδακτύλιοι του F. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε $y_1 \in \mathcal{O}_{P_1} \backslash \mathcal{O}_{P_2}$ και $y_2 \in \mathcal{O}_{P_2} \backslash \mathcal{O}_{P_1}$. Είναι σαφές ότι $\nu_1(y_1) \geqslant 0$, $\nu_2(y_1) < 0$, $\nu_1(y_2) < 0$ και $\nu_2(y_2) \geqslant 0$. Το στοιχείο $u := y_1/y_2$ έχει την ιδιότητα $\nu_1(u) > 0$ και $\nu_2(u) < 0$.

Αν τώρα $n > 2$, τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ένα στοιχείο y με $\nu_1(y) > 0$, $\nu_2(y) < 0, \dots, \nu_{n-1}(y) < 0$. Αν $\nu_n(y) < 0$, τότε έχουμε τελειώσει. Αν από την άλλη πλευρά, $\nu_n(y) \geqslant 0$ διαλέγουμε z με $\nu_1(z) > 0$, $\nu_n(z) < 0$ και θέτουμε $u := y + z^r$, όπου το $r \geqslant 1$ είναι τέτοιο ώστε $r\nu_i(z) \neq \nu_i(y)$ για $i = 1, \dots, n-1$. Έχουμε $\nu_1(u) \geqslant \min\{\nu_1(y), r\nu_1(z)\} > 0$ και $\nu_i(u) = \min\{\nu_i(y), r\nu_i(z)\} < 0$ για $i = 2, \dots, n$.

Βήμα 2 Υπάρχει $w \in F$ ώστε $\nu_1(w-1) > r_1$ και $\nu_i(w) > r_i$ για $i = 2, \dots, n$. Για να το αποδείξουμε, διαλέγουμε ένα u όπως στο πρώτο βήμα και θέτουμε $w = (1 + u^s)^{-1}$. Για αρκετά μεγάλο $s \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\nu_1(w - 1) = \nu_1(-u^s(1 + u^s)^{-1}) = s\nu_1(u) > r_1$$

και

$$\nu_i(w) = -\nu_i(1 + u^s) = -s\nu_i(u) > r_i$$

για $i = 2, \dots, n$.
Βήμα 3 Δίνονται $y_1, \dots, y_n \in F$, υπάρχει ένα στοιχείο $z \in F$ με $\nu_i(z - y_i) > r_i$ για $i = 1, \dots, n$. Για να αποδείξουμε το τρίτο βήμα, διαλέγουμε ένα $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $\nu_i(\nu_j) \geqslant s$ για όλα τα $i, j \in \{1, \dots n\}$. Από το δεύτερο βήμα υπάρχουν $w_1, \dots, w_n$ με

$$\nu_i(w_i - 1) > r_i - s \text{ και } \nu_i(w_j) > r_i - s \text{ για } j \neq i.$$

Τότε το $z = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
Βήμα 4 Από το τρίτο βήμα υπάρχει ένα $z \in F$ με $\nu_i(z - x_i) > r_i$, $i = 1, \dots, n$. Διαλέγουμε z_i με $\nu_i(z_i) = r_i$. Από το τρίτο βήμα υπάρχει z' με $\nu_i(z' - z_i) > r_i$ για $i = 1, \dots, n$. Συνεπώς

$$\nu_i(z') = \nu_i((z' - z_i) + z) = \min\{\nu_i(z' - z_i), \nu_i(z')\} = r_i.$$

Θέτουμε $x = z + z'$ και έχουμε

$$\nu_i(x - x_i) = \nu_i((z - x_i) + z') = \min\{\nu_i(z - x_i), \nu_i(z')\} = r_i.$$

□

Ορισμός VIII.1.18. *Η ομάδα των divisors D_F είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα (την οποία θα συμβολίζουμε σε προσθετική γραφή) που παράγεται από τις θέσεις του F/K. Τα στοιχεία της θα είναι πεπερασμένα αθροίσματα*

$$D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P, \text{ με } n_P \in \mathbb{Z}, n_P = 0 \text{ για όλες εκτός από πεπερασμένες θέσεις.}$$

Divisors της μορφής $D = P$, όπου P θέση θα ονομάζονται πρώτοι divisors. Προσθέτουμε divisors κατά συντεταγμένες, δηλαδή

$$\left(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} a_P P\right) + \left(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} a'_P P\right) = \left(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} (a_P + a'_P) P\right)$$

Θα συμβολίζουμε με $\deg(D)$ τον ακέραιο αριθμό:

$$\deg(D) = \deg\left(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} a_P P\right) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} a_P \deg(P).$$

Η συνάρτηση $\deg : D_F \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Για μία θέση P και για έναν divisor D θα γράφουμε $\nu_P(D) = a_P$ τον συντελεστή του D στη θέση P.

Θα γράφουμε $D < D'$ αν και μόνο αν $\nu_P(D) \leqslant \nu_P(D')$ για κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_F$.

Πρόταση VIII.1.19. *Έστω F/K ένα σώμα συναρτήσεων και $P_1, \dots, P_r$ ρίζες του στοιχείου $x \in F$. Έχουμε ότι*

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_{P_i}(x) \deg P_i \leqslant [F : K(x)].$$

Απόδειξη. Για κάθε στοιχείο P_i υπάρχει μια τοπική παράμετρος t_i ώστε $\nu_j(t_i) = \delta_{ij}$. Επιλέγουμε $s_{i1}, \cdots, s_{if_i} \in \mathcal{O}_{P_i}$ ώστε τα $s_{i1}(P_i), \dots, s_{if_i}(P_i)$ να αποτελούν βάση του σώματος υπολοίπων F_{P_i} υπεράνω του του K. Από το ασθενές θεώρημα προσέγγισης, θεώρημα VIII.1.17, μπορούμε να βρούμε στοιχεία $z_{ij} \in F$ ώστε

$$\nu_{P_i}(s_{ij} - z_{ij}) > 0 \text{ και } \nu_k(z_{ij}) \geqslant \nu_i(x) \text{ για } k \neq i.$$

Αν δεχτούμε ότι τα στοιχεία

$$t_i^a z_{ij}, \text{ για } 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant f_i, 0 \leqslant a < \nu_i(x)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπεράνω του $K(x)$ και το πλήθος τους είναι ίσο με

$$\sum_{i=1}^{r} f_i e_i = \sum_{i=1}^{r} \nu_i(x) \deg P_i,$$

τότε το ζητούμενο έπεται. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f_i}\sum_{a=0}^{\nu_i(x)-1} \lambda_{ija}(x) t_i^a z_{ij} = 0.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_{ija}(x) \in K[x]$ και ότι δεν διαιρούνται όλα με 0. Τότε υπάρχουν δείκτες $\kappa \in \{1, \ldots, r\}$ και $c \in \{0, \ldots, \nu_k(x) - 1\}$ ώστε

$$x \mid \lambda_{\kappa j a}(x) \text{ για κάθε } a < c \text{ για όλα ταj} \in \{1, \ldots, f_k\}$$
$$x \nmid \lambda_{\kappa j c} j \in \{1, \ldots, f_k\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με t_k^{-c} και έχουμε

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f_i}\sum_{a=0}^{\nu_i(x)-1} \lambda_{ija}(x) t_i^a t_k^{-c} z_{ij} = 0.$$

Για $i \neq \kappa$ όλοι οι προσθετέοι είναι στοιχεία του P_k, αφού

$$\nu_\kappa\left(\lambda_{ija}(t)) t_i^a t_k^{-c} z_{ij}\right) = \nu_\kappa(\lambda_{ija}(x)) + a\nu_\kappa(t_k) + \nu_\kappa(z_{ij}) \geqslant \nu_\kappa(x) > 0.$$

Για $i = \kappa$ και $a < c$ έχουμε

$$\nu_\kappa(\lambda_{\kappa j a} t_\kappa^{a-c} z_{\kappa j}) \geqslant \nu_\kappa(x) + a - c \geqslant \nu_\kappa - c > 0.$$

Για $i = \kappa$ και $a > c$ έχουμε

$$\nu_\kappa(\lambda_{\kappa j z} t_\kappa^{a-c} z_{\kappa j}) \geqslant a - c > 0.$$

Από όλες τις παραπάνω ανισότητες έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{f_\kappa} \lambda_{\kappa j c}(x) z_{\kappa j} \in P_\kappa.$$

Έχουμε ότι $\lambda_{\kappa j c}(x)(P_\kappa) \in K$ και δεν μηδενίζονται όλα τα $\lambda_{\kappa j c}(x)(P_\kappa)$, οπότε καταλήγουμε σε έναν μη-τετριμμένο γραμμικό συνδυασμό

$$\sum_{j=1}^{f_\kappa} \lambda_{\kappa j c}(x)(P_\kappa) z_{\kappa j}(P_k) = 0$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι τα $z_{\kappa 1}(P_\kappa), \ldots, z_{\kappa f_\kappa}(P_\kappa)$ σχηματίζουν μία βάση του F_{P_κ}/K. □

Πόρισμα VIII.1.20. *Σε ένα σώμα συναρτήσεων F/K, κάθε μη-μηδενικό στοιχείο έχει πεπερασμένους πόλους και ρίζες.*

Απόδειξη. Αν x είναι σταθερά, δεν έχει ούτε πόλους ούτε ρίζες. Αν x είναι υπερβατικό, τότε το πλήθος των ριζών είναι $\leqslant [F : K(x)]$. Με το ίδιο επιχείρημα, θεωρώντας την x^{-1}, έχουμε ότι το πλήθος των πόλων είναι και αυτό πεπερασμένο. $\square$

Ορισμός VIII.1.21. *Για ένα μη-μηδενικό στοιχείο $x \in F$ θέτουμε*

$$(x)_0 = \sum_{\substack{P\mathbb{P}_F \\ \nu_P(x)>0}} \nu_P(x)P, \text{ ο divisor ριζών του } x,$$

$$(x)_\infty = -\sum_{\substack{P\mathbb{P}_F \\ \nu_P(x)<0}} \nu_P(x)P, \text{ ο divisor πόλων του } x,$$

$$(x) = (x)_0 - (x)_\infty, \text{ ο κύριος divisor του } x$$

Έχουμε την ομάδα divisors D_F. Αυτή έχει το σύνολο των κύριων divisors H_F ως υποομάδα.

Ορισμός VIII.1.22. *Θα ονομάζουμε την ομάδα πηλίκο $\mathcal{C}_F = D_F/H_F$ ομάδα κλάσεων των divisors.*

Για κάθε $A \in D_F$ ορίζουμε

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in F : (x) \geqslant -A\} \cup \{0\}.$$

Αν

$$A = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i - \sum_{j=1}^{s} m_j Q_j$$

με $n_i > 0$, $m_j > 0$, τότε το $\mathcal{L}(A)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία $x \in F$ τέτοια ώστε

1. Το x έχει ρίζες τάξης $\geqslant m_j$ στα Q_j, για $j = 1, 2, \ldots, s$

2. Το x μπορεί να έχει πόλους το πολύ στα $P_1, P_2, \ldots, P_r$ και μάλιστα η τάξη του πόλου στο P_i είναι φραγμένη από τα n_i.

Παρατήρηση VIII.1.23. *Έστω $A \in D_F$*

1. *$x \in \mathcal{L}(A)$ αν και μόνο αν $\nu_P(x) \geqslant -\nu_P(A)$ για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$.*

2. *$\mathcal{L}(A) \neq \{0\}$ αν και μόνο αν υπάρχει divisor $A' \sim A$, ώστε $A' \geqslant 0$.*

Το πρώτο είναι άμεση συνέπεια του ορισμού. Το δεύτερο προκύπτει από το $A' = (x) + A \geqslant 0$.

Λήμμα VIII.1.24. *Αν $A \in D_F$, τότε*

1. *$\mathcal{L}(A)$ είναι K-διανυσματικός χώρος.*

2. *Αν $A' \in D_F$, $A' \sim A$, τότε $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(A')$ ως K-διανυσματικοί χώροι.*

Απόδειξη. 1. Αν $x, y \in \mathcal{L}(A)$ και $a \in K$. Για κάθε $P \in \mathbf{P}_F$, έχουμε

$$\nu_P(x+y) \geqslant \min\{\nu_P(x), \nu_P(y)\} \geqslant -\nu_P(A)$$

και

$$\nu_P(ax) = \nu_P(a) + \nu_P(x) \geqslant -\nu_P(A),$$

συνεπώς $x + y \in \mathcal{L}(A)$ και $ax \in \mathcal{L}(A)$.

2. Αν $A \sim A'$, τότε υπάρχει $z \in F\backslash\{0\}$ τέτοιο ώστε $A = A' + (z)$, $F \ni z \neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(A) &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow xz \end{aligned}$$

Η ϕ είναι K-γραμμική και $\mathrm{Im}\phi \subset \mathcal{L}(A')$, διότι αφού $x \in \mathcal{L}(A)$ ισχύει $(x) + A \geqslant 0$ οπότε $(xz) + A' = (x) + (z) + A' = (x) + A \geqslant 0$. Ομοίως ορίζεται η

$$\begin{aligned} \phi' : \mathcal{L}(A') &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto xz^{-1} \end{aligned}$$

μια K-γραμμική συνάρτηση $\mathcal{L}(A') \to \mathcal{L}(A)$. Οι δύο απεικονίσεις είναι η μία αντίστροφη της άλλης, συνεπώς $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(A')$.

□

Λήμμα VIII.1.25. *1.* $\mathcal{L}(0) = K$

2. Αν $A < 0$, *τότε* $\mathcal{L}(A) = \{0\}$.

Απόδειξη. 1. Αν $x \in K\backslash\{0\}$, τότε αν $(x) = 0$ τότε $K \subset \mathcal{L}(0)$. Αν πάλι $0 \neq x \in \mathcal{L}(0)$ συνεπώς $(x) \geqslant 0$. Αυτό σημαίνει ότι το x δεν έχει πόλο και συνεπώς είναι σταθερά, δηλαδή $x \in K$.

2. Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathcal{L}(A)$, $x \neq 0$. Τότε $(x) \geqslant -A > 0$ συνεπώς το x έχει τουλάχιστον μια ρίζα αλλά όχι πόλο το οποίο είναι αδύνατο.

□

Λήμμα VIII.1.26. *Αν* $A, B \in D_F$ *με* $A \leqslant B$, *τότε* $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(B)$ *και*

$$\dim\left(\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}\right) \leqslant \deg B - \deg A.$$

Απόδειξη. Αν $(x) + A \geqslant 0$, τότε $(x) + B \geqslant 0$ συνεπώς $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(B)$.

Θα αποδείξουμε τη δεύτερη σχέση στην περίπτωση που $B = A + P$. Με αυτό τον τρόπο η γενική περίπτωση αποδεικνύεται επαγωγικά.

Θεωρούμε ένα στοιχείο $t \in F$ τέτοιο ώστε

$$\nu_P(t) = \nu_P(B) = \nu_P(A) + 1.$$

Αν $x \in \mathcal{L}(B)$, τότε $\nu_P(x) \geqslant -\nu_P(B) = -\nu_P(t)$ συνεπώς $\nu_P(xt) \geqslant 0$ και $xt \in \mathcal{O}_P$. Επομένως έχουμε μια K-γραμμική απεικόνιση:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}(B) &\longrightarrow F_P = \mathcal{O}_P/P \\ x &\longmapsto (xt)(P) := xt + P \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $x \in \ker\psi$ αν και μόνο $xt \in P$ ισοδύναμα αν και μόνο αν $\nu_P(xt) = \nu_P(x) + \nu_P(t) > 0$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το

$$\nu_P(x) > -\nu_P(t) = -\nu_P(A) - 1 \Leftrightarrow \nu_P(x) \geqslant \nu_P(A) \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(A).$$

Άρα

$$\ker(\psi) = \mathcal{L}(A),$$

συνεπώς επάγεται μονομορφισμός

$$\overline{\psi} : \frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)} \hookrightarrow F_P$$

και έχουμε ότι

$$\dim\left(\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}\right) \leqslant \dim F_P = \deg B - \deg A.$$

□

Πρόταση VIII.1.27. *Έστω $A \in D_F$ ο $\mathcal{L}(A)$ είναι K διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $A = A_+ - A_-$ με $A_+ \geqslant 0$ και $A_- \geqslant 0$, τότε*

$$\dim \mathcal{L}(A) \leqslant \deg A_+ + 1$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα $\dim \mathcal{L}(A_+) \leqslant \deg A_+ + 1$, αφού $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(A_+)$. Αφού $A_+ \geqslant 0$, έχουμε ότι

$$\dim\left(\frac{\mathcal{L}(A_+)}{\mathcal{L}(0)}\right) \leqslant \deg A_+.$$

Επίσης, $\mathcal{L}(0) = K$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός VIII.1.28. *Για κάθε $A \in D_F$, ορίζουμε $\ell(A) = \dim(A) = \dim \mathcal{L}(A)$.*

Παρατήρηση VIII.1.29. *Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της παραπάνω διάστασης.*

Το επόμενο θεώρημα μας λέει χοντρικά ότι κάθε $x \in F\backslash\{0\}$ έχει τον ίδιο αριθμό πόλων και ριζών (μετρημένος με της πολλαπλότητές τους).

Θεώρημα VIII.1.30. *Κάθε κύριος divisor (x) έχει βαθμό 0. Πιο συγκεκριμμένα, αν $(x)_0, (x)_\infty$ ο divisor ριζών και πόλων του (x) αντίστοιχα, τότε*

$$\deg(x)_0 = \deg(x)_\infty = [F : K(x)].$$

Σημείωση VIII.1.31. *Το θεώρημα αποτελεί το ανάλογο του product formula για αλγεβρικά σώματα αριθμών, εδώ όμως είναι γραμμένο προσθετικά.*

Πόρισμα VIII.1.32.

1. *Αν $A, A' \in D_F$ με $A \sim A'$, τότε*

$$\dim A = \dim A' \text{ και } \deg A = \deg A'$$

2. *Αν $\deg A < 0$, τότε $\dim A = 0$.*

3. *Αν $A \in D_F$ με $\deg A = 0$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι μεταξύ τους ισοδύναμες:*

   (α΄) A είναι κύριος divisor

   (β΄) $\dim A \geqslant 1$

   (γ΄) $\dim A = 1$

Απόδειξη. (του πορίσματος)

1. Αν $A \sim A'$, τότε $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(A')$ συνεπώς $\dim A = \dim A'$. Επίσης αν $A \sim A'$, τότε εξ ορισμού υπάρχει $x \in F$ ώστε $A = A' + (x)$ και συνεπώς $\deg A = \deg A' + \deg(x)$, αλλά $\deg(x) = \deg(x)_0 - \deg(x)_\infty = 0$.

2. Αν $\dim A \geqslant 0$, τότε υπάρχει $A' \in D_F$, $A' \geqslant 0$ με $A' \geqslant 0$, με $A' \sim A$, αλλά τότε από το πρώτο $\deg A' \sim \deg A \geqslant 0$.

3. Θα δείξουμε πρώτα ότι (3α')⇒(3β'). Αν $A = (x)$ κύριος, τότε $x^{-1} \in \mathcal{L}(A)$, διότι $(x^{-1}) + (x) \geqslant 0$, συνεπώς $\dim A \geqslant 1$.

   Τώρα θα δείξουμε ότι (3β')⇒(3γ'). Έστω $\deg A = 0$ και $\dim A \geqslant 1$. Τότε υπάρχει A', $A' \geqslant 0$, $A' \sim A$ αλλά $\deg A' = \deg A = 0$ και $A' \geqslant 0$ συνεπώς $A' = 0$ συνεπώς $\dim A = \dim A' = \dim 0 = 1$.

   Τώρα θα δείξουμε ότι (3γ')⇒(3α'). Έχουμε $\dim A = 1$ και $\deg A = 0$. Έστω $0 \neq z \in \mathcal{L}(A)$ ώστε $(z) + A \geqslant 0$. Αφού $\deg\big((z) + A\big) = 0$, έχουμε $(z) + A = 0$ συνεπώς $(A) = -(z) = (z^{-1})$.

□

Απόδειξη. (του Θεωρήματος) Έστω $n = [F : K(x)]$ και

$$B := (x)_\infty = \sum_{i=1}^{r} -v_P(x) P_i,$$

όπου $P_1, P_2, \dots, P_r$ είναι οι πόλοι του x. Συνεπώς

$$\deg B = \sum_{i=1}^{r} v_P(x^{-1}) \deg P_i \leqslant [F : K(x)] = n.$$

από την πρόταση VIII.1.19. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $n \leqslant \deg B$. Έστω $u_1, u_2, \dots, u_n$ βάση του $F/K(x)$ και $C \in D_F$ τέτοιο ώστε $(u_i) \geqslant -C$ για $i = 1, 2, \dots, n$ οπότε

$$\dim(\ell B + C) \geqslant n(\ell + 1), \text{ για κάθε } \ell \geqslant 0.$$

Έχουμε ότι $x^i u_j \in \mathcal{L}(\ell B + C)$ για $0 \leqslant i \leqslant \ell$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Αν $c := \deg C$, τότε

$$n(\ell + 1) \leqslant \dim(\ell B + C) \leqslant \ell \deg B + c + 1$$

συνεπώς

$$\ell(\deg B - n) \geqslant n - c + 1 \text{ για κάθε } \ell \in \mathbb{N}.$$

Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του ℓ, η σχέση ισχύει αν και μόνο αν $\deg B \geqslant n$. Αποδείξαμε ότι $\deg(x)_\infty = [F : K(x)]$. Αφού $(x)_0 = (x^{-1})_\infty$, έχουμε

$$\deg(x)_0 = \deg(x^{-1})_\infty = [F : k(x^{-1})] = [F : K(x)].$$

□

Θεώρημα VIII.1.33. *Έστω F/K ένα σώμα συναρτήσεων και έστω R ένας υποδακτύλιος του F, $K \subset R \subset F$. Υποθέτουμε ότι το $\{0\} \neq I \subsetneq R$ είναι ένα γνήσιο ιδεώδες του R. Τότε υπάρχει μια θέση $P \in \mathbb{P}_F$, ώστε $I \subset P$ και $R \subset \mathcal{O}_P$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{F} = \{S : S \text{ υποδακτύλιος του } F \text{ με } R \subset S \text{ και } IS \neq S\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{F}$ δεν είναι κενό, αφού το $R \in \mathcal{F}$. Αν το $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ είναι ένα καθολικά διατεταγμένο σύνολο, τότε $T = \cup_{S \in \mathcal{H}} S$ είναι υποδακτύλιος του F που περιέχει το R. Επίσης $IT \neq T$. Πράγματι αν $IT = T$, τότε

$$1 = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu s_\nu,$$

με $a_\nu \in I$ και $s_\nu \in T$. Αφού το $\mathcal{H}$ είναι καθολικά διατεταγμένο, υπάρχει ένα $S_0 \in \mathcal{H}$ ώστε $s_1, \dots, s_n \in S_0$, συνεπώς $1 \in IS_0$, άτοπο.

Από το λήμμα του Zorn το $\mathcal{F}$ περιέχει ένα maximal δακτύλιο $\mathcal{O} \subset F$ ώστε $R \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{F}$, $I\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$, όπου το $\mathcal{O}$ είναι μέγιστος με αυτές τις ιδιότητες. Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{O}$ είναι ένας δακτύλιος εκτίμησης του σώματος F/K.

Αφού $I \neq \{0\}$ και $I\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$, έχουμε ότι $\mathcal{O} \subsetneq F$ και $I \subset \mathcal{O}\backslash E(\mathcal{O})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο $z \in F$ με $z \notin \mathcal{O}$ και $z^{-1} \notin \mathcal{O}$. Τότε $I\mathcal{O}[z] = \mathcal{O}[z]$ και $I\mathcal{O}[z^{-1}] = \mathcal{O}[z^{-1}]$, συνεπώς μπορούμε να βρούμε $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in I\mathcal{O}$ με

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n \\ 1 &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}. \end{aligned}$$

Σαφώς $n \geqslant 1$ και $m \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι m, n είναι τα ελάχιστα δυνατά και $m \leqslant n$. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $1 - b_0$ και τη δεύτερη με $a_n z^n$ και έχουμε

$$\begin{aligned} 1 - b_0 &= (1-b_0)a_0 + (1-b_0)a_1 z + \cdots (1-b_0)a_n z^n \\ 0 &= (b_0 - 1)a_n z^n + b_1 a_n z^{n-1} + \cdots + b_m a_n z^{n-m}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$1 = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1},$$

με συντελεστές $c_i \in I\mathcal{O}$. Το γεγονός αυτό είναι αντίθετο με την επιλογή του n ως ελάχιστου. Συνεπώς $z \in \mathcal{O}$ ή $z^{-1} \in \mathcal{O}$ και ο $\mathcal{O}$ είναι ένας δακτύλιος εκτίμησης. □

Πόρισμα VIII.1.34. *Έστω F/K είναι ένα σώμα συναρτήσεων, το $z \in F$ είναι υπερβατικό πάνω από το K. Τότε το z έχει τουλάχιστον μια ρίζα και έναν πόλο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = K[z]$ και το ιδεώδες $I = zK[z]$. Έχουμε ότι υπάρχει μια θέση $P \in \mathcal{P}_F$ με $z \in P$, συνεπώς το P είναι μια ρίζα του z. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το z^{-1} έχει μια ρίζα $Q \in \mathbb{P}_F$, συνεπώς το Q είναι πόλος του z. □

Πρόταση VIII.1.35. *Κάθε σώμα συναρτήσεων έχει άπειρες το πλήθος θέσεις.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος θέσεις $P_1, \ldots, P_n$. Από το θεώρημα VIII.1.17 έχουμε ένα μη-μηδενικό στοιχείο x με $v_{P_i}(x) > 0$ για $i = 1, \ldots, n$. Το x είναι υπερβατικό υπεράνω του K, γιατί έχει ρίζες. Δεν έχει όμως πόλους. □

Παράδειγμα VIII.1.36. *Θα κοιτάξουμε το σώμα συναρτήσεων $F = K(x)$. Για $0 \neq z \in K(x)$, $z = a\frac{f(x)}{g(x)}$, με $a \in K\backslash\{0\}$ και $f(x), g(x) \in K[x]$, σχετικά πρώτα. Γράφουμε*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i(x)^{n_i}, \qquad g(x) = \prod_{i=1}^{r} q_j(x)^{m_j},$$

η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ο κύριος διαιρέτης του $z \in F$

$$(z) = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i - \sum_{j=1}^{s} m_j Q_j + (\deg g - \deg f)P_\infty,$$

όπου P_i, Q_j είναι οι θέσεις που αντιστοιχούν στα $p_i(x)$ και $q_j(x)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$\dim A \leqslant 1 + \deg A$$

για κάθε divisor $A \geqslant 0$.

Λήμμα VIII.1.37. *Για κάθε* $A \in D_F$ *με* $\deg A \geqslant$ *ισχύει*

$$\dim A \leqslant 1 + \deg A$$

Απόδειξη. Αν $\dim A = 0$, προφανώς ισχύει. Αν $\dim A > 0$, τότε υπάρχει $A' \sim A$ με $A' \geqslant 0$. Συνεπώς

$$\dim A = \dim A' \leqslant 1 + \deg A' = 1 + \deg A.$$

□

Πρόταση VIII.1.38. *Υπάρχει* $\gamma \in \mathbb{Z}$ *ώστε για όλους τους* $A \in D_F$ *να ισχύει*

$$\deg A - \dim A \leqslant \gamma.$$

Το γ *εξαρτάται μόνο από το* F/K *και όχι από τον* A.

Απόδειξη. Αν $A_1 \leqslant A_2$, τότε $\deg A_1 - \dim A_1 \leqslant \deg A_2 - \dim A_2$. Διαλέγουμε ένα $x \in F\backslash K$ και το κρατούμε σταθερό και θεωρούμε τον divisor $B = (x)_\infty$. Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει divisor $C \geqslant 0$ (που εξαρτάται από το x) ώστε

$$\dim(\ell B + C) \geqslant (\ell + 1) \deg B,$$

για κάθε $\ell \geqslant 0$. Από το προηγούμενο λήμμα

$$\dim(\ell B) \geqslant \dim(\ell B + C) - \deg C = \deg(\ell B) + ([F : K(x)] - \deg C)$$

Συνεπώς

$$\deg(\ell B) - \dim(\ell B) \leqslant \gamma,$$

για κάθε $\ell > 0$ με $\gamma \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ℓB με τυχαίο $A \in D_F$ και το ίδιο γ.

Ισχυρισμός: Αν δίνεται ο divisor A, τότε υπάρχουν $A_1, D \in D_F$ και $\ell \geqslant 0$, τέτοιο ώστε

$$A \leqslant A_1, A_1 \sim D \text{ και } D \leqslant \ell B.$$

Αν δεχθούμε τον ισχυρισμό, τότε

$$\deg A - \dim A \leqslant \deg A_1 - \dim A_1 = \deg D - \dim D \leqslant \deg(\ell B) - \dim(\ell B) \leqslant \gamma.$$

Θα αποδείξουμε τώρα τον ισχυρισμό. Διαλέγουμε $A_1 \geqslant A$ τέτοιο ώστε $A_1 \geqslant 0$, οπότε

$$\dim(\ell B - A_1) \geqslant \dim(\ell B) - \deg A_1 \geqslant \deg(\ell B) - \gamma - \deg A_1 > 0$$

για αρκετά μεγάλο ℓ. Επομένως υπάρχει $0 \neq z \in \mathcal{L}(\ell B - A_1)$. Θέτουμε $D := A_1 - (z)$ και έχουμε $A_1 \sim D$ και

$$D \leqslant A_1 - (A_1 - \ell B) = \ell B.$$

□

Ορισμός VIII.1.39. *Ορίζουμε γένος του σώματος* F/K,

$$g := \max\{\deg A - \dim A + 1 : A \in D_F\}.$$

Σημείωση VIII.1.40. *Ο ορισμός έχει νόημα λόγω της προηγούμενης πρότασης. Επίσης* $g \geqslant 0$. *Πράγματι αν* $A = 0$, *τότε* $\deg(0) - \dim(0) + 1 \geqslant 0$.

Θεώρημα VIII.1.41 (του Riemann). *Έστω* F/K *σώμα συναρτήσεων, γένους* g. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Για κάθε* $A \in D_F$, *έχουμε* $\dim A \geqslant \deg A + 1 - g$.
2. *Υπάρχει* $c \in \mathbb{Z}$ *εξαρτώμενο από το* F/K *τέτοιο ώστε*
$$\dim A = \deg A + 1 - g,$$
για όλα τα A *που έχουν* $\deg A \geqslant c$.

Απόδειξη. Το πρώτο είναι σαφές από τον ορισμό του γένους.

Για το δεύτερο παίρνουμε έναν divisor A_0 τέτοιο ώστε $g = \deg A_0 - \dim A_0 + 1$ και θέτουμε $c := \deg A_0 + g$. Αν τώρα $\deg A \geqslant c$, τότε
$$\dim(A - A_0) \geqslant \deg(A - A_0) + 1 - g \geqslant c - \deg A_0 = 1 - g \geqslant 1,$$
άρα υπάρχει $z \neq 0$, $z \in \mathcal{L}(A - A_0)$. Θέτουμε $A' := A + (z)$, $A' \geqslant A_0$ και έχουμε
$$\deg A - \dim A = \deg A' - \dim A' \geqslant \deg A_0 - \dim A_0 = g - 1.$$
Καταλήγουμε στο ότι
$$\dim A \leqslant \deg A + 1 - g.$$
□

Παράδειγμα VIII.1.42. *Έστω* $F = K(x)$ *το ρητό σώμα συναρτήσεων, το οποίο έχει γένος* $g(F/K) = 0$.

Πράγματι, έστω P_∞ *ο πολικός divisor του* x. *Για* $r \geqslant 0$ *θεωρούμε το* $\mathcal{L}(rP_\infty)$, *το οποίο έχει ως βάση τα στοιχεία* $\{1, x, \dots, x^r\} \in \mathcal{L}(rP_\infty)$.

Ισχύει
$$r + 1 \leqslant \dim \mathcal{L}(rP_\infty) = \deg(rP_\infty) + 1 - g = r + 1 - g \quad (\text{ για } r \text{ αρκετά μεγάλο})$$
Άρα το $g \leqslant 0$ *και αφού πάντα* $g \geqslant 0$ *καταλήγουμε στο* $g = 0$.

VIII.2 Το θεώρημα των Riemann-Roch

Ορισμός VIII.2.1. *Για ένα* $A \in D_F$ *ορίζουμε*
$$i(A) := \dim A - \deg A + g - 1$$
και το ονομάζουμε index of speciality του A.

Το θεώρημα του Riemann δίνει ότι $i(A) \in \mathbb{Z}$, $i(A) \geqslant 0$ και $i(A) = 0$ για $\deg A$ αρκετά μεγάλο.

Ορισμός VIII.2.2. *Ένα adele του* F/K *είναι μια αντιστοίχιση*
$$\alpha : \mathbb{P}_F \longrightarrow F$$
$$P \longmapsto \alpha_P$$
τέτοια ώστε $\alpha_P \in \mathcal{O}_P$ *για όλα σχεδόν το* $P \in \mathbb{P}_F$.

Το adele το θεωρούμε σαν στοιχείο του ευθέος γινομένου
$$\alpha = (\alpha_P)_{P \in \mathbb{P}_F} \in \prod_{P \in \mathbb{P}_F} F$$
Το σύνολο των adele
$$\mathcal{A}_F := \{\alpha : \alpha \text{ adele του } F/K\}$$
είναι K-διανυσματικός χώρος και δακτύλιος. Το σώμα F εμφυτεύεται διαγώνια στο $\mathcal{A}_F$ και η ν_P επεκτείνεται στο $\mathcal{A}_F$.

Ορισμός VIII.2.3. *Για ένα* A *ορίζουμε*

$$\mathcal{A}_F(A) := \{\alpha \in \mathcal{A}_F : \nu_P(\alpha) \geqslant -\nu_P(A),\ \textit{για κάθε}\ P \in \mathbb{P}_F\}.$$

Θεώρημα VIII.2.4. *Για κάθε* $A \in D_F$ *ο index of speciality είναι*

$$i(A) = \dim_K \left\{ \frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F(A) + F} \right\}.$$

Απόδειξη. **Βήμα 1** Έστω $A_1, A_2 \in D_F$ και $A_1 \leqslant A_2$, τότε $\mathcal{A}_F(A_1) \subset \mathcal{A}_F(A_2)$ και

$$\dim(\mathcal{A}_F(A_2)/\mathcal{A}_F(A_1)) = \deg A_2 - \deg A_1.$$

Από τον ορισμό έχουμε ότι $\mathcal{A}_F(A_1) \subset \mathcal{A}_F(A_2)$. Θα αποδείξουμε τον τύπο της διάστασης με γενικευμένη επαγωγή εστιάζοντας στην περίπτωση $A_2 = A_1 + P$ με $P \in \mathbb{P}_F$. Διαλέγουμε $t \in F$ με $\nu_P(t) = \nu_P(A_1) + 1$ και θεωρούμε την K-γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{A}_F &\longrightarrow F_P \\ \alpha &\longmapsto (t\alpha_P)(P) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι είναι επί και ότι ο πυρήνας της ϕ είναι το $\mathcal{A}_F(A_1)$. Συνεπώς

$$\deg A_2 - \deg A_1 = \deg P = [F_P : K] = \dim(\mathcal{A}_F(A_2)/\mathcal{A}_F(A_1)).$$

Βήμα 2 Για divisors A_1, A_2 όπως προηγουμένως και $A_1 \leqslant A_2$ έχουμε

$$\dim\left(\frac{\mathcal{A}_F(A_2) + F}{\mathcal{A}_F(A_1) + F}\right) = \deg A_2 - \dim A_2 - (\deg A_1 - \dim A_1).$$

Πράγματι, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία γραμμικών συναρτήσεων (τα σ_1, σ_2 ορίζονται με τον προφανή τρόπο)

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{L}(A_2)}{\mathcal{L}(A_1)} \xrightarrow{\sigma_1} \frac{\mathcal{A}_F(A_2)}{\mathcal{A}_F(A_1)} \xrightarrow{\sigma_2} \frac{\mathcal{A}_F(A_2) + F}{\mathcal{A}_F(A_1) + F} \longrightarrow 0 \tag{VIII.2}$$

Η ακρίβεια σε κάθε θέση είναι σαφής έκτος ίσως από το ότι ο πυρήνας της σ_2 περιέχεται στην εικόνα της σ_1. Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε ένα $\alpha \in \mathcal{A}_F(A_2)$ με $\sigma_2(\alpha + \mathcal{A}_F(A_1)) = 0$. Τότε $\alpha \in \mathcal{A}_F + F$, συνεπώς υπάρχει ένα $x \in \mathcal{A}_F(A_2) \cap F = \mathcal{L}(A_2)$. Άρα $\alpha + \mathcal{A}_F(A_1) = x + \mathcal{A}_F(A_1) = \sigma_1(x + \mathcal{L}(A_1))$ ανήκει στην εικόνα του σ_1.

Από την ακρίβεια της εξίσωσης (VIII.2) έχουμε

$$\dim\left(\frac{\mathcal{A}_F(A_2) + F}{\mathcal{A}_F)(A_1) + F}\right) = \dim\left(\frac{\mathcal{A}_F(A_2)}{\mathcal{A}_F(A_1)}\right) - \dim\left(\frac{\mathcal{L}(A_2)}{\mathcal{L}(A_1)}\right) = (\deg A_2 - \deg A_1) - (\dim A_2 - \dim A_1).$$

Βήμα 3 Αν B είναι ένας divisor με $\dim B = \deg B + 1 - g$, τότε

$$\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_F(B) + F. \tag{VIII.3}$$

Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι αν $B_1 \geqslant B$, τότε

$$\dim B_1 \leqslant \deg B_1 + \dim(B) - \deg B = \deg B_1 + 1 - g.$$

Από την άλλη πλευρά, $\dim B_1 \geqslant B_1 + 1 - g$ από το θεώρημα του Riemann. Συνεπώς

$$\dim B_1 = \deg B_1 + 1 - g \text{ για κάθε } B_1 \geqslant B.$$

Για να αποδείξουμε την ανισότητα στο (VIII.3) θεωρούμε ένα $\alpha \in \mathcal{A}_F$. Μπορούμε να βρούμε ένα $B_1 \geqslant B$, ώστε $\alpha \in \mathcal{A}_F(B_1)$. Έχουμε

$$\dim\left(\frac{\mathcal{A}_F(B_1)+F}{\mathcal{A}_F(B)+F}\right) = \deg B_1 - \dim B_1 - (\deg B - \dim B) = (g-1)-(g-1) = 0.$$

Το τελευταίο έχει ως συνέπεια $\mathcal{A}_F(B)+F = \mathcal{A}_F(B_1)+F$. Αφού $\alpha \in \mathcal{A}_F(B_1)$, έχουμε και ότι $\alpha \in \mathcal{A}_F(B)+F$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη: Θεωρούμε έναν divisor A. Το θεώρημα του Riemann εξασφαλίζει ότι υπάρχει $A_1 \geqslant A$ ώστε $\dim A_1 = \deg A_1 + 1 - g$. Από το τρίτο βήμα $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_F(A_1)+F$, οπότε

$$\begin{aligned}\dim\left(\frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F(A)+F}\right) &= \dim(\mathcal{A}_F(A_1)+F)/(\mathcal{A}_F(A)+F)\\ &= (\deg A_1 - \dim A_1) - (\deg A - \dim A)\\ &= (g-1) + \dim A - \deg A = i(A).\end{aligned}$$

□

Πόρισμα VIII.2.5. *Ισχύει ότι*

$$g = \dim\left(\frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F(0)+F}\right)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$i(0) = \dim(0) - \deg(0) + g - 1 = 1 - 0 + g - 1 = g.$$

□

Με αυτό τον τρόπο έχουμε μια πρώτη ερμηνεία του θεωρήματος Riemann-Roch

$$\dim A = \deg A + 1 - g + \dim\left(\frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F(A)+F}\right).$$

Ορισμός VIII.2.6. *Ένα διαφορικό του Weil στο F/K είναι μια K-γραμμική απεικόνιση*

$$\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow K,$$

η οποία μηδενίζεται στο $\mathcal{A}_F(A)+F$ για κάποιον διαιρέτη $A \in D_F$. Θα συμβολίζουμε το σύνολο των Weil διαφορικών ως εξής:

$$\Omega_F = \{\omega | \omega \text{ Weil διαφορικό του } F/K\}.$$

Το Ω_F είναι ένας K-διανυσματικός χώρος. Για $A \in D_F$ ορίζουμε

$$\Omega_F(A) = \{\omega \in \Omega_F : \omega \text{ μηδενίζεται στο } \mathcal{A}_F(A)+F\}.$$

Το $\Omega_F(A)$ είναι ένας K-διανυσμάτικος χώρος και

$$\Omega_F(A) \leqslant \Omega_F.$$

Λήμμα VIII.2.7. *Για $A \in D_F$ έχουμε ότι $\dim \Omega_F(\mathcal{A}) = i(A)$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\Omega_F(A) \cong \frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F+F}$$

και χρησιμοποιούμε το προηγούμενο θεώρημα. □

Παρατήρηση VIII.2.8. *Έχουμε ότι $\Omega_F \neq 0$. Πράγματι, έστω A divisor με $\deg A \leqslant -2$, συνεπώς*

$$\dim \Omega_F(A) = i(A) = \dim A - \deg A + g - 1 \geqslant 1$$

Ορισμός VIII.2.9. *Έστω $x \in F$, $\omega \in \Omega_F$, ορίζουμε την*

$$x\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow K$$
$$(x\omega)(\alpha) := \omega(x\alpha)$$

Το Ω_F γίνεται F-διανυσματικός χώρος.

Πρόταση VIII.2.10. *Ισχύει ότι $\dim_F \Omega_F = 1$.*

Σε κάθε διαφορικό του Weil $\omega \neq 0$ θα αντιστοιχίσουμε έναν divisor.

Θεωρούμε το σύνολο

$$M(\omega) := \{A \in D_F : \omega \text{ μηδενίζεται στο } \mathcal{A}_F(A) + F\}.$$

Λήμμα VIII.2.11. *Έστω $\omega \in \Omega_F$, $\omega \neq 0$, υπάρχει μοναδικός divisor $W \in M(\omega)$ τέτοιο ώστε $A \leqslant W$ για κάθε $A \in M(\omega)$.*

Απόδειξη. (του θεωρήματος Riemann) Από το θεώρημα του Riemann έπεται ότι υπάρχει c σταθερά εξαρτώμενη από το function field F/K. ώστε $i(A) = 0$ για κάθε $A \in D_F$ με $\deg A \geqslant c$. Από τη σχέση

$$i(A) = \dim\left(\frac{\mathcal{A}_F}{\mathcal{A}_F + F}\right)$$

έπεται ότι αν $A \in M(\omega)$, τότε $\deg A < c$, αφού $\omega \neq 0$ και αν ω μηδενίζεται σε κάθε $A \in D_F$, τότε $\omega = 0$. Διαλέγουμε έναν divisor $W \in M(\omega)$ με μέγιστο βαθμό. Έστω ότι ο W δεν έχει την ιδιότητα του λήμματός μας, συνεπώς υπάρχει $A_0 \in M(\omega)$ με $A_0 \nleqslant W$, δηλαδή $v_Q(A_0) > v_Q(W)$ για κάποιο $Q \in \mathbb{P}_F$.

Ισχυριζόμαστε ότι $W+Q \in M(\omega)$ (άτοπο στην maximality του W). Έστω $\alpha = (\alpha_P) \in \mathcal{A}_F(W+Q)$. Γράφουμε $\alpha = \alpha' + \alpha''$ όπου

$$\alpha'_P = \begin{cases} \alpha_P, & \text{για } P \neq Q \\ 0 & \text{για } P = Q \end{cases}$$

και

$$\alpha''_P = \begin{cases} 0, & \text{για } P \neq Q \\ \alpha_Q, & \text{για } P = Q \end{cases}$$

Το $\alpha' \in \mathcal{A}_F(W)$ και $\alpha'' \in \mathcal{A}_F(A_0)$, συνεπώς

$$\omega(\alpha) = \omega(\alpha') + \omega(\alpha'') = 0.$$

Καταλήξαμε στο ότι ο ω μηδενίζεται στό $\mathcal{A}_F(W+Q) + F$, συνεπώς $W + Q \in M(\omega)$, άτοπο. □

Ορισμός VIII.2.12.

1. *Ο divisor ω του Weil differential $\omega \neq 0$ ορίζεται μονοσήμαντα από τις ιδιότητες:*
   (α′) *ω μηδενίζεται στο $\mathcal{A}_F(\omega) + F$*
   (β′) *Αν ω μηδενίζεται στο $\mathcal{A}_F(A) + F$, τότε $A \leqslant (\omega)$*
2. *Για $0 \neq \omega \in \Omega_F$ και $P \in \mathbb{P}_F$ με $v_P(\omega) := v_P((\omega))$*
3. *Μια θέση P θα λέγεται ρίζα (πόλος) του ω αν $v_P(\omega) > 0 (v_P(\omega) < 0)$. Το ω θα είναι ολόμορφο στο P όταν $v_P(\omega) \geqslant 0$. Το ω θα είναι ολόμορφο αν είναι ολόμορφο σε κάθε $P \in \mathbb{P}_F$.*

4. *Ένας divisor W θα λέγεται κανονικός divisor του F/K αν $W = (0)$ για κάποιο $\omega \in \Omega_F$.*

Παρατήρηση VIII.2.13. *Έχουμε*

$$\Omega_F(A) = \{\omega \in \Omega_F : \omega = 0 \text{ ή } (\omega) \geqslant A\}$$

και

$$\Omega_F(0) = \{\omega \in \Omega_F : \omega \text{ ολόμορφο}\}.$$

$$\dim \Omega_F(0) = g.$$

Πρόταση VIII.2.14. 1. *Για $0 \neq x \in F$ και $0 \neq \omega \in \Omega_F$ έχουμε $(x\omega) = (x) + (\omega)$.*

2. *Κάθε δύο κανονικοί divisors του F/K είναι ισοδύναμοι.*
Η κλάση τους λέγεται η κανονική κλάση του F/K.

Απόδειξη. 1. Αν ω μηδενίζεται στο $\mathcal{A}_F(A)+F$, τότε $x\omega$ μηδενίζεται στο $\mathcal{A}_F(A+(x))+F$, συνεπώς $(\omega) + (x) \leqslant (x\omega)$. Ανάλογα $(x\omega) + (x^{-1}) \leqslant (x^{-1}x\omega) = (\omega)$.

Επομένως $(\omega) + (x) \leqslant (x\omega) \leqslant -(x^{-1}) + (\omega) = (\omega) + (x)$.

2. Δείξαμε ότι το Ω_F είναι μονοδιάστατος F-διανυσματικός χώρος συνεπώς αν $w \in W_F$ και $\omega' \in \Omega_F$, τότε υπάρχει $x \in F\backslash\{0\}$ με $\omega' = x\omega$, το οποίο δίνει ότι $(\omega') = (\omega) + (x)$, δηλαδή οι divisors (ω) και (ω') είναι ισοδύναμοι.

□

Θεώρημα VIII.2.15. *Αν A είναι ένας divisor και $W = (\omega)$ ένας κανονικός divisor του F/K, τότε η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{L}(W-A) &\longrightarrow \Omega_F(A) \\ x &\longmapsto x\omega \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Ιδιαίτερα

$$i(A) = \dim(W-A).$$

Απόδειξη. Για $x \in \mathcal{L}(W-A)$ έχουμε

$$(x\omega) = (x) + (\omega) \geqslant -(W-A) + W = A$$

συνεπώς το $x\omega \in \Omega_F(A)$, δηλαδή η μ στέλνει το $\mathcal{L}(W-A)$ στο $\Omega_F(A)$ και είναι K-γραμμική και $1-1$, αφού αν $x_1\omega = x_2\omega$, τότε $(x_1-x_2)\omega = 0$ συνεπώς $x_1 - x_2 = 0$ και $x_1 = x_2$.

Για να δείξουμε ότι είναι και επί θεωρούμε ένα $\omega_1 \in \Omega(A)$. Και πάλι με βάση το γεγονός ότι το Ω_F είναι μονοδιάστατος F-διανυσματικός χώρος έχουμε ότι $\omega_1 = x\Omega$ για κάποιο $x \in F$.

Αφού $(x) + W = (x) + (\omega) = (x\omega) = (\omega_1) \geqslant A$, έχουμε ότι $(x) \geqslant -(W-A)$, δηλαδή ότι $x \in \mathcal{L}(W-A)$ και $\omega_1 = \mu(x)$.

Η σχέση $\dim \Omega_F(A) = \dim(W-A)$ είναι σαφής, αφού $\dim \Omega_F(A) = i(A)$. □

Θεώρημα VIII.2.16 (Riemann-Roch)**.** *Έστω W ο κανονικός divisor του F/K, τότε για κάθε $A \in D_F$ έχουμε*

$$\dim A = \deg A + 1 - g + \dim(W-A).$$

Πόρισμα VIII.2.17. *Ισχύει $\deg W = 2g-2$ και $\dim W = g$.*

Θεώρημα VIII.2.18. *Αν* $A \in D_F$ *και* $\deg A \geqslant 2g - 1$*, τότε*

$$\dim A = \deg A + 1 - g.$$

Απόδειξη. Αφού $\deg A \geqslant 2g-1$ και $\deg(W) = 2g-2$ έχουμε $\deg(W-A) < 0$, οπότε $\dim(W-A) = 0$. □

Σημείωση VIII.2.19. *Το φράγμα* $2g-1$ *είναι το καλύτερο δυνατό, αφού για τον* W *ισχύει*

$$g = \dim W > \deg W + 1 - g = g - 1.$$

VIII.3 Συνέπειες του Θεωρήματος Riemann-Roch

Το θεώρημα των Riemann-Roch χαρακτηρίζει το γένος και την κανονική κλάση του F/K.

Πρόταση VIII.3.1. *Έστω* $g_0 \in \mathbb{Z}$ *και* $W_0 \in D_F$ *ώστε να πληρούν την*

$$\dim A = \deg A + 1 - g_0 + \dim(W_0 - A)$$

για κάθε $A \in D_F$*. Τότε* $g_0 = g$ *και* W_0 *είναι ένας κανονικός divisor.*

Απόδειξη. Για $A = 0$ έχουμε

$$1 = \dim 0 = \deg 0 + 1 - g_0 + \dim(W_0 - 0)$$

συνεπώς $\dim W_0 = g_0$. Για $A = W_0$ έχουμε

$$\dim W_0 = \deg W_0 + 1 - g_0 + \dim 0 \Rightarrow \deg W_0 = 2g_0 - 2.$$

Έστω W ένας κανονικός divisor του F/K, εκλέγουμε divisor A με $\deg A > \max\{2g-2, 2g_0-2\}$ και έχουμε

$$\dim A = \deg A + 1 - g = \deg A + 1 - g_0 + \dim(W_0 - A)$$

από όπου έχουμε ότι $g = g_0$. Για $A = W$ έχουμε

$$\dim(W) = \deg W + 1 - g_0 + \dim(W - W_0) \Rightarrow \dim(W_0 - W) = 1$$

Ενώ γνωρίζουμε ότι $\deg(W-W_0) = 0$, αφού $g = g_0$. Η σχέση $\dim(W_0-W) = 1$ και $\deg(W_0-W) = 0$ μας δίνει ότι $W_0 - W$ κύριος και $W_0 \sim W$. □

Τώρα θα δώσουμε μερικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ρητού σώματος συναρτήσεων.

Πρόταση VIII.3.2. *Έστω* F/K *ένα σώμα συναρτήσεων. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σώμα* F/K *είναι ρητό δηλαδή* $F = K(x)$ *για κάποιο* $x \in F\backslash K$.
2. *Το σώμα* F/K *έχει γένος* 0 *και υπάρχει* $A \in D_F$ *με* $\deg(A) = 1$.

Απόδειξη. Αν F/K είναι ρητό, τότε $g = 0$ και επιπλέον, υπάρχει P_∞ με $\deg P_\infty = 1$.

Αντιστρόφως, αν $g = 0$ και υπάρχει A με $\deg(A) = 1$, τότε

$$\dim A = \deg A + 1 - g = 2.$$

Συνεπώς $\mathcal{L}(A) \neq \{0\}$ και μπορούμε να βρούμε $A' \geqslant 0$, $A' \sim A$. Επιπρόσθετα $\mathcal{A}' = 2$ και υπάρχει $x \in \mathcal{L}(A')\backslash K$, τέτοιο ώστε $(x) \neq 0$ και $(x) + A' \geqslant 0$. Αφού $\deg A' = 1$, έχουμε ότι $A' = (x)_\infty$, οπότε $[F : K(x)] = \deg(x)_\infty = \deg A' = 1$ και $K(x) = F$. □

VIII.3.1 Το θεώρημα χασμάτων του Weierstrass

Θεώρημα VIII.3.3 (Ισχυρό θεώρημα προσέγγισης). *Θεωρούμε ένα σύνολο θέσεων* $S \subset \mathbb{P}_F$, $S \neq \mathbb{P}_F$ *με* $P_1, P_2, \ldots, P_r \in S$. *Επίσης, δίνονται* $x_1, x_2, \ldots, x_r \in F$ *και* $n_1, n_2, \ldots, n_2 \in \mathbb{Z}$. *Τότε υπάρχει* $x \in F$ *τέτοιο ώστε*

$$\nu_{P_i}(x - x_i) = n_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, r$$

και $\nu_P(x) \geqslant 0$ *για κάθε* $P \in S \backslash \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$.

Πρόταση VIII.3.4. *Έστω* $P \in \mathbb{P}_F$, *τότε για κάθε* $n \geqslant 2g$ *υπάρχει* $x \in F$ *με* $(x)_\infty = nP$.

Απόδειξη. Αφού $n \geqslant 2g$ έχουμε ότι

$$\dim\big((n-1)P\big) = (n-1)\deg P + 1 - g$$

και

$$\dim(nP) = n \deg P + 1 - g$$

Συνεπώς $\dim(nP) > \dim\big((n-1)P\big)$ οπότε $\mathcal{L}(nP) \supsetneq \mathcal{L}\big((n-1)P\big)$ και κάθε $x \in \mathcal{L}(nP) \backslash \mathcal{L}\big((n-1)P\big)$ πληροί τη ζητούμενη ιδιότητα. □

Ορισμός VIII.3.5. *Έστω* $P \in \mathbb{P}_F$. *Κάθε* $n \geqslant 0$ *καλείται pole number της* P *αν και μόνο αν υπάρχει* $x \in F$ *ώστε* $(x)_\infty = nP$, *αλλιώς λέγεται gap number (χασμάτων) του* P.

Παρατήρηση VIII.3.6. *Είναι σαφές ότι το* n *είναι pole number στο* P *αν και μόνο αν* $\dim(nP) > \dim\big((n-1)P\big)$.

Θεώρημα VIII.3.7 (Χασμάτων του Weierstrass). *Έστω* F/K *σώμα συναρτήσεων γένους* g *και* $P \in \mathcal{P}_F$ *με* $\deg P = 1$. *Τότε υπάρχουν ακριβώς* g *gap-numbers του* P

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_g,$$

όπου $i_1 = 1$ *και* $i_g \leqslant 2g - 1$.

Απόδειξη. Κάθε gap number του P είναι $\leqslant 2g-1$ και προφανώς το 0 είναι pole number. Επίσης, το i είναι gap number αν και μόνο αν $\mathcal{L}\big((i-1)P\big) = \mathcal{L}(iP)$. Έχουμε την ακολουθία

$$K = \mathcal{L}(0) \subset \mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(2P) \subset \cdots \subset \mathcal{L}\big((2g-1)P\big).$$

Έχουμε $\dim \mathcal{L}(0) = 1$ ενώ, $\dim \mathcal{L}\big((2g-1)P\big) = 2g - 1 + 1 - g = g$. Επίσης $\dim \mathcal{L}(iP) \leqslant \dim \mathcal{L}\big((i-1)P\big) + 1$ συνεπώς υπάρχουν ακριβώς $g-1$ αριθμοί $1 \leqslant i \leqslant 2g-1$ με $\mathcal{L}\big((i-1)P\big) \subsetneq \mathcal{L}(iP)$. Οι υπόλοιποι g αριθμοί είναι gaps στο P. Το 1 είναι gap, γιατί αν δεν ήταν, θα είχαμε ότι όλο το $\mathbb{N}$ είναι στους πόλους, το οποίο θα έδινε $g = 0$. □

- Αν $A \in D_F$, με $\deg A < 0$, τότε $\mathcal{L}(A) = \{0\}$.
- Αν $\deg A > 2g-2$, τότε $\dim A = \deg A + 1 - g$, συνεπώς το $\dim A$ εξαρτάται μόνο από το $\deg A$ και g.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $0 \leqslant \deg A \leqslant 2g-2$.

Αν το K είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε για σχεδόν όλους τους $P \in \mathbb{P}_F$ έχουμε την ίδια Weierstrass ημιομάδα. Τέτοια σημεία P λέγονται ordinary. Κάθε μη-ordinary σημείο λέγεται Weierstrass points. Αν $g \geqslant 2$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα Weierstrass point.

Ορισμός VIII.3.8. *Αν* $A \in D_F$, *τότε* A *θα λέγεται non-special αν* $i(A) = 0$, *διαφορετικά θα λέγεται special.*

Παρατήρηση VIII.3.9.

1. *Αν* A *είναι non-special, τότε* $\dim A = \deg A + 1 - g$.
2. *Αν* $\deg A > 2g - 2$, *τότε* A *είναι non-special*
3. *Η ιδιότητα ότι* $A \in D_F$ *είναι special ή non-special εξαρτάται μόνο από την κλάση* $[A]$ *του διαιρέτη* A.
4. *Ο κανονικός divisor είναι special*
5. *Κάθε* $A \in D_F$, *με* $\dim A > 0$ *και* $\deg A < g$ *είναι special*
6. *Αν* A *non-special και* $B \geqslant A$, *τότε και ο* B *είναι non-special.*

Πρόταση VIII.3.10. *Αν* $T \subset \mathbb{P}_F$ *αν* $P \in T$ *με* $\deg P = 1$ *και* $|T| \geqslant g$, *τότε υπάρχει non-special* $B \geqslant 0$, $\deg B = g$ *και* $\operatorname{supp} B \in T$.

Θεώρημα VIII.3.11 (Clifford). *Αν* $A \in D_F$, $0 \leqslant \deg A \leqslant 2g - 2$, *τότε*

$$\dim A \leqslant 1 + \frac{1}{2} \deg A.$$

Λήμμα VIII.3.12. *Υποθέτουμε ότι* $A, B \in D_F$ *με* $\dim A > 0$, $\dim B > 0$. *Τότε*

$$\dim A + \dim B \leqslant 1 + \dim(A + B).$$

Απόδειξη. Αφού $\dim A > 0$ και $\dim B > 0$, μπορούμε να διαλέξουμε $A_0, B_0 > 0$ με $A_0 \sim A$ και $B_0 \sim B$. Το σύνολο

$$X := \{D \in D_F : D \leqslant A_0 \text{ και } \mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(A_0)\}$$

είναι μη κενό, αφού σε αυτό ανήκει τουλάχιστον το A_0. Αφού $D \geqslant 0$ για όλα τα $D \in X$, υπάρχει divisor $D_0 \in X$ ελάχιστου βαθμού. Συνεπώς

$$\dim(D_0 - P) \leqslant \dim(D_0) \text{ για κάθε } P \in \mathbb{P}_F$$

Θα δείξουμε ότι

$$\dim(D_0) + \dim(B_0) \leqslant 1 + \dim(D_0 + B). \tag{VIII.4}$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \dim(A) + \dim(B) &= \dim(A_0) + \dim(B_0) = \dim(D_0) + \dim(B_0) \\ &\leqslant 1 + \dim(D_0 + B_0) \leqslant 1 + \dim(A_0 + B_0) = 1 + \dim(A + B). \end{aligned}$$

Θα απλοποιήσουμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι το K είναι ένα άπειρο σώμα. Υποθέτουμε ότι το $B_0 \in D_F$ έχει μηδενικούς συντελεστές εκτός από το πεπερασμένο σύνολο θέσεων $\{P_1, \ldots, P_r\}$, τότε το $\mathcal{L}(D_0 - P_i)$ είναι γνήσιος υπόχωρος $\mathcal{L}(D_0)$ για όλα τα $i = 1, \ldots, r$. Από τη στιγμή που το σώμα είναι άπειρο, ένας διανυσματικός χώρος δεν μπορεί να είναι πεπερασμένη ένωση γνήσιων υποχώρων του. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο

$$z \in \mathcal{L}(D_0) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{L}(D_0 - P_i).$$

Θεωρούμε την K-γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(B_0) &\longrightarrow \mathcal{L}(D_0 + B_0)/\mathcal{L}(A_0) \\ x &\longmapsto xz \mod \mathcal{L}(A_0) \end{aligned}$$

Από την επιλογή του z έχουμε ότι ο πυρήνας του ϕ είναι το K, συνεπώς

$$\dim \mathcal{L}(B_0) - 1 \leqslant \dim \mathcal{L}(D_0 + B_0) - \dim \mathcal{L}(A_0),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Απόδειξη. (Του θεωρήματος) Αν το $\dim(A) = 0$, το θεώρημα είναι σαφές. Αν $\dim(W - A) = 0$, τότε

$$\dim(A) = \deg A + 1 - g = 1 + \frac{1}{2}\deg A + \frac{1}{2}(\deg A - 2g) < 1 + \frac{1}{2}\deg A.$$

Αν $\dim(A) > 0$ και $\dim(W - A) > 0$, τότε το λήμμα VIII.3.12 μας δίνει

$$\dim A + \dim(W - A) \leqslant 1 + \dim W = 1 + g.$$

Από την άλλη το θεώρημα Riemann-Roch δίνει

$$\dim A - \dim(W - A) = \deg A + 1 - g.$$

Αθροιζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε το ζητούμενο. □

VIII.4 Προβολικές Εμφυτεύσεις

Θεωρούμε ένα σώμα συναρτήσεων K/k και θέλουμε από αυτό να κατασκευάσουμε μια προβολική καμπύλη $V \subset \mathbb{P}^n$. Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\phi := (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n) \subset K$, με $\phi_0 \neq 0$ και ας θεωρήσουμε τον δακτύλιο $R = k[\phi_0, \dots, \phi_n]$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$k(\phi_1/\phi_0, \dots, \phi_n/\phi_0) \neq k.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Phi : k[X_0, X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow R[T]\\ X_i &\longmapsto \phi_i T, 0 \leqslant i \leqslant n\end{aligned}$$

Ο δακτύλιος $R[T]$ είναι εφοδιασμένος με το φυσικό grading, όπου τα στοιχεία του δακτυλίου $R[T]$ είναι ομογενή βαθμού 0. Η συνάρτηση Φ είναι συνάρτηση από graded k-άλγεβρες και συνεπώς ο πυρήνας I είναι ένα ομογενές ιδεώδες το οποίο καταγράφει τις αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των ϕ_i. Αφού το $R[T]$ είναι ακέραια περιοχή, το ιδεώδες I είναι πρώτο και το $V(I)$ είναι μία προβολική πολλαπλότητα με $k[V]$ να είναι ισόμορφο με την graded k υποάλγεβρα του $R[T]$ που παράγεται από τα $\phi_i T$ $0 \leqslant i \leqslant n$. Το σώμα συναρτήσεων $k(V)$ του V είναι ισόμορφο με το $k(\phi_1/\phi_0, \dots, \phi_n/\phi_0) \subset K'$ και αφού το τελευταίο εξ υποθέσεως δεν είναι το k, έχει βαθμό υπερβατικότητας 1 και το V είναι μια προβολική καμπύλη. Θα ταυτίζουμε το $k(V)$ με ένα υπόσωμα του K. Ιδιαίτερα αν $k(\phi_1, \dots, \phi_n) = K$ και $\phi_0 = 1$, θα έχουμε ότι $k(V) = K$.

Μπορούμε να δούμε την παραπάνω κατασκευή γεωμετρικά ως εξής: Για μία θέση P του K θεωρούμε μια τοπική παράμετρο t_P του P και θέτουμε

$$e_P = -\min_i \{v_P(\phi_i\}. \tag{VIII.5}$$

Τότε το $t_P^{e_P}\phi_i \in \mathcal{O}_P$ για όλα τα i και $t_P^{e_P}\phi_i \notin P$ για τουλάχιστον ένα i. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε το

$$\Phi(P) := [t_P^{e_P}\phi_0(P) : \cdots t_P^{e_P}\phi_n(P)] \in \mathbb{P}^n. \tag{VIII.6}$$

Είναι σαφές ότι η τιμή $\Phi(P)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής της τοπικής παραμέτρου t_P.

Θεώρημα VIII.4.1. *Έστω K/k ένα σώμα συναρτήσεων και $\phi_0, \dots, \phi_n \in K$ με $\phi_0 \neq 0$ και για τουλάχιστον ένα i απαιτούμε το ϕ_i/ϕ_0 να μην είναι μηδενικό. Η συνάρτηση που ορίσαμε στην εξίσωση (VIII.6) είναι καλά ορισμένη και*

$$V := \{\Phi(P) | P \text{ θέση του } K\}$$

είναι μια προβολική καμπύλη με $k(V) = k(\phi_1/\phi_0, \dots, \phi_n/\phi_0)$. Επιπλέον, αν $a \in V$ και $\mathcal{O}_a$ είναι ο τοπικός δακτύλιος

$$\Phi^{-1}(a) = \{P \in \mathbb{P}_K : \mathcal{O}_a \subset \mathcal{O}_P \text{ και } \mathcal{O}_P \cap \mathcal{O}_a = P_a\}.$$

Απόδειξη. Έστω f, g ομογενή πολυώνυμα στον S, ίδιου βαθμού. Τότε το πηλίκο f/g είναι συνάρτηση πάνω στο αλγεβρικό σύνολο V. Από την άλλη για τις συναρτήσεις $\Phi(f), \Phi(g)$ πάνω στις θέσεις του σώματος συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{\Phi(f)}{\Phi(g)} = \frac{f(\phi_0, \dots, \phi_n)}{g(\phi_0, \dots, \phi_n)} = \frac{f(t^{e_P}\phi_0, \dots, t^{e_P}\phi_n)}{g(t^{e_P}\phi_0, \dots, t^{e_P}\phi_n)} = \frac{\Phi(f)}{\Phi(g)}(P), P \in \mathbb{P}_K,$$

όπου η θέση P είναι τέτοια ώστε να μην μηδενίζεται ο παραπάνω παρονομαστής.

Για κάθε $f \in I(V)$ είναι σαφές από τον ορισμό του I ότι $\mathrm{im}(\phi) \subset V$. Για να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε ένα $a \in V$ και ορίζουμε:

$$\mathcal{O}_a = \left\{ \frac{\Phi(f)}{\Phi(g)} \in K : g(a) \neq 0 \right\} \tag{VIII.7}$$

$$P_a = \left\{ \frac{\Phi(f)}{\Phi(g)} \in \mathcal{O}_a : f(a) = 0 \right\}$$

Αφού $a \in V$, η συνάρτηση $\mathcal{O}_a \to k$ που δίνεται από το $\Phi(f)/\Phi(g) \mapsto f(a)/g(a)$ είναι καλά ορισμένη και έχει πυρήνα P_a. Τα στοιχεία του $\mathcal{O}_a - P_a$ είναι μονάδες, το $\mathcal{O}_a$ είναι τοπικός υποδακτύλιος του K τον οποίο και θα ονομάζουμε τοπικό δακτύλιο στο a. Ο τοπικός δακτύλιος $\mathcal{O}_a$ περιέχεται σε μία θέση P, δηλαδή $\mathcal{O}_a \subset \mathcal{O}_P$ και $P \cap \mathcal{O}_a = P_a$, οπότε $I(\Phi(P)) \subset I(a)$ και $\Phi(P) = a$. □

Δηλαδή για κάθε διατεταγμένη $(n+1)$-άδα από συναρτήσεις $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_n) \subset K$ όπου ένας τουλάχιστον λόγος ϕ_i/ϕ_0 είναι μη σταθερά, έχουμε μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{P}_K \to V$, από το σύνολο θέσεων του K σε μία προβολική καμπύλη $V \subset \mathbb{P}^n$, την οποία και θα καλούμε *προβολική συνάρτηση*. Παρατηρούμε ότι η αντικατάσταση του συνόλου των συναρτήσεων $\phi = \{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ με το $\{y\phi_0, \dots, y\phi_n\}$ για κάποιο $y \in K$, αλλάζει το e_P στο $e'_P = e_P - \nu_P(y)$, αλλά δεν αλλάζει τον ορισμό του $\phi(P)$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας

$$\phi \sim \phi' \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } y \in K : \phi = y\phi'.$$

Ιδιαίτερα οι τοπικοί δακτύλιοι $\mathcal{O}_P$ όπως ορίστηκαν στην (VIII.7) είναι ανεξάρτητοι της επιλογής αντιπροσώπου της Φ. Μία φυσιολογική επιλογή του συνόλου ϕ είναι το $\phi_0 = 1$, το οποίο μπορεί να επιτευχθεί στην κλάση ισοδυναμίας, πολλαπλασιάζοντάς την τυχαία ϕ με $y = \phi_0^{-1}$.

Παράδειγμα VIII.4.2. *Διαλέγουμε ως $\phi = (1, x)$ για κάποια μη σταθερή συνάρτηση $x \in K$. Με αυτό τον τρόπο έχουμε μία απεικόνιση $\mathbb{P}_K \to V = \mathrm{Im}\phi \subset \mathbb{P}^1$. Οι ρίζες του x απεικονίζονται στο $[1:0]$ και οι πόλοι στο $[0:1]$. Με δεδομένο ότι οι ρίζες ενός ομογενούς πολυωνύμου σε δύο μεταβλητές είναι πεπερασμένες, το V ταυτίζεται με το $\mathbb{P}^1$ ή είναι ένα μοναδικό σημείο.*

Αφού όλα τα e_P της εξίσωσης (VIII.5) εκτός από πεπερασμένα είναι 0 ορίζουμε τον διαιρέτη:

$$[\phi] := \sum_{P \in \mathbb{P}_K} e_P P,$$

και γράφουμε

$$\nu_P(\phi) := e_P = -\min_i \nu_P(\phi_i),$$

για $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_n)$. Είναι σαφές ότι αν $\phi \sim \phi'$, τότε $[\phi] = [\phi'] + \mathrm{div}(y)$, δηλαδή οι διαιρέτες $[\phi], [\phi']$ είναι ισοδύναμοι modulo κύριο διαιρέτη. Επίσης, ο διαιρέτης $[\phi]$ εξαρτάται από τον διανυσματικό χώρο $\langle \phi_0, \dots, \phi_n \rangle$ και όχι από την επιλογή της βάσης $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν το ϕ_i αντικατασταθεί από το $\phi' = \alpha\phi_i$ ή από το $\phi' = \phi_i + \alpha\phi_j$ για $j \neq i$, $\alpha \in k$, τότε $\nu_P(\phi') \geqslant \nu_P(\phi)$ και αφού οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε και την ανάποδη ανισότητα, οπότε $\nu_P(\phi') = \nu_P(\phi)$.

Αν οι συναρτήσεις $\phi_0, \dots, \phi_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε η εικόνα βρίσκεται μέσα σε ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{P}^n$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\phi_0, \dots, \phi_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μία προβολική συνάρτηση $\phi : \mathbb{P}_K$ ορίζει μια συνάρτηση

$$\phi^* : k(V) \to K,$$

η οποία δίνεται από $\phi^*(f/g) = \Phi(f)/\Phi(g)$, όπου f, g είναι ομογενή πολυώνυμα ίδιου βαθμού. Αν ϕ^* είναι ισομορφισμός, τότε η ϕ θα λέγεται αμφίρρητη. Αν $\phi_1 : \mathbb{P}_{K_1} \to V$ και $\phi_2 : \mathbb{P}_{K_2}$ είναι αμφίρητες συναρτήσεις στην προβολική καμπύλη V, τότε τα σώματα K_1, K_2 μπορούν να ταυτιστούν μέσω του ισομορφισμού σωμάτων $(\phi_1^*)^{-1}\phi_2^*$. Αν ξεκινήσουμε με μία προβολική καμπύλη $V \subset \mathbb{P}^n \setminus V(X_0)$, η συνάρτηση $\mathbb{P}_{k(V} \to V$ είναι η προβολική συνάρτηση που δίνεται από την $\phi = (1, X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0)$, η οποία είναι αμφίρρητη.

Αν έχουμε το $x \in K$ να είναι μια separating μεταβλητή, τότε το $K/k(x)$ είναι μια αλγεβρική επέκταση η οποία παράγεται από ένα στοιχείο $y \in K$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $\phi = (1, x, y)$ είναι μια αμφίρρητη συνάρτηση στο $\mathbb{P}^2$. Το αλγεβρικό σύνολο V σε αυτή την περίπτωση είναι ένα επίπεδο μοντέλο του σώματος συναρτήσεων.

Θα λέμε ότι η ϕ είναι effective, αν ο διανυσματικός χώρος $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle \subset K$ περιέχει το σώμα των σταθερών k. Σε αυτή την περίπτωση ο διαιρέτης $[\phi] \geqslant 0$.

Κάθε συνάρτηση ϕ είναι ισοδύναμη με μία effective, αφού μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με ϕ_0^{-1} να καταλήξουμε με $\phi_0 = 1$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση ϕ είναι effective, τότε έχουμε την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία: Για κάθε $P \in \mathbb{P}_K$, η πρώτη συντεταγμένη του $\phi(P)$ είναι η $t_P^{e_P}$, η οποία είναι 0 αν και μόνο αν $e_P > 0$. Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση ο $[\phi]$ περιγράφει την τομή του υπερεπιπέδου $X_0 = 0$ με την εικόνα της ϕ. Υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος τέτοια σημεία στην τομή.

Για μια γενική effective birational map έχουμε

$$1 = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i$$

για κάποια $a_i \in k$. Τότε ο divisor $[\phi]$ δίνει τον μηδενισμό του υπερεπιπέδου $\ell = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i$. Το σύνολο μηδενισμού της γραμμικής μορφής λέγεται το «υπερεπίπεδο στο άπειρο».

Αφού έχουμε

$$\phi^* \left(\frac{X_i}{\ell} \right) = \frac{\Phi(X_i)}{\Phi(\ell)} = \frac{\phi_i T}{T} = \phi_i.$$

ορίζουμε $X_i^* = \phi_i$ και για κάθε ομογενές πολυώνυμο $g(X_0, \ldots, X_n)$ βαθμού n ορίζουμε

$$g^* := \phi^* \left(\frac{g}{\ell^d} \right) = g(\phi_0, \ldots, \phi_n) \in K.$$

Το g^* εξαρτάται από την επιλογή υπερεπιπέδου στο άπειρο και αν αντικαταστήσουμε το ℓ με ℓ_1, τότε το g^* θα πρέπει να αντικατασταθεί με το g^*/ℓ_1^*.

Ένα σημείο $\phi(P)$ ανήκει στο υπερεπίπεδο στο άπειρο αν και μόνο αν $e_P > 0$, δηλαδή αν κάποιο ϕ_i έχει πόλο στο P. Μπορούμε πάντα να αντικαταστήσουμε την ϕ με μια ισοδύναμη ϕ' ώστε $v_P([\phi']) = 0$. Όταν αυτό συμβαίνει, λέμε ότι η ϕ είναι κανονικοποιημένη στο P.

Όταν η ϕ είναι effective, το σύνολο των διαιρετών

$$\{[\phi]_f : f \in \langle \phi \rangle\}$$

είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως ένα "base point free linear system". Είναι σαφές ότι $\langle \phi \rangle \subset \mathcal{L}([\phi])$. Στην περίπτωση που $\langle \phi \rangle = \mathcal{L}([\phi])$, το linear system θα λέγεται complete.

Αφού κάθε καμπύλη $V \subset \mathbb{P}^n$ δίνεται ως εικόνα μιας φυσικής συνάρτησης από τις θέσεις του σώματος συναρτήσεων στο $\mathbb{P}^n$, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι κάθε θέση αντιστοιχεί σε ένα σημείο της καμπύλης. Η απεικόνιση είναι επί και το ερώτημα είναι αν είναι και 1-1.

Έστω λοιπόν ένα σώμα συναρτήσεων και $\phi : \mathbb{P}_K \to V$ μια προβολική συνάρτηση με $\phi(P) = a$ για κάποια θέση $P \in \mathbb{P}_K$. Θα λέμε ότι το ϕ είναι μη-ιδιόμορφο στο P αν και μόνο αν $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_P$. Σε μια τέτοια περίπτωση η ϕ θα είναι 1-1 σε κάποιο τέτοιο σημείο P. Επιπλέον, αφού $\mathcal{O}_a \subset k(V)$ και το σώμα πηλίκων του $\mathcal{O}_P$ είναι K, έχουμε:

Πρόταση VIII.4.3. *Αν η συνάρτηση $\phi : \mathbb{P}_K \to k(V)$ είναι μη ιδιόμορφη σε κάθε σημείο, τότε είναι αμφίρρητη.*

Θα λέμε ότι η ϕ είναι μια εμφύτευση (embedding) αν και μόνο αν είναι μη ιδιόμορφη σε κάθε σημείο. Είναι σαφές ότι V είναι μη ιδιόμορφη στο a αν και μόνο αν $\mathcal{O}_a$ είναι διακριτός δακτύλιος εκτίμησης.

Θεώρημα VIII.4.4. *Μια προβολική συνάρτηση $\phi : \mathbb{P}_K \to V \subset \mathbb{P}^n$ είναι μη ιδιόμορφη στο $a \in V$ αν και μόνο αν ο $\mathcal{O}_a$ περιέχεται σε έναν μοναδικό δακτύλιο εκτίμησης $\mathcal{O}_P$ του K και επίσης περιέχει μια τοπική παράμετρο (uniformizer) t στη θέση P.*

Απόδειξη. Δείτε το [1, πορ. 4.3.3]. □

Αν το ιδεώδες $I(V)$ του προβολικού αλγεβρικού συνόλου V παράγεται από τα ομογενή πολυώνυμα $\{f_1, \dots, f_r\}$, με $\deg f_i = d_i$, και υπό την επιπλέον προϋπόθεση $X_0(a) \neq 0$ (η οποία μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με μια άλλη επιλογή συντεταγμένων), τότε θεωρούμε τον πίνακα

$$f_{ij} := \frac{1}{X_0^{d_i - 1}} \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \text{ για } 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Θεώρημα VIII.4.5. *Η προβολική καμπύλη $V \subset \mathbb{P}^n$ με σώμα συναρτήσεων K είναι μη ιδιόμορφη στο $a \in V$ με $X_0(a) \neq 0$ αν και μόνο αν ο πίνακας $f_{ij}(a)$ έχει rank $n-1$.*

Απόδειξη. Ο παραπάνω ορισμός είναι ο συνηθισμένος ορισμός του μη ιδιόμορφου σημείου, όπου απαιτούμε την εγκάρσια τομή των υπερεπιφανειών $V(f_i)$. Η ισοδυναμία αυτού του ορισμού με τον ορισμό των εκτιμήσεων μπορεί να βρεθεί στο [1, Θεώρ. 4.3.5]. □

θα δώσουμε έναν χαρακτηρισμό των ιδιομορφιών σε όρους των υποχώρων του $\langle \phi \rangle$. Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $\langle \phi \rangle \subset \mathcal{L}([\phi])$. Για έναν divisor $D \geqslant 0$ θέτουμε

$$\mathcal{L}_\phi(D) := \langle \phi \rangle \cap \mathcal{L}([f] - D). \tag{VIII.8}$$

Παρατηρούμε ότι $\langle \phi \rangle = \mathcal{L}_\phi(0)$ και ότι αν $D_1 \leqslant D_2$, τότε $\mathcal{L}_\phi(D_1) \supset \mathcal{L}_\phi(D_2)$. Ιδιαίτερα για κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_K$ έχουμε την filtration

$$\langle \phi \rangle = \mathcal{L}_\phi(0) \supset \mathcal{L}_\phi(P) \supset \mathcal{L}_\phi(2P) \supset \cdots,$$

την οποία και λέμε «osculation filtration» στο P. Παρατηρούμε ότι από το λήμμα VIII.1.26 έχουμε:

$$\dim \frac{\mathcal{L}_\phi(nP)}{\mathcal{L}_\phi\big((n+1)P\big)} \leqslant 1$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f \langle \phi \rangle$ με $\nu_P(f) = n - \nu_P(\phi)$. Εξ ορισμού, υπάρχει υπάρχει πάντα μια συνάρτηση $f \in \langle \phi \rangle$ με $\nu_P(f) = \nu_P(\phi)$, συνεπώς το $\mathcal{L}_\phi(P)$ είναι πάντα ένα υπερεπίπεδο του $\langle \phi \rangle$.

Παρατηρούμε ότι ο υπόχωρος $\mathcal{L}_\phi(D)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης και ότι αν $\phi' = y\phi$ είναι μια ισοδυναμία, τότε $y\mathcal{L}_\phi(D) = \mathcal{L}_{\phi'}(D)$. Αφού δε $\mathcal{L}_\phi(D)$ είναι ένα σημείο - υπερεπίπεδο του δυϊκού χώρου $\langle \phi \rangle^*$, η συνάρτηση

$$P \to \mathcal{L}_\phi(D)$$

είναι μια προβολική συνάρτηση η οποία είναι ισοδύναμη με την ϕ.

Πρόταση VIII.4.6. *Έστω K σώμα συναρτήσεων, $\phi : \mathbb{P}_K \to V \subset \mathbb{P}^n$ είναι μια προβολική συνάρτηση. Έστω $P \in \mathbb{P}_K$. Η συνάρτηση ϕ είναι nonsingular στο P αν και μόνο αν για κάθε σημείο $Q \in \mathbb{P}_K$ έχουμε $\operatorname{codum} \mathcal{L}_\phi(P+Q) = 2$.*

Απόδειξη. Η διατύπωση της πρόταση εξαρτάται μόνο από την κλάση ισοδυναμίας του $\langle\phi\rangle$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ϕ είναι effective και normalized στο P. Έστω $Q \neq P$. Τότε $\phi(P) \neq \phi(Q)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{P}^n$ που να περιέχει το $\phi(P)$ αλλά όχι το $\phi(Q)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το $\mathcal{L}_\phi(P) \neq \mathcal{L}_\phi(Q)$. Αφού και τα $\mathcal{L}_\phi(P)$ και $\mathcal{L}_\phi(Q)$, έχουμε ότι $\mathcal{L}_\phi(P+Q) = 2$ αν και μόνο αν $\phi(P) \neq \phi(Q)$.

Επίσης έχουμε ότι $\mathcal{O}_a$ περιέχει μια τοπική παράμετρο στο P, αν και μόνο αν $\mathcal{L}_\phi(2P) \subsetneq \mathcal{L}_\phi(P)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $\mathrm{codim}\mathcal{L}_\phi(2P) = 2$. Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα VIII.4.4. □

Ας υποθέσουμε ότι $\langle\phi\rangle = \mathcal{L}(D)$ για κάποιον διαιρέτη D. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\phi = \phi_D$. Υποθέτουμε ότι $\dim\mathcal{L}(D) \geqslant 2$, ώστε να έχουμε συνάρτηση στο $\mathbb{P}^n$, $n \geqslant 1$. Εξ ορισμού, έχουμε ότι $\nu_P(\phi_D) \leqslant \nu_P(D)$ για κάθε $P \in \mathbb{P}_K$, συνεπώς $[\phi_D] \leqslant D$. Η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{L}(D)$ με $\nu_P(f) = -\nu_P(D)$.

Λήμμα VIII.4.7. *Υποθέτουμε ότι το K έχει γένος $g > 0$, και $D \in \mathrm{Div}(K)$ ώστε να ισχύει είτε $\deg(D) \geqslant 2g$ είτε D είναι ο κανονικός διαιρέτης. Τότε $D = [\phi_D]$.*

Απόδειξη. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ότι $\dim\mathcal{L}(D) > \mathcal{L}(D-P)$ για κάποιο P. Αυτό είναι άμεσο από το θεώρημα Riemann-Roch, αν το $D-P$ είναι nonspecial και ιδιαίτερα αν $\deg(D) \geqslant 2g$. Στην περίπτωση που D είναι ο κανονικός διαιρέτης και πάλι το θεώρημα Riemann-Roch δίνει ότι

$$\dim\mathcal{L}(D-P) = 2g-3-g+1+\dim\mathcal{L}(P).$$

Αφού $g > 0$, έχουμε ότι $\dim\mathcal{L}(P) = 1$ και συνεπώς $\dim\mathcal{L}(D-P) = g-1 < \dim\mathcal{L}(D) = g$. □

Όταν ο D είναι ο κανονικός διαιρέτης, μιλάμε για την κανονική εμφύτευση.

Θεώρημα VIII.4.8. *Υποθέτουμε ότι το σώμα συναρτήσεων K έχει γένος g και $D \in \mathrm{Div}(K)$. Αν $\deg(D) \geqslant 2g+1$, τότε η ϕ_D είναι ένα embedding. Αν το D είναι κανονικός διαιρέτης, τότε το ϕ_D είναι μια embedding εκτός αν K περιέχει ένα ρητό υπόσωμα $k(x)$ με $[K : k(x)] \leqslant 2$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\phi = \phi_D$. Έχουμε ότι $\mathcal{L}_\phi(D)(P+Q) = \mathcal{L}(D-P-Q)$ για κάθε δύο θέσεις $P, Q \in \mathbb{P}_K$. Αν $\deg(D-P-Q) \geqslant 2g-1$, τότε το $D-P-Q$ είναι nonspecial. Συνεπώς από το θεώρημα Riemann-Roch έχουμε $\mathrm{codim}\mathcal{L}_\phi(P+Q) = 2$ και το θεώρημα έπεται.

Αν ο D είναι ένας κανονικός διαιρέτης και πάλι το θεώρημα Riemann-Roch δίνει ότι

$$\ell(D-P-Q) = 2g-4-g+1+\ell(P+Q) = g-3+\ell(P+Q).$$

Αφού $\ell(D) = g$, έχουμε ότι η ϕ είναι μια embedding εκτός αν $\ell(P+Q) > 1$. Αλλά αν υπάρχει μια μη σταθερή συνάρτηση $x \in \mathcal{L}(P+Q)$, τότε ο πολικός της divisor έχει βαθμό το πολύ δύο, συνεπώς $[K : k(x)] \leqslant 2$. □

Παρατήρηση VIII.4.9. *Στην περίπτωση που το K περιέχει ένα ρητό σώμα συναρτήσεων $k(x)$ με βαθμό $[K : k(x)] \leqslant 2$, τότε η κανονική συνάρτηση δεν είναι embedding. Πράγματι η κανονική συνάρτηση δεν ορίζεται εκτός αν $g \geqslant 2$, στην οποία περίπτωση $[K : k(x)] = 2$. Σε αυτή την περίπτωση*

$$\Omega_K(0) = \langle \omega, \phi_1(x)\omega, \dots, \phi_{g-1}(x)\omega \rangle,$$

όπου ω είναι μια διαφορική μορφή και τα $\phi_i(x)$ ανήκουν όλα σε ένα ρητό υπόσωμα του $k(x)$. Δηλαδή

$$\mathcal{L}([\omega]) = \langle 1, \phi_1(x), \dots, \phi_{g-1}(x) \rangle,$$

και συνεπώς η εικόνα της κανονικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{P}^1$.

VIII.5 Weierstrass points

VIII.5.1 Διαφορίσεις του Hasse

Ορισμός VIII.5.1. *Μια διαφόριση* $D = (D^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ *του* F *είναι μια ακολουθία απεικονίσεων*

$$D^{\nu} : F \to F$$

τέτοια ώστε

1. $D^{(0)} = \mathrm{Id}_F$
2. $D^{(\nu)}|_K = 0$ *για κάθε* $\nu \geqslant 0$
3. *Για κάθε* $x, y \in F$ *και για κάθε* $\nu \in \mathbb{Z}$ *ισχύει*

$$D^{(\nu)}(x+y) = D^{(\nu)}(x) + D^{(\nu)}(y)$$

$$D^{(\nu)}(xy) = \sum_{\mu=0}^{\nu} D^{(\mu)}(x)D^{(\nu-\mu)}(y)$$

Επίσης, η διαφόριση λέγεται iterative όταν για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ *ισχύει*

$$D^{(\mu)}D^{(\nu)} = \binom{\mu+\nu}{\nu} D^{(\mu+\nu)}.$$

Από τον ορισμό της κλασικής διαφόρισης διαφέρουν οι ορισμοί κατά διωνυμικούς συντελεστές που έχουν μπροστά τους διωνυμικούς συντελεστές και αυτό γίνεται ώστε οι συνθέσεις διαφορίσεων να μην εξαφανίζονται στη χαρακτηριστική $p > 0$.

Λήμμα VIII.5.2. *Για κάθε διαχωρίσιμο στοιχείο* $x \in F$ *(δηλαδή στοιχείο ώστε* $F/K(x)$ *να είναι διαχωρίσιμη επέκταση) υπάρχει διαφόριση* $D_x = (D_x^{\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ *τέτοιο ώστε* $D_x^{(1)}(x) = 1$ *και* $D_x(x)^{(n)} = 0$ *για* $\nu \geqslant 2$*. Η παράγωγος αυτή θα λέγεται η παράγωγος modulo* x.

Απόδειξη. Ορίζουμε την iterative παραγώγιση με $D_x^{(1)} = \frac{d}{dx}$. □

Λήμμα VIII.5.3. *Έστω* P *θέση του* F/K *και* π*-πρώτο στοιχείο. Αν*

$$x = \sum_i a_i p^i : a_i \in K, \ \text{τότε } D_{\pi}^{(\nu)}(x) = \sum_i \binom{i}{\nu} a_i \pi^{i-\nu}.$$

Θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση των [6] Έστω K/k ένα σώμα συναρτήσεων και $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_n)$ μια προβολική συνάρτηση, και έστω $\tau : K \to K$ ένας μονομορφισμός. Γνωρίζουμε ότι $[K : k(\tau(x))] < \infty$ για κάθε $x \in K \setminus k$, συνεπώς και το $[K : \tau(K)] < \infty$. Ορίζουμε $\deg\tau = [K : \tau(K)]$.

Λήμμα VIII.5.4. *Θα συμβολίζουμε με* $\tau(\phi)$*, τη συνάρτηση* $(\tau(\phi_0), \dots, \tau(\phi_n)) : \mathbb{P}_K \to \mathbb{P}^n$*. Έχουμε ότι* $\deg\tau(\phi) = \deg\tau \deg\phi$.

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $(\tau(\phi_0), \dots, \tau(\phi_n))$ είναι όλες στο $\tau(K)$ και ορίζουν μια συνάρτηση

$$\phi' : \tau(K) \to \mathbb{P}^n.$$

Το $\tau : K \to \tau(K)$ είναι ένας ισομορφισμός, οπότε κάθε θέση του $\tau(K)$ είναι της μορφής $\tau(P)$ για κάποια θέση P του K. Συνεπώς, οι ϕ και ϕ' έχουν την ίδια εικόνα στο $\mathbb{P}^n$, οπότε $\deg\phi' = \deg\phi$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα έρχεται από τη σύνθεση με την τ. □

Για κάθε διαχωρίσιμη μεταβλητή $s \in K$, θεωρούμε την παράγωγο Hasse ως προς s και σχηματίζουμε τον πίνακα $H = (H(\phi, s, \tau)) = (h_{ij})$ για $0 \leqslant i \leqslant n$ και $j = -1, 0, 1, 2, \ldots$, όπου

$$h_{ij} = \begin{cases} \tau(\phi_i) & \text{αν } j = -1 \\ D_s^{(j)}(\phi_i) & \text{για } j = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Θα συμβολίζουμε με $H^{(j)}$ τη στήλη του H όπου η i-γραμμή είναι η h_{ij}. Συνεπώς το $H^{(-1)}$ είναι η πρώτη στήλη της οποίας η i-γραμμή είναι η h_{ij}. Μας ενδιαφέρουν οι στήλες $H^{(j)}$ οι οποίες δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών. Υπάρχουν το πολύ $n+1$ τέτοιοι δείκτες, αφού ο πίνακας H έχει συνολικά $n+1$ γραμμές. Αφού δεν είναι όλα τα ϕ_i μηδέν, ο πρώτος τέτοιος δείκτης είναι ο -1. Θα συμβολίζουμε τους υπόλοιπους δείκτες με $j_1, j_2, \ldots, j_m$. Στην περίπτωση που $\tau = 1$ έχουμε ότι $j_1 > 0$. Αντιστρόφως, έστω ότι οι δύο πρώτες στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε $\tau(\phi) = y\phi$ για κάποιο $y \in K$, και συνεπώς $y = \tau(\phi_0)/\phi_0$. Αν θεωρήσουμε την ισοδύναμη συνάρτηση $\phi' = \phi_0^{-1}\phi$, τότε έχουμε ότι $\tau(\phi_i') = \phi_i'$ για όλα τα i. Συνεπώς, καταλήγουμε στο

Λήμμα VIII.5.5. *Αν η ϕ είναι αμφίρρητη, τότε $j_1 > 0$ αν και μόνο αν $\tau = 1$.*

Στην περίπτωση που το $m < n$ ορίζουμε $j_l = j_{l-1} + 1$ για $m < l \leqslant n$. θα αποδείξουμε ότι $m = n$.

Λήμμα VIII.5.6. *Αν $1 \leqslant l \leqslant n$ και $j < j_1$, τότε $H^{(j)}$ είναι ένας K-γραμμικός συνδυασμός των $H^{(-1)}, H^{(j_1)}, \ldots, H^{(j_{l-1})}$.*

Ορίζουμε $J_s(\phi, \tau) = (j_1, \ldots, j_n)$. Θα ονομάζουμε τα j_i τις τ-τάξεις της συνάρτησης ϕ ή απλά τις τ-τάξεις, όταν $\tau = 1$. Επίσης γράφουμε $J_s(\phi) = J_s(\phi, 1)$. Θα αποδείξουμε ότι αυτοί οι δείκτες εξαρτώνται μόνο από τον διανυσματικό χώρο $\langle\phi\rangle$, είναι ανεξάρτητοι της επιλογής της τοπικής παραμέτρου s και είναι επίσης αναλλοίωτοι αν το ϕ αλλαχθεί από το $y\phi$ για κάποιο $y \in K$. Αν η χαρακτηριστική είναι 0, τότε οι παραπάνω δείκτες θα είναι απλά οι $(1, 2, \ldots, n)$ όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια. Στην πεπερασμένη χαρακτηριστική η κατάσταση είναι περισσότερο πολύπλοκη.

Για κάθε ακολουθία $J = j_1, j_2, \ldots, \ldots$ από μη αρνητικούς ακέραιους, θεωρούμε τον υποπίνακα H^J όπου η πρώτη του στήλη είναι η $H^{(-1)}$ και η $(l+1)$-στήλη είναι $H^{(j_l)}$ και ορίζουμε

$$w_s(\phi, \tau) := \det H^{J_s(\phi,\tau)}. \tag{VIII.9}$$

Η ποσότητα $w_s(\phi) - w_s(\phi, 1)$ ονομάζεται η ορίζουσα Wronski ως προς s.

Λήμμα VIII.5.7. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Αν* $\phi' := \sum_j a_j \phi_j$ *για* $0 \leqslant i \leqslant n$, *όπου* $a_{ij} \in A$ *και ο πίνακας* $A := (a_{ij})$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε*
$$J_s(\phi', \tau) = J_s(\phi, \tau)$$
και
$$w_s(\phi', \tau) = \det(A) w_s(\phi, \tau).$$

2. *Για κάθε μη-μηδενική συνάρτηση* $y \in K$ *έχουμε*
$$J_s(y\phi, \tau) = J_s(\phi, \tau)$$
και
$$w_s(y\phi, \tau) = \tau(y) y^n w_s(\phi, \tau).$$

3. *Για κάθε διαχωρίσιμη μεταβλητή* $t \in K$ *έχουμε*
$$J_s(\phi, \tau) = J_s(\phi, \tau)$$
και
$$w_t(\phi, \tau) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{j_1 + \cdots + j_n} w_s(\phi, \tau).$$

Απόδειξη. 1. Αν $H' = H(y\phi, s, \tau)$, τότε $H' = AH$, γιατί οι παράγωγοι Hasse όπως και η συνάρτηση τ είναι όλες k-γραμμικές.

2. Θέτουμε $\widetilde{H} = H(y\phi, s, \tau)$. Από τον κανόνα γινομένου έχουμε
$$\widetilde{H}^{(-1)} = \tau(y) H^{(-1)} \tag{VIII.10}$$
$$\widetilde{H}^{(j)} = y H^{(j)} + \sum_{k=1}^{j} D_s^{(k)}(y) H^{(j-k)} \text{ για } j \geqslant 0.$$

Ιδιαίτερα οι K-υπόχωροι που παράγονται από τις πρώτες j-στήλες των H και $\widetilde{H}$ ταυτίζονται για κάθε j και καταλήγουμε στο
$$J_s(\phi, \tau) = J_s(y\phi, \tau).$$
Επιπλέον ο ορισμός των j_l και οι σχέσεις (VIII.10) μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός πάνω τριγωνικού πίνακα U με στοιχεία στο K και διαγώνια στοιχεία $(\tau(y), y, \ldots, y)$ ώστε
$$\widetilde{H}^{J_s(\phi,\tau)} = H^{J_s(\phi,\tau)} U \tag{VIII.11}$$
το οποίο αποδεικνύει το 2.

3. Η απόδειξη είναι παρόμοια μόνο πού θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας αντί του κανόνα του γινομένου. Θέτουμε $\widetilde{H} = H(\phi, \tau, \tau)$ και έχουμε συναρτήσεις d_k $1 \leqslant k < j$ ώστε
$$\widetilde{H}^{(-1)} = H^{(-1)}$$
$$\widetilde{H}^{(j)} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^j H^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} d_k J^{(k)} \text{ για } j \geqslant 0.$$

Και πάλι οι K-υπόχωροι που παράγονται από τις πρώτες j στήλες των H και $\widetilde{H}$ ταυτίζονται, οπότε $J_s(\phi,\tau) = J_t(\phi,\tau)$. Και πάλι έχουμε μια εξίσωση όπως η (VIII.11), όπου τώρα ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός με $u_{00} = 1$ και $u_{ll} = (ds/dt)^{j_l}$ για $1 \leqslant l \leqslant n$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Θα γράφουμε $J(\phi,\tau) = J_s(\phi,\tau)$ για κάθε διαχωρίσιμη μεταβλητή s και επίσης θέτουμε

$$j(\phi,\tau) = j_1 + \cdots + j_n.$$

Λήμμα VIII.5.8. *Θεωρούμε την προβολική συνάρτηση $\phi = (\phi_0,\ldots,\phi_n)$. Έστω $P \in \mathbb{P}_K$ μια θέση, t μια τοπική παράμετρος στο P και υποθέτουμε ότι τα ϕ_i ορίζονται στο P και τα ϕ_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπέρ το k. Τότε ο πίνακας $h_{ij}(P) = D_t^{(j)}(\phi_i)(P)$ $0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j$ έχει k-τάξη $n+1$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν όλα τα ϕ ορίζονται στο P, τότε και οι Hasse παράγωγοι ορίζονται. Επίσης, αν $a_0,\ldots,a_n \in k$, τότε $\sum_i a_i h_{ij}(P)$ είναι ο συντελεστής του t^j στο ανάπτυγμα Laurent του $\sum_i a_i\phi_i(P)$. Αφού κάθε μη-μηδενική συνάρτηση έχει μη-μηδενικό ανάπτυγμα Laurent στο P, έχουμε ότι κάθε σχέση εξάρτησης στα $h_{ij}(P)$ δίνει μια σχέση εξάρτησης στα ϕ_i. □

Πόρισμα VIII.5.9. *Αν $w_s(\phi,\tau) = 0$, τότε τα ϕ_i είναι γραμμικά εξαρτημένα πάνω από το k.*

Απόδειξη. Διαλέγουμε μια θέση $P \in \mathbb{P}_K$. Αντικαθιστώντας την ϕ με μια ισοδύναμη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το s είναι μια τοπική παράμετρος στο P και ότι η ϕ είναι normalized στο P. Εξ ορισμού, το $w_s(\phi,\tau) = 0$ ακριβώς τότε όταν η K-τάξη του πίνακα $H = H(\phi,s,\tau)$ είναι μικρότερη του $n+1$ και τότε υπάρχουν συναρτήσεις $x_0,\ldots,x_n$ όχι όλες μηδέν, ώστε

$$\sum_{i=0}^{n} x_i D_s^{(j)}(\phi_i) = 0, j = 0,1,\ldots$$

Διώχνωντας τους παρονομάστες μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_i ορίζονται στο P και δεν είναι όλα μηδέν εκεί. Υπολογίζοντας την σχέση εξάρτησης στο P, έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα VIII.5.10. *Θεωρούμε τη γνήσια αύξουσα ακολουθία δεικτών $j'_1 < \cdots < j'_n$ και έστω s μια διαχωρίσιμη μεταβλητή, και έστω $\det D_s^{j'_l}(\phi_i) \neq 0$. Αν $J(\phi,\tau) = (j_1,\ldots,j_n)$, τότε $j_l \leqslant j'_l$ για όλα τα l.*

Απόδειξη. Αυτό είναι σαφές από το λήμμα VIII.5.6, αφού για κάθε ℓ ο μη-μηδενισμός της ορίζουσας εξασφαλίζει ότι η K-τάξη του $H^{(j'_1,\ldots,j'_l)}$ είναι $l+1$. □

Υπάρχει μια στενή σχέση ανάμεσα στο $J(\phi)$ και το $J(\phi,\tau)$ για $\tau \neq 1$. Αν s είναι μια διαχωρίσιμη μεταβλητή και $J(\phi) := (j_1,\ldots,j_n)$, $H := H(\phi,s,1)$ και $\widetilde{H} := H(\phi,s,\tau)$. Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι αμφίρρητη. Αφού ο $H^{J(\phi)}$ είναι μη-ιδιόμορφος, υπάρχει ένας ελάχιστος $m \geqslant 1$ ώστε

$$\widetilde{H}^{(-1)} \in \langle H^{(-1)}, H^{(j_1)}, \ldots, H^{(j_m)}\rangle.$$

Συνεπώς για $j \geqslant j_m$

$$\langle \widetilde{H}^{(-1)}, \widetilde{H}^{(0)}, \ldots, \widetilde{H}^{(j)}\rangle = \langle H^{(-1)}, H^{(0)}, \ldots, H^{(j)}\rangle.$$

Λήμμα VIII.5.11. *Αν $J(\phi) = (j_1,\ldots,j_n)$, $\tau \neq 1$ και ϕ είναι αμφίρρητη, τότε υπάρχει ακέραιος $m \geqslant 1$ ώστε*

$$J(\phi,\tau) = (0, j_1, \ldots, j_{m-1}, j_{m+1}, \ldots, j_n).$$

Ο μη-μηδενισμός της $w_s(\phi,\tau)$ και οι κανόνες μετασχηματισμού μας επιτρέπουν να ορίζουμε έναν αναλλοίωτο διαιρέτη ως εξής:

Ορισμός VIII.5.12. *Για μια διαχωρίσιμη μεταβλητή s θέτουμε*

$$W_s(\phi,\tau) := [w_s(\phi,\tau)] + [\tau(\phi)] + n[\phi] + j(\phi,\tau)[ds].$$

Πρόταση VIII.5.13. *Ο διαιρέτης $W_s(\phi,\tau)$ είναι ανεξάρτητος του s και εξαρτάται μόνο από το τ και την κλάση ισοδυναμίας της φ.*

Απόδειξη. Έστω $a_{ij} \in k, y \in K$ και t μια διαχωρίσιμη μεταβλητή. Θέτουμε $\phi_i' := \sum_j a_{ij}\phi_j$ και έστω $\phi' := (\phi_0',\dots,\phi_n')$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} w_t(y\phi',\tau) &= \tau(t)y^n w_t(\phi',\tau) = \det(a_{ij})\tau(y)y^n w_t(\phi,\tau)\\ &= \det(a_{ij})\tau(y)y^n (ds/dt)^{j(\phi,\tau)} w_s(\phi,\tau). \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_t(y\phi',\tau) &= [w_t(y\phi',\tau)] + [\tau(y\phi')] + n[y\phi'] + j(\phi,\tau)[dt]\\ &= [\tau(y)] + n[y] + j(\phi,\tau)([ds]-[dt]) + [w_s(\phi,\tau)] - [\tau(y)] + [\tau(\phi')]\\ &\quad - n[y] + n[\phi'] + j(\phi,\tau)[dt]\\ &= [w_s(\phi,\tau)] + [\tau(\phi)] + n[\phi] + j(\phi,\tau)[ds]\\ &= W_s(\phi,\tau). \end{aligned}$$

□

Θα γράφουμε $W(\phi,\tau) = W_s(\phi,\tau)$ για κάποια διαχωρίσιμη μεταβλητή και επιλογή κλάσης ισοδυναμίας της φ. Επίσης, θα γράφουμε $W(\phi) := W(\phi,1)$.

Ορισμός VIII.5.14. *Το $W(\phi,\tau)$ θα το ονομάζουμε τον διαιρέτη του Weierstrass του φ ως προς το τ.*

Θεώρημα VIII.5.15. *Ο divisor $W(\phi,\tau)$ είναι μη-αρνητικός και έχει βαθμό*

$$\deg W(\phi,\tau) = (\deg\tau + n)\deg\phi + (2g_K - 2)j(\phi,\tau).$$

,

Απόδειξη. Προκύπτει από τον ορισμό και το λήμμα VIII.5.4. □

Ορισμός VIII.5.16. *Τα σημεία P στο στήριγμα του $W(\phi,\tau)$ θα λέγονται τα σημεία του Weierstrass του φ ως προς τ. Σημεία που δεν είναι του Weierstrass θα λέγονται συνήθη. Παρατηρούμε ότι για φ, τ όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος σημεία είναι συνήθη.*

VIII.5.2 Γεωμετρικές ιδιότητες των σημείων του Weierstrass

Υποθέτουμε ότι η φ είναι κανονικοποιημένη στο $P \in \mathbb{P}_K$, t είναι μια τοπική παράμετρος στο P και έστω $H(P) := H(\phi,t,1)(P)$ είναι ο πίνακας με στοιχεία στο k που παίρνουμε υπολογίζοντας κάθε στοιχείο του $H(f,t,1)$ στο P. Όπως και πριν, θεωρούμε τους δείκτες $j_1' < \dots < j_n'$ για τους οποίους η στήλη $H^{(j_l')}(P)$ δεν είναι ένας k-γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων στηλών και ορίζουμε $J(\phi)(P) = (j_1',\dots,j_n')$. Θα ονομάζουμε τα j_l' τις τάξεις του φ στο P. Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες στήλες του H(P) είναι ίσες, αφού $\tau = 1$ και είναι και μη μηδενικές, αφού η φ είναι κανονικοποιημένη στο P, οπότε $j_1' > 0$.

Έστω $J := (j_1,\dots,j_n)$ οι τάξεις της φ και θέτουμε $J' := J(\phi)(P)$. Αν είχαμε ότι $j_l' < j_l$ για κάποιο l, τότε οι στήλες της $H^{J'}$ θα ικανοποιούσαν κάποια K-σχέση εξάρτησης. Διώχνοντας τους παρονομαστές και υπολογίζοντας στο P έχουμε μία μη τετριμμένη k-σχέση εξάρτησης στις στήλες της $H^{J'}(P)$ το οποίο αντιβαίνει τον ορισμό των j_l'. Συνεπώς έχουμε ότι $j_l \leqslant j_l'$ για κάθε l. Επίσης, αν η ϕ είναι κανονικοποιημένη στο P και t μια τοπική παράμετρος στο P, τότε είναι σαφες ότι

$$w_t(\phi)(P) = \det H^J(P),$$

και η $w_t(\phi)$ μηδενίζεται στο P ακριβώς όταν $j_l < j_l'$ για κάποιο l.

Λήμμα VIII.5.17. *Έχουμε ότι $j_l \leqslant j_l'$ για όλα τα l. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. $j_l' = j_l$ *για όλα τα* l.
2. $w_t(\phi)(P) \neq 0$.
3. $v_P(W(\phi)) = 0$.

Οι τάξεις της ϕ στο P έχουν την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία: Αν φέρουμε τον πίνακα $H(P)$ σε μια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, έχουμε μια βάση $(\phi_0', \dots, \phi_n')$ της $\langle \phi \rangle$ ώστε για την τοπική παράμετρο t στο P να έχουμε:

$$D_t^{(j)}(\phi_l')(P) = 0 \text{ για } 0 \leqslant j < j_l'$$
$$D_t^{j_l'}(\phi_l')(P) = 1.$$

Έχουμε το

Θεώρημα VIII.5.18. *Έστω ϕ μια προβολική συνάρτηση κανονικοποιημένη στο P, έστω t μια τοπική παράμετρο στο P και έστω $j_1', \dots, j_n'$ οι τάξεις της ϕ στο P. Ορίζουμε $j_0' := 0$. Τότε υπάρχει μια βάση $(\phi_0', \dots, \phi_n')$ του $\langle \phi \rangle$ ώστε*

$$\phi_l' = t^{j_l'} + \sum_{j=j_l'+1}^{\infty} c_{lj} t^j \text{ για } 0 \leqslant l \leqslant n$$

όπου $c_{ij} \in k$. Ιδιαίτερα αν j είναι μια τάξη στο ϕ στο P αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f \in \langle \phi \rangle$ με $v_P(f) = j$.

Στην (VIII.8) θεωρήσαμε τον χώρο $\mathcal{L}_\phi(D) = \langle \phi \rangle \cap \mathcal{L}([\phi] - D)$ και σχηματίσαμε μια filtration. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ότι οι τάξεις της ϕ στο P ορίζουν τους διαφορετικούς υποχώρους της filtration, δηλαδή

$$\mathcal{L}_\phi(j_l' P) = \langle \phi_l', \dots, \phi_n' \rangle \text{ για } 0 \leqslant l \leqslant n.$$

Πόρισμα VIII.5.19. *Αν η ϕ είναι μη-ιδιόμορφη στο P, τότε η osculating filtration στο P είναι η*

$$\langle \phi \rangle \mathcal{L}_\phi(0) \supsetneq \mathcal{L}_\phi(P) \supsetneq \mathcal{L}_\phi(2P) \supset \cdots$$

Ιδιαίτερα $j_1' = 1$.

Απόδειξη. Έπεται από το παραπάνω θεώρημα, αφού $\operatorname{codim} \mathcal{L}_\phi(2P) = 2$. □

Γεωμετρικά, κάθε υπόχωρος $L \subset \mathbb{P}^n$ διάστασης l είναι το σύνολο μηδενισμού ενός συνόλου $n - l$ ανεξάρτητων μορφών $\mathcal{L}$. Αν διαλέξουμε ένα υπερεπίπεδο στο άπειρο ορισμένο από κάποια γραμμική μορφή ℓ_∞ που δεν μηδενίζεται στο P και θέσουμε

$$L^* := \langle \phi^*(\ell/\ell_\infty) : \ell \in \mathcal{L} \rangle$$

έχουμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $L^* \leftrightarrow L$ ανάμεσα στους υπόχωρους του ϕ διάστασης $(n - l)$ και στους l-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{P}^n$. Υπό αυτή την αντιστοιχία οι υποχώροι του $\mathbb{P}^n$

που αντιστοιχούν στο $\mathcal{L}_\phi(j'_n P)$ λέγονται τα osculating επίπεδα. Ιδιαίτερα, το υπερεπίπεδο που αντιστοιχεί στο $\mathcal{L}_\phi(j'_n P)$ λέγεται το osculating υπερεπίπεδο στο P.

Αν η ϕ είναι η κανονική συνάρτηση, η osculating filtration στο P είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, γιατί

$$\langle \phi \rangle = \mathcal{L}([\phi]) \supset \mathcal{L}([\phi] - jP),$$

οπότε το θεώρημα Riemann-Roch

$$\dim \mathcal{L}(jP) = j - g + 1 + \dim \mathcal{L}_\phi(jP)$$

για κάθε ακέραιο j. Συνεπώς

$$\dim \mathcal{L}\big((j+1)P\big)/\mathcal{L}(jP) = 1 - \dim \mathcal{L}_\phi(jP)/\mathcal{L}_\phi((j+1)P).$$

Αφού j είναι μια κανονική τάξη στο P αν και μόνο αν $\mathcal{L}_\phi(jP) \supsetneq \mathcal{L}_\phi((j+1)P)$, έχουμε ότι το j είναι μια κανονική τάξη στο P αν και μόνο αν δεν υπάρχει συνάρτηση στο K με πόλο τάξης $j+1$ στο P και κανένα άλλο πόλο.

Πόρισμα VIII.5.20. *Ο θετικός j είναι μια τάξη της κανονικής συνάρτησης στο P αν και μόνο αν το $j+1$ είναι ένα gap number στο P.*

Βιβλιογραφία

[1] Goldschmidt, D. M. *Algebraic functions and projective curves*. Vol. 215. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2003, pp. xvi+179. ISBN: 0-387-95432-5.

[2] Matzat, H. *Ein Vortrag über Weierstrasspunkte*. Karlsruhe, 1975.

[3] Schmidt, F. K. *Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern*. *Math. Z.* 45.1 (), pp. 62–74. ISSN: 0025-5874, 1432-1823. URL: `http://link.springer.com/article/10.1007/BF01580273`.

[4] Serre, J.-P. *Algebraic groups and class fields*. Vol. 117. Graduate Texts in Mathematics. Translated from the French. New York: Springer-Verlag, 1988, pp. x+207. ISBN: 0-387-96648-X.

[5] Stichtenoth, H. *Algebraic function fields and codes*. Second. Vol. 254. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009, pp. xiv+355. ISBN: 978-3-540-76877-7.

[6] Stöhr, K.-O. & Voloch, J. F. *Weierstrass points and curves over finite fields*. *Proc. London Math. Soc. (3)* 52.1 (1986), pp. 1–19. ISSN: 0024-6115. URL: `http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-52.1.1`.

IX

Moduli spaces και θεωρία παραμορφώσεων

IX.1 Moduli spaces

Θεωρούμε την κατηγορία των οικογενειών $\phi : \mathcal{X} \to B$ πάνω από μια σταθερή βάση B, όπου ο μορφισμός ϕ είναι ένας ομαλός (smooth) και επίπεδος (flat) μορφισμός με ίνες αλγεβρικές καμπύλες γένους g.

IX.1.1 Επίπεδοι μορφισμοί

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τα επίπεδα modules και τους επίπεδους μορφισμούς και θα εξηγήσουμε ότι η έννοια του επίπεδου μορφισμού εξασφαλίζει ότι έχουμε μια ομαλή μετάβαση μεταξύ των ινών.

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας τις παρακάτω ιδιότητες του τανυστικού γινομένου:

1. Για κάθε R-module M ισχύει ότι $M \otimes_R R = R \otimes_R M = M$. Ο παραπάνω ισομορφισμός είναι αυτός που στέλνει τα $1 \otimes m$ και $m \otimes 1$ στο m.
2. Αν $\alpha : M' \to M$ και $\beta : N' \to N$ είναι ομομορφισμοί από R-modules, τότε υπάρχει ο επαγόμενος μορφισμός
$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta : M' \otimes_R N' &\longrightarrow N \otimes_R N \\ m' \otimes n &\longmapsto \alpha(m') \otimes \beta(n') \end{aligned}$$
3. Το τανυστικό γινόμενο διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα, δηλαδή
$$(\otimes_{i=1}^{s} M_i) \otimes_R N \otimes_{i=1}^{i} M_i \otimes_R N.$$
4. Το τανυστικό γινόμενο διατηρεί τους συμπυρήνες, δηλαδή αν $\alpha : M' \to M$ είναι μία συνάρτηση με συμπυρήνα $\operatorname{coker}(\alpha) = M''$, τότε για κάθε module N ο συμπυρήνας της επαγόμενης συνάρτησης
$$\alpha \otimes 1 : M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$
είναι ο $M'' \otimes_R N$. Η ιδιότητα αυτή εκφράζεται λέγοντας ότι το τανυστικό γινόμενο είναι δεξιά ακριβής υπό την έννοια ότι ο συναρτητής $\otimes_R N$ στέλνει τη μικρή ακριβή ακολουθία
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
στην ακριβή ακολουθία
$$N \otimes_R M' \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

Αντιθέτως αν $\alpha : M' \to M$ είναι ένας μονομορφισμός, ο επαγόμενος μορφισμός

$$N \otimes_R M' \longrightarrow N \otimes_R M$$

δεν είναι απαραίτητα μονομορφισμός.

Ορισμός IX.1.1. *Θα λέμε ότι ένα R-module F είναι επίπεδο (flat) αν και μόνο αν για κάθε μονομορφισμό $\alpha : M' \to M$ ο επαγόμενος μορφισμός*

$$F \otimes_R M' \longrightarrow F \otimes_R M$$

δεν είναι απαραίτητα μονομορφισμός.

Από τις ιδιότητες του τανυστικού γινόμενου προκύπτει ότι τα ελεύθερα modules είναι πάντα επίπεδα.

Πρόταση IX.1.2. *Για ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο S, ο εντοπισμός $S^{-1}R$ είναι ένα επίπεδο R-module. Πράγματι έστω $M' \to M$ ένας μονομορφισμός από R-modules. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $S^{-1}M' = S^{-1}R \otimes_R M$ και $S^{-1}M = S^{-1}R \otimes_R M$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι ο επαγόμενος μορφισμός*

$$\begin{aligned} S^{-1}M' &\longrightarrow S^{-1}M \\ \frac{m'}{s} &\longmapsto \frac{m'}{s} \end{aligned}$$

είναι μονομορφισμός. Έστω $m'/s \in S^{-1}M'$ ώστε m'/s να είναι 0 στον $S^{-1}M$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $s' \in S$ ώστε $s'm = 0$. Αυτό όμως είναι ανεξάρτητο του ότι το m' είναι στοιχείο του M και ισχύει και για το m' σαν στοιχείο του M', δηλαδή το m'/s είναι 0 και στο $S^{-1}M'$.

IX.1.2 Κριτήρια επιπεδότητας

Ο συναρτητής Tor

Θεωρούμε ένα R-module N και σχηματίζουμε μια ελεύθερη επίλυση του N, δηλαδή μια ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to F_{i+1} \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα R-module M και τανύζουμε κάθε όρο της παραπάνω ακολουθίας με το M. Ορίζουμε

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = \frac{\ker(M \otimes_R F_i \to M \otimes_R F_{i-1})}{\mathrm{Im}(M \otimes_R F_{i+1} \to M \otimes_R F_i)}$$

Αν και η μία ελεύθερη επίλυση του N δεν είναι μοναδική, αποδεικνύεται ότι ο $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ είναι ανεξάρτητος της επίλυσης που διαλέξαμε. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν υπολογίζαμε μια ελεύθερη επίλυση του M και στη συνέχεια υπολογίζαμε την ομολογία του συμπλόκου που προκύπτει τανύζοντας με το N, θα βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes_R N$.
2. Αν M, N είναι ελεύθερα ή γενικότερα επίπεδα, τότε $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) > 0$ για $i \geqslant 0$.
3. Ο $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ είναι ένας covariant συναρτητής, ο οποίος είναι είναι R-διγραμμικός.
4. Αν R είναι δακτύλιος της Noether και M, N είναι πεπερασμένα παραγόμενα R-modules, τότε και ο $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module.

5. Αν S είναι μια επίπεδη R-άλγεβρα, τότε
$$S \otimes_R \operatorname{Tor}_i^R(M, N) = \operatorname{Tor}_i^S(S \otimes_R M, S \otimes_R N).$$

6. Για κάθε μικρή ακριβή ακολουθία
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
υπάρχει μια μακρά ακριβή ακολουθία για τον Tor
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Tor}_3^R(M', N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_3^R(M, N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_3^R(M'', N) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& \operatorname{Tor}_2^R(M', N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_2^R(M, N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_2^R(M'', N) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& \operatorname{Tor}_1^R(M', N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^R(M, N) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^R(M'', N) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& M' \otimes_R N \arrow[r] & M \otimes_R N \arrow[r] & M'' \otimes_R N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα IX.1.3. *Ας υποθέσουμε ότι $x \in R$ δεν είναι μηδενοδιαιρέτης και M είναι ένα R-module. Τότε η μικρή ακριβής ακολουθία*
$$0 \to R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/\langle x \rangle \to 0$$
είναι μια ελεύθερη επίλυση του $R/\langle x \rangle$ και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τον ορισμό του Tor. Το module $\operatorname{Tor}_i^R(R/\langle x \rangle, M)$ είναι το i-στο module ομολογίας του συμπλόκου
$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow 0,$$
από όπου υπολογίζουμε
$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_0^R(R/\langle x \rangle, M) &= M/xM \\
\operatorname{Tor}_1^R(R/\langle x \rangle, M) &= (0 :_M x) \\
\operatorname{Tor}_i^R(R/\langle x \rangle, M) &= 0 \text{ για } i > 1.
\end{aligned}$$

Πρόταση IX.1.4. *Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα R-module. Για ένα ιδεώδες I του R η συνάρτηση πολλαπλασιασμού*
$$I \otimes_R M \longrightarrow M \tag{IX.1}$$
είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$. Το module M είναι επίπεδο αν και μόνο αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες I.

Απόδειξη. Από τη μικρή ακριβή ακολουθία
$$0 \to I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \to 0,$$
παίρνουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία η οποία περιέχει την
$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(R, M) \to \operatorname{Tor}_1^R(R/I, M) \to I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M.$$
Επιπλέον, η αριστερή συνάρτηση είναι απλά η συνάρτηση πολλαπλασιασμού της εξίσωσης (IX.1). Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για τον μονομορφισμό έπεται.

Εξ ορισμού, το module M είναι επίπεδο αν και μόνο αν για κάθε μονομορφισμό $N' \subset N$ από R-modules η επαγόμενη συνάρτηση $N' \otimes_R M \to N \otimes_R M$ είναι μονομορφισμός. Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη της πρότασης (που είναι η ειδική περίπτωση $N = R$ και $N' = I$ ικανοποιείται).

Παρατηρούμε ότι $I' \otimes_R M \to M$ είναι μονομορφισμός για κάθε ιδεώδες I' του R, όπου το I' δεν είναι απαραιτήτως πεπερασμένα παραγόμενο. Πράγματι, κάθε στοιχείο $0 \neq x$ του $I' \otimes_R M$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων της μορφής $r' \otimes m$ για $r' \in I'$ και $m \in M$. Συνεπώς το x προέρχεται από ένα μη μηδενικό στοιχείο κάποιου $I \otimes_R M$, με I πεπερασμένα παραγόμενο και το x πηγαίνει σε ένα μη μηδενικό στοιχείο του M.

Με παρόμοιο τρόπο το module $N \otimes_R M$ παράγεται από τα στοιχεία $\{n \otimes_R m : n \in N, m \in M\}$, και οι σχέσεις διαγραμμικότητας μεταξύ τους σχηματίζονται από πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του N. Συνεπώς το ότι το $x \in N' \otimes_R M$ πάει στο $0 \in N \otimes_R M$ αφορά πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του N και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το N είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία από υπomodules

$$N' = N_0 \subset N_1 \subset \cdots N_p = N,$$

ώστε κάθε N_{i+1}/N_i να παράγεται από ένα στοιχείο. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε

$$N_i \otimes_R M \longrightarrow N_{i+1} \otimes_R M$$

είναι μονομορφισμός συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι N/N' είναι ένα κυκλικό module και να γράψουμε $N/N' \cong R/I$.

Η μικρή ακριβής ακολουθία

$$0 \to N' \longrightarrow N \longrightarrow N/N' \to 0$$

δίνει μια μακρά ακριβή ακολουθία που περιέχει τους όρους:

$$\mathrm{Tor}_1^R(N/N', M) \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M.$$

Αφού $\mathrm{Tor}_1^R(N/N', M) = \mathrm{Tor}_1^R(R/I, M = 0)$, εξ υποθέσεων έχουμε τελειώσει. □

Πόρισμα IX.1.5. *Αν $a \in R$ είναι ένας μη-μηδενοδιαιρέτης στον δακτύλιο R, και M είναι ένα επίπεδο R-module, τότε ο a είναι ένας μη-μηδενοδιαρέτης στο M. Αν το R είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών, τότε το αντίστροφο είναι επίσης αληθές. Το M είναι επίπεδο R-module αν και μόνο αν το M είναι ελεύθερο στρέψης.*

Απόδειξη. Θέτουμε $I = Ra$ με $a \in R$ ένας μη μηδενοδιαιρέτης. Αν το M είναι επίπεδο R-module, τότε για κάθε $I \subset R$ η συνάρτηση

$$\phi : I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M = M$$

είναι μονομορφισμός. Όμως το $I \cong R$ από τον ισομορφισμό που στέλνει το a στο 1. Ταυτίζοντας το $I \otimes_R M$ με το $R \otimes_R M = M$, έχουμε ότι με αυτόν τον ισομορφισμό η συνάρτηση ϕ ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό με το a. Εξ ορισμού, αυτός είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν το a δεν είναι μηδενοδιαιρέτης του M.

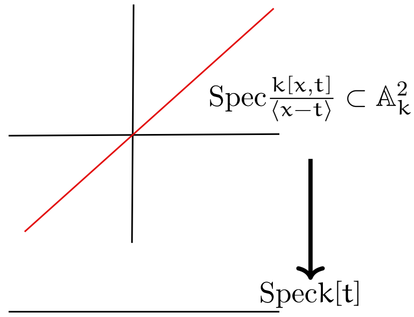
Αν τώρα ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, τότε κάθε μη μηδενικό ιδεώδες παράγεται από έναν μη μηδενοδιαιρέτη. Η συνθήκη της πρότασης IX.1.4 είναι τετριμμένη στην περίπτωση που $I = 0$, συνεπώς από τον ορισμό του $\mathrm{Tor}_i^R(R/x, M)$ βλέπουμε ότι το M είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι ένας μη μηδενοδιαιρέτης στο M. Αυτός ακριβώς είναι ο ορισμός ότι το M είναι ελεύθερο στρέψης. □

IX.1.3 Επίπεδοι μορφισμοί

Ορισμός IX.1.6. *Αν $\phi : \mathrm{Spec} S \to \mathrm{Spec} R$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ αφινικών σχημάτων, θα λέμε ότι είναι επίπεδος αν και μόνο αν το S ως R-module είναι επίπεδο. Στη γενική περίπτωση $\phi : \mathcal{X} \to B$ μορφισμού μεταξύ σχημάτων θα λέμε ότι ο ϕ είναι επίπεδος αν και μόνο ο επαγόμενος μορφισμός ανάμεσα στα $\mathcal{O}_{B,\phi(x)}$ και $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ κάνει τον $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ επίπεδο $\mathcal{O}_{B,\phi(x)}$-module.*

Παραδείγματα IX.1.7. *Στα παρακάτω παραδείγματα ο δακτύλιος $R = k[t]$, όπου το k είναι ένα αλγεβρικό κλειστό σώμα.*

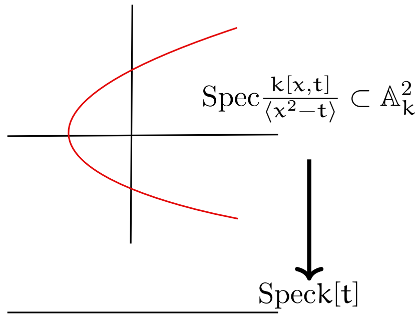
1. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $S = R[x]/(x - t)$. Σε αυτή την περίπτωση $S \cong R$ και το S είναι επίπεδο ως ελεύθερο R-module (rank 1). Παρατηρούμε ότι για $P = \langle t - a \rangle$ πρώτο ιδεώδες του R η ίνα $k(P) \otimes RS \cong k$. Για το generic σημείο έχουμε την ίνα $k(t)$. Σε κάθε περίπτωση η διάσταση του δακτυλίου συντεταγμένων της ίνας είναι πάνω από το σώμα υπολοίπων $k(P)$ είναι 1.*



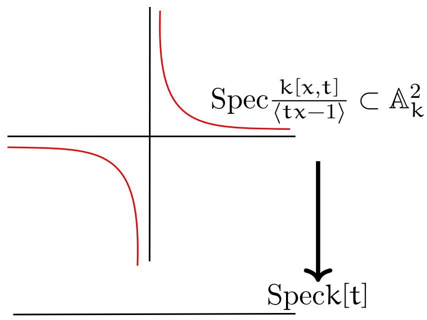
2. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $S = R[x]/\langle x^2 - t \rangle$. Σε αυτή την περίπτωση η ίνα πάνω από έναν πρώτο $P = \langle t - a \rangle$, με $a \neq 0, a \in k$ αντιστοιχεί στον δακτύλιο*

$$k[x]/\langle x^2 - a \rangle \cong k \times k.$$

Η ίνα πάνω από το $\langle t \rangle$ αντιστοιχεί στον δακτύλιο $k[x]/\langle x^2 \rangle$. Τέλος η ίνα πάνω από το generic point $\langle 0 \rangle$ είναι το $k(t)[x](x^2 - t)$ μια επέκταση βαθμού 2 του σώματος υπολοίπων $k(t)$.
Παρατηρούμε ότι σε κάθε πρώτο P ή ίνα αντιστοιχεί σε έναν δακτύλιο που έχει διάσταση 2 πάνω από το σώμα υπολοίπων. Ο δακτύλιος S είναι ένα ελεύθερο R-module πάνω στους γεννήτορες $\{1, x\}$ και συνεπώς είναι επίπεδο.



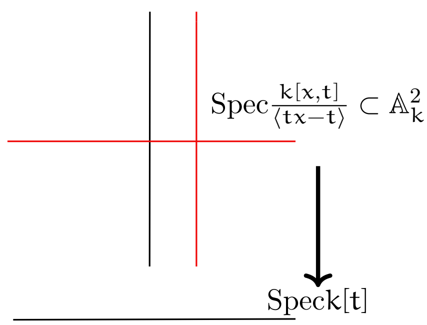
3. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $S = R[x]/\langle tx - 1 \rangle$ ο οποίος μπορεί να ταυτιστεί με τον εντοπισμό $k[t, t^{-1}]$, οπότε αποτελεί ένα ελεύθερο $k[t]$-module.*
Η ίνα πάνω από τον πρώτο $P \subset k[t]$ είναι ένα σημείο εκτός αν $P = \langle t \rangle$, οπότε η ίνα είναι ο μηδενικός δακτύλιος που αντιστοιχεί στο κενό αλγεβρικό σύνολο. Σε αυτή την περίπτωση ο S δεν είναι ένα ελεύθερο R-module.



4. *Σε αυτή την περίπτωση $S = R[x]/\langle tx - t \rangle$. Αυτό είναι ένα παράδειγμα μη επίπεδου R-module. Παρατηρούμε ότι $t(x - 1) = 0$ συνεπώς ο S έχει t-στρέψη το οποίο παραβιάζει το κρίτηριο επιπεδότητας που δίνεται στο πόρισμα IX.1.5.*
Επίσης στην περίπτωση αυτή έχουμε μια ακανόνιστη μεταβολή ανάμεσα στις ίνες. Αν ο πρώτος P δεν περιέχει το t, τότε το t είναι μια μονάδα στο σώμα υπολοίπων $k(P)$ και συνεπώς και στο $k(P) \otimes RS$ οπότε

$$\begin{aligned} k(P) \otimes_R S &= k(P)[x]/\langle tx - t \rangle \\ &= k(P)[x]/\langle x - 1 \rangle = k(P). \end{aligned}$$

Από την άλλη, αν $P = \langle t \rangle$, τότε το $tx - t$ είναι 0 στο $k(P) \otimes_R R[x]$ συνεπώς $k(P) \otimes_R S = R[x] = k[x]$, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθετη ευθεία. Γενικά είναι χαρακτηριστικό των επίπεδων μορφισμών ότι οι ίνες κρατάνε σταθερή τη διάστασή τους τοπικά.



IX.1.4 Τα σχήματα ως συναρτητές

Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Το λήμμα Yoneda μας δίνει

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$$

όπου το αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ απεικονίζεται στον συναρτητή

$$h_X : Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

και ο μορφισμός $f : Y' \to Y$ στην $\mathcal{C}$ απεικονίζεται στην

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \\ (g : Y \to X) &\longmapsto (g \circ f : Y' \to X). \end{aligned}$$

Θεώρημα IX.1.8 (Yoneda). *Έστω F ένας συναρτητής και $X \in \mathcal{C}$ ένα αντικείμενο. Για έναν μορφισμό συναρτητών $\eta : h_X \to F$, έχουμε έναν διακεκριμμένο αντικείμενο $\tau_\eta \in F(X)$ το οποίο προκύπτει ως η εικόνα του $\mathrm{Id}_X \in h_X(X)$.*

Η συλλογή των συναρτητών: $\eta : h_X \to F$ είναι σύνολο και η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \{\text{Μορφισμοί } h_X \to F\} &\longrightarrow F(X) \\ \eta &\longmapsto \tau_\eta \end{aligned}$$

είναι 1-1 και επί.

Ειδικότερα, αν πάρουμε $F = h_Y$ για ένα άλλο αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$, παίρνουμε ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \{\text{μορφισμοί } h_X \to h_Y\} \\ (g : X \to Y) &\longmapsto (h(g) : h_X \to h_Y) \end{aligned}$$

είναι 1-1 και επί.

Το λήμμα του Yoneda εξασφαλίζει ότι αν $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ είναι συναρτητής, τότε ένα ζευγάρι (X, σ) αποτελούμενο από $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και έναν ισομορφισμό συναρτητών $\sigma : h_X \cong F$ είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

IX.2 Moduli χώροι αλγεβρικών καμπυλών

Θεωρούμε την κατηγορία $\mathcal{C}_g$ που αντικείμενά της είναι οι επίπεδες και ομαλές οικογένειες $\mathcal{X} \to B$, όπου το B είναι ένα σχήμα βάσης ώστε οι ίνες $\mathcal{X}_b = \mathcal{X} \times_B k(b)$ να είναι ομαλές καμπύλες γένους g. Ένας μορφισμός ανάμεσα στις οικογένειες $\mathcal{X} \to B$ και $\mathcal{X}' \to B'$ δίνεται από ένα ζευγάρι συναρτήσεων $B \to B'$ και $\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι καρτεσιανό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\mathcal{X} \cong \mathcal{X}' \times_{B'} B$.

Θεωρούμε τον συναρτητή F από την κατηγορία Sets θέτοντας

$$F(B) = \{\text{κλάσεις ισομορφίας των οικογενειών πάνω από το } B\}$$

Η θεμελιώδης ερώτηση για έναν τέτοιο συναρτητή είναι το πότε είναι αναπαραστάσιμος από ένα σχήμα M, δηλαδή αν υπάρχει ένας ισομορφισμός Ψ συναρτητών από σχήματα σε σύνολα ώστε

$$\Psi : F(\cdot) \longrightarrow h_M(\cdot).$$

Ορισμός IX.2.1. *Αν ο συναρτητής* F *είναι αναπαραστάσιμος από το* M, *τότε θα λέμε ότι ο χώρος* M *είναι ένα fine moduli space για το moduli πρόβλημα* F.

Το να έχουμε αναπαραστάσιμο συναρτητή έχει μερικές πολύ χρήσιμες συνέπειες για τη μελέτη του συναρτητή F. Αν $\phi : \mathcal{X} \to B$ είναι μια οικογένεια καμπυλών με βάση το B, τότε έχουμε έναν μορφισμό $\chi = \Psi(\phi)$ από το B στο M.

Διαισθητικά τα κλειστά σημεία του M ταξινομούν τα αντικείμενα του moduli προβλήματος, ενώ η συνάρτηση χ στέλνει την ίνα $\mathcal{X}_b$ της οικογένειας ϕ στο moduli σημείο που περιγράφεται από αυτή.

Από την άλλη πλευρά, αν θεωρήσουμε την ταυτότητα $M \to M$ στο $h_M(M)$, τότε κατασκευάζουμε μια universal οικογένεια

$$\mathbf{1} : \mathcal{D} \to M.$$

Κάθε άλλη οικογένεια $\phi : \mathcal{X} \to B$ δίνεται ως γινόμενο

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\not\Vdash"] \\ B \arrow[r, "\chi"] & M \end{tikzcd}$$

Η κατασκευή αυτή επιτρέπει να κατασκευαστεί ένα λεξικό που επιτρέπει τη μεταφορά πληροφοριών των οικογενειών σε γεωμετρική πληροφορία του moduli space.

Δυστυχώς ένας moduli χώρος δεν είναι πάντα αναπαραστάσιμος.

Παράδειγμα IX.2.2. *Υπενθυμίζουμε ότι μια ελλειπτική καμπύλη (υπεράνω του* $\mathbb{C}$*) είναι ένα ζευγάρι* (E, e) *όπου* E *είναι μια ομαλή προβολική καμπύλη γένους* 1 *και το* e *είναι ένα κλειστό σημείο. Μια τέτοια καμπύλη μπορεί να περιγραφεί ως ο τόπος μηδενισμού ενός ομογενούς πολυωνύμου της μορφής*

$$Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z),$$

όπου το $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ *και το σημείο* e *έχει προβολικές συντεταγμένες* $[0:1:0]$. *Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε μια οικογένεια*

$$\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times (\mathbb{A}^1 - \{0,1\}) \longrightarrow (\mathbb{A}^1 - \{0,1\}),$$

όπου κάθε ελλειπτική καμπύλη είναι ίνα της παραπάνω οικογένειας για κάποια επιλογή παραμέτρου λ. *Η αναπαράσταση της ελλειπτικής καμπύλης με αυτό τον τρόπο δεν είναι μοναδική. Υπάρχει μια δράση της ομάδας* S_3 *στον χώρο* $\mathbb{A}^1 - \{0,1\}$, *η οποία παράγεται από τους αυτομορφισμούς*

$$\lambda \longmapsto \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \longmapsto \frac{1}{1-\lambda},$$

και δύο σημεία $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ *ορίζουν την ίδια ελλειπτική καμπύλη αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια τροχιά της* S_3 *η οποία είναι η*

$$\lambda, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Αν λοιπόν θέλουμε να παραμετρήσουμε ελλειπτικές καμπύλες (χωρίς να μας ενδιαφέρει η προβολική τους εμφύτευση), τότε θα πρέπει να θεωρήσουμε το πηλίκο του $\mathbb{A}^1 - \{0,1\}$ *με τη δράση της* S_3. *Αυτό δίνεται από το φάσμα του δακτυλιού των* S_3 *αναλλοίωτων του δακτυλίου* $\mathbb{C}_{\lambda(\lambda-1)}$ *το οποίο είναι ο πολυωνυμικός δακτύλιος* $\mathbb{C}[j]$, *όπου*

$$j = 2^8 \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

Δηλαδή υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση ανάμεσα στο σύνολο των κλάσεων ελλειπτικών καμπυλών και μιγαδικών αριθμών j. *Παρόλα αυτά, η ευθεία* $\mathbb{A}^1$ *δεν είναι ένα fine moduli space για* *τον χώρο των ελλειπτικών καμπυλών. Δεν υπάρχει μια οικογένεια $\mathcal{C} \to \mathbb{A}^1_j = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[j]$, ώστε για κάθε $\mathbb{C}$-σχήμα T και για κάθε οικογένεια ελλειπτικών καμπυλών $E \to T$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\rho_E : T \to \mathbb{A}^1_j$, ώστε $E = \mathcal{E} \times_{\mathbb{A}^1_j} T$.*

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής: Θεωρούμε την οικογένεια ελλειπτικών καμπυλών $\mathcal{E}_t \to \mathbb{A}^1_t - \{0\}$, $\mathbb{A}^1_t = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[t]$ η οποία να δίνεται από την εξίσωση:

$$Y^2 Z = X^3 - tZ^2.$$

Η j-invariant κάθε ίνας της παραπάνω οικογένειας είναι ίση με 0, άρα η συνάρτηση $\mathbb{A}^1_t - \{0\} \to \mathbb{A}^1_j$ είναι σταθερή και ίση με 0. Με άλλα λόγια έχουμε μια οικογένεια στην οποία οι ίνες είναι όλες ισόμορφες.

Επίσης, η ελλειπτική καμπύλη $E_0 : Y^2 Z = X^3 - Z^3$ έχει j-invariant 0 και αν είχαμε ένα fine moduli space, θα έπρεπε η οικογένεια $\mathcal{E}_t$ να ήταν ισόμορφη με την οικογένεια

$$E_0 \times (\mathbb{A}^1_t - \{0, 1\}).$$

Αυτό όμως δεν ισχύει. Για παράδειγμα, στη γενική ίνα (δηλαδή θεωρώντας τις ελλειπτικές καμπύλες υπέρ του σώματος $\mathbb{C}(t)$) οι καμπύλες δεν είναι ισόμορφες. Γίνονται ισόμορφες στην επέκταση σωμάτων $\mathbb{C}(t^{1/6})$.

Παράδειγμα IX.2.3. *Οι αυτομορφισμοί μιας αλγεβρικής καμπύλης αποτελούν άλλο ένα εμπόδιο στο να είναι ο moduli συναρτητής αναπαραστάσιμος. Πράγματι, αν ο moduli συναρτητής ήταν αναπαραστάσιμος μια οικογένεια $\pi : X \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ θα απεικονιζόταν με μοναδικό τρόπο σε ένα σημείο $\mathrm{Spec}\mathbb{C} \to M$. Όμως έχουμε και την οικογένεια*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathrm{Spec}\mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

που απεικονίζεται στο ίδιο σημείο του M.

Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό υπάρχουν διάφορες τεχνικές.

- Η πρώτη αφορά την κατασκευή αντικειμένων γενικότερων των σχημάτων όπως οι αλγεβρικοί χώροι και τα Stacks [8].
- Μια άλλη κατασκευή είναι να ισχυροποιήσουμε λίγο τη συνθήκη ισομορφισμού ώστε να εξαφανίσουμε τους αυτομορφισμούς και να γίνει ο συναρτητής αναπαραστάσιμος.
- Ο D. Mumford πρότεινε την έννοια του ασθενούς moduli χώρου την οποία θα περιγράψουμε.

Αναζητούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό μεταξύ συναρτητών

$$\Psi : F(\cdot) \longrightarrow h_M(\cdot)$$

αντί ισομορφισμού. Τότε για κάθε οικογένεια $\phi : \mathcal{X} \to B$ εξακολουθούμε να έχουμε έναν μορφισμό $\chi : B \to M$. Επίσης, οι συναρτήσεις αυτές είναι φυσικές υπό την έννοια ότι αν

$$\phi' : \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_B B' \to B'$$

είναι μια αλλαγή βάσης μέσω μιας συνάρτησης $\xi : B' \to B$, τότε η $\chi' = \Psi(\phi') = \Psi(\phi) \circ \xi$.

Η παραπάνω περιγραφή δεν περιγράφει τον moduli space με μοναδικό τρόπο, αφού αν ο (M, Ψ) ικανοποιεί την παραπάνω απαίτηση και $\pi : M' \to M$ ένας μορφισμός σχημάτων, τότε και ο $(M', \pi \circ \Psi)$ την ικανοποιεί. Ο Mumford έδωσε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός IX.2.4. *Ένα σχήμα M και ένας φυσικός μετασχηματισμός ψ_M από τον συναρτητή F στον συναρτητή h_M είναι ένα ασθενές (coarse) moduli space αν και μόνο αν:*

1. *Η συνάρτηση*
$$\Psi_{\mathrm{Spec}\mathbb{C}} : F(\mathrm{Spec}\mathbb{C}) \longrightarrow h_{\mathrm{Spec}\mathbb{C}} = M(\mathbb{C})$$
είναι 1-1 και επί συνάρτηση συνόλων.

2. *Αν M' είναι ένα άλλο σχήμα εφοδιασμένο με έναν φυσικό μετασχηματισμό $\Psi_{M'} : F \to h_{M'}$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\pi : M \to M'$ ώστε ο επαγόμενος μορφισμός $\Pi : h_M \to h_{M'}$ να ικανοποιεί την $\Psi_{M'} = \Pi \circ \Psi_M$.*

IX.3 Θεωρία παραμορφώσεων

Θα μιλήσουμε για τη θεωρία παραμορφώσεων και πώς αυτή οδηγεί σε μια τοπική μελέτη ενός moduli χώρου. Η θεωρία παραμορφώσεων βρίσκεται παντού στα Μαθηματικά, από τις διαφορικές εξισώσεις ως την αλγεβρική γεωμετρία και τη θεωρία αριθμών. Μάλιστα η θεωρία παραμορφώσεων των αναπαραστάσεων Galois έχει παίξει σημαντικό ρόλο ακόμα και στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, [6].

Γενικά τα προβλήματα παραμορφώσεων έχουν να κάνουν με ένα πρόβλημα το οποίο εξαρτάται από παραμέτρους και θα θέλαμε να δούμε τη συμπεριφορά του κάτω από «απειροστές» μεταβολές των παραμέτρων αυτών. Η σύγχρονη οπτική της θεωρίας παραμορφώσεων ξεκινά από τους Kodaira και Spencer [3] [4] για μιγαδικές αναλυτικές πολλαπλότητες. Υπάρχει η αντίληψη ότι η δουλειά του Grothendieck στην αλγεβρική γεωμετρία αποσκοπούσε στη μεταφορά της θεωρίας παραμορφώσεων σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Σημαντικό ρόλο στη θεωρία αυτή έπαιξε η εργασία του Schlesinger [10]. Ακολουθούμε την παρουσίαση της πτυχιακής εργασίας του φοιτητή Α. Τερεζάκη, [12]. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [2] και [11].

Ορισμός IX.3.1. *Ένας τοπικός δακτύλιος συντεταγμένων είναι ένας πλήρης, τοπικός δακτύλιος της Noether A, με σώμα υπολοίπων $k \cong A/\mathfrak{m}_A$*

Ορισμός IX.3.2. *Ένας ομομορφισμός μεταξύ δακτυλίων συντεταγμένων είναι ένας συνεχής ομομορφισμός $\phi : A' \to A$, ώστε $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_A) = \mathfrak{m}_{A'}$ and $A/\mathfrak{m}_A \cong A'/\mathfrak{m}_{A'}$ $(\cong k)$, όπου A, A' είναι τοπικοί δακτύλιοι συντεταγμένων.*

Ορισμός IX.3.3. *Σταθεροποιούμε έναν τοπικό δακτύλιο συντεταγμένων Λ με σώμα υπολοίπων k χαρακτηριστικής $p \geqslant 0$.*

(i) *Θα συμβολίζουμε με $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda(A)$ την κατηγορία με αντικείμενα τους τοπικούς δακτυλίους συντεταγμένων που είναι Λ-άλγεβρες και επιπλέον είναι εφοδιασμένοι με έναν μορφισμό τοπικών δακτυλίων συντεταγμένων στο A.*

(ii) *Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_\Lambda(A)$ την πλήρη υποκατηγορία (full subcategory) των $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda(A)$ της οποίας τα αντικείμενα είναι τοπικοί δακτύλιοι συντεταγμένων του Artin.*

(iii) *Μια A-augmentation είναι ένας μορφισμός τοπικών δακτυλίων συντεταγμένων που είναι και ομομορφισμός Λ-αλγεβρών στο A.*

Παρατήρηση IX.3.4. *Αν το A είναι το σώμα υπολοίπων k, γράφουμε $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$ και $\mathcal{C}_\Lambda$ αντί για $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda(A)$ και $\mathcal{C}_\Lambda(A)$ αντίστοιχα.*

Ο λόγος που γράφουμε "$\widehat{\ }$" είναι ότι κάθε τοπικός δακτύλιος συντεταγμένων A μπορεί να γραφεί ως προβολικό όριο αλγεβρών του Artin.

$$A = \text{proj.lim.} A/(\mathfrak{m}_A)^n.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας συναρτητής F από μια κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία των συνόλων θα λέγεται αναπαραστάσιμος αν υπάρχει ένα αντικείμενο X ώστε ο F να είναι ισόμορφος με τον συναρτητή h_X. Στην περίπτωση που ο συναρτητής F είναι αναπαραστάσιμος στη μεγαλύτερη κατηγορία $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$, τότε η τοπική Λ-άλγεβρα συντεταγμένων R καθορίζεται πλήρως από τον περιορισμό του συναρτητή στη μικρότερη κατηγορία $\mathcal{C}_\Lambda$. Αυτό είναι αληθές, αφού

$$\mathrm{Hom}(R, A) = \text{proj.lim. } \mathrm{Hom}(R, A/(\mathfrak{m}_A)^n).$$

Ορισμός IX.3.5. *Θα ονομάζουμε έναν συναρτητή F συνεχή αν και μόνο αν:*

$$F(A) = \text{proj.lim. } F(A/(\mathfrak{m}_A)^n),$$

για όλες τις τοπικές Λ-άλγεβρες συντελεστών A.

Θα δούμε τώρα ότι ένας συνεχής συναρτητής καθορίζεται από τον περιορισμό του στην κατηγορία $\mathcal{C}_\Lambda$.

Ορισμός IX.3.6. *Ο Schlesinger [9] ονομάζει έναν συναρτητή στην κατηγορία $\mathcal{C}_\Lambda$ pro-representable, αν και μόνο αν είναι αναπαραστάσιμος με κάποιο αντικείμενο της μεγαλύτερης κατηγορίας $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$.*

Ορισμός IX.3.7. *Έστω A, B, C δακτύλιοι και έστω $\alpha : A \to C$ και $\beta : B \to C$ μορφισμοί δακτυλίων. Το ινώδες γινόμενο στην κατηγορία των δακτυλίων συμβολίζεται με $A \times_C B$ μαζί με δύο μορφισμούς $\pi_A : A \times_C B \to A$ και $\pi_B : A \times_C B \to B$, όπου $\alpha\pi_A = \beta\pi_B$, ώστε για κάθε δακτύλιο W με μορφισμούς $f_A : W \to A$ και $f_B : W \to B$, με $\alpha f_A = \beta f_B$, αυτοί οι μορφισμοί να παραγοντοποιούνται μέσω μοναδικού μορφισμού $W \to A \times_C B$.*

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[ddl, bend right, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddr, bend left, "f_B"] & \\
& A \times_C B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Αυτός είναι ο κατηγορικός ορισμός, ο οποίος στην περίπτωση των δακτυλίων δέχεται μια απλούστερη συνολοθεωρητική έκφραση. Το γινόμενο είναι το υποσύνολο του συνολοθεωρητικού γινομένου $A \times B$ ώστε

$$A \times_C b = \{(a, b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}.$$

Ένας από τους λόγους που χρησιμοποιούμε την μικρότερη κατηγορία $\mathcal{C}_\Lambda$, είναι ότι, σε αντίθεση με την κατηγορία $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$, τα ινώδη γινόμενα υπάρχουν πάντα στην $\mathcal{C}_\Lambda$, δηλαδή για A, A_1 και A_2 στην $\mathcal{C}_\Lambda$ και μορφισμούς $A_1 \to A$ και $A_2 \to A$ στην $\mathcal{C}_\Lambda$, το ινώδες γινόμενο $A_1 \times_A A_2$ είναι αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}_\Lambda$. Πράγματι, ο δακτύλιος $A_1 \times_A A_2$ είναι μια τοπική Λ-άλγεβρα συντεταγμένων μέσω της συνάρτησης $\Lambda \to A_1 \times_A A_2$ που επάγεται από τις συναρτήσεις $\Lambda \to A_1$ και $\Lambda \to A_1$. Αυτός είναι τοπικός με μέγιστο ιδεώδες

$$\mathfrak{m}_{A_1} \times_{\mathfrak{m}_A} \mathfrak{m}_{A_2} = \ker(A_1 \times_A A_2 \to k) \tag{IX.2}$$

Παρατηρήστε ότι αφού το σώμα υπολοίπων του Λ είναι k, η συνάρτηση (IX.2) είναι επί. Τέλος, και τα A_1 και A_2 είναι δακτύλιοι του Artin και συνεπώς έχουν πεπερασμένο μήκος ως Λ-modules. Συνεπώς ο δακτύλιος $A_1 \times A_2$ έχει πεπερασμένο μήκος ως Λ-module και το ίδιο ισχύει για το Λ-υποmodule $A_1 \times_\Lambda A_2$, δηλαδή το $A_1 \times_\Lambda A_2$ είναι ένας δακτύλιος του Artin.

Παράδειγμα IX.3.8. *Αν $A = k[[x,y]]$ και $B = k$ με μορφισμούς στο $C = k[[x]]$, τότε το ινώδες γινόμενο $A \times_C B$ δεν υπάρχει στην κατηγορία $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$.*

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & k[[x,y]] \arrow[d, "\pi"] \\
k \arrow[r, hook] & k[[x]]
\end{tikzcd}$$

Πράγματι μπορεί κανείς να ελέγξει ότι το ινώδες γινόμενο δίνεται από τον υποδακτύλιο $k \oplus yk[[x,y]]$ στον $k[[x,y]]$, όπου το μέγιστο ιδεώδες είναι το $yk[[x,y]]$ και ο εφαπτόμενος χώρος Zariski (ορισμός IX.3.12) ταυτίζεται με τον k-διανυσματικό χώρο $k[[x]]$ ο οποίος έχει άπειρη διάσταση, δηλαδή ο $A \times_C B$ δεν είναι δακτύλιος της Noether.

Παρατήρηση IX.3.9. *Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι οι μορφισμοί του ινώδους γινομένου είναι επί, τότε μπορούμε να καταλήξουμε ότι το ινώδες γινόμενο υπάρχει στην κατηγορία μας, δηλαδή το ινώδες γινόμενο είναι δακτύλιος της Noether.*

Πρόταση IX.3.10. *Αν A, B είναι δακτύλιοι Noether, με επιμορφισμούς στον δακτύλιο C,*

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"] & A \arrow[d, two heads, "\phi"] \\
B \arrow[r, two heads, "\psi"] & C
\end{tikzcd}$$

τότε το γινόμενο $A \times_C B$ είναι και αυτός δακτύλιος της Noether.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι και οι π_A και π_B είναι επιμορφισμοί. Πράγματι αν $a_0 \in A$ και $\phi(a_0) \in C$ και επειδή ψ είναι επί, υπάρχει $b_0 \in B$ ώστε $\phi(a_0) = \psi(b_0)$. Συνεπώς $(a_0, b_0) \in A \times_C B$ και $\pi_A(a_0, b_0) = a_0$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\ker \pi_A \cap \ker \pi_b = \{0\}.$$

Τέλος ισχυριζόμαστε ότι αν R είναι δακτύλιος και $I_1, \ldots, I_n \subseteq R$ είναι ιδεώδη ώστε

$$I_1 \cap \cdots \cap I_n = \{0\}, \tag{IX.3}$$

και R/I_i είναι δακτύλιος της Noether για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε και ο R είναι επίσης δακτύλιος της Noether. Πράγματι, κάθε R/I_i είναι R-module της Noether και συνεπώς $R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$ είναι επίσης R-module της Noether. Αλλά τότε ο μορφισμός

$$R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n,$$

είναι 1-1 λόγω της (IX.3) και συνεπώς ο R είναι R-module της Noether, δηλαδή ο R είναι δακτύλιος της Noether. □

IX.3.1 Ο εφαπτόμενος χώρος Zariski ενός συναρτητή

Ορισμός IX.3.11. *Σταθεροποιούμε ένα Λ τοπικό δακτύλιο συντεταγμένων και R μια Λ-άλγεβρα τοπικών συντεταγμένων. Ορίζουμε $t_R^* = t_{R/\Lambda}^*$ τον Zariski συνεφαπτόμενο χώρο,*

$$t_R^* := \mathfrak{m}_R/((\mathfrak{m}_R)^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R).$$

Ορισμός IX.3.12. *Ο εφαπτόμενος χώρος Zariski ως*

$$t_R := \mathrm{Hom}_{k-v.s}(\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R), k).$$

Παρατήρηση IX.3.13. *Αφού ο R είναι δακτύλιος της Noether, το t_R^*, είναι ένας πεπερασμένης διάστασης k-διανυσματικός χώρος.*

Παρατήρηση IX.3.14. *Με $k[\epsilon]$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο όπου $\epsilon^2 = 0$. Είναι σαφές ότι,*

$$k[\epsilon] \cong k \oplus \epsilon k.$$

Πρόταση IX.3.15. *Υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός k-διανυσματικών χώρων,*

$$\mathrm{Hom}_{k-v.s.}\left(\mathfrak{m}_R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right), k\right) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}\left(R, k[\epsilon]\right).$$

Απόδειξη. Αφού το μέγιστο ιδεώδες του $k[\epsilon]$ έχει τετράγωνο 0, υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}\left(R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right), k[\epsilon]\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}\left(R, k[\epsilon]\right). \tag{IX.4}$$

Η μικρή ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathfrak{m}_R \to R \to R/\mathfrak{m}_R \to 0,$$

επάγει τη μικρή ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathfrak{m}_R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right) \to R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right) \to R/\mathfrak{m}_R \to 0$$

Η παραπάνω ακολουθία διαχωρίζεται (splits), και έχουμε μια διάσπαση από Λ-άλγεβρες,

$$R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right) = k \oplus \mathfrak{m}_R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(k \oplus \mathfrak{m}_R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right), k \oplus \epsilon k) \cong\\ &\mathrm{Hom}_{k-v.s.}\left(\mathfrak{m}_R/\left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right), k\right).\end{aligned} \tag{IX.5}$$

οι (IX.4) και (IX.5), δίνουν το αποτέλεσμα. □

Ορισμός IX.3.16. *Έστω $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ ένας covariant functor ώστε το $F(k)$ να είναι μονοσύνολο. Τότε ο εφαπτόμενος χώρος Zariski του συναρτητή F, (που θα συμβολίζεται με t_F), είναι το σύνολο $F(k[\epsilon])$.*

Δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε, χωρίς να εισάγουμε επιπλέον συνθήκες, ότι ο παραπάνω χώρος έχει την δομή ενός k-διανυσματικού χώρου με φυσικό τρόπο.

Παρατήρηση IX.3.17. *Η ιδέα για το πώς θα ορίσουμε την «πρόσθεση» στο*

$$\begin{aligned}k[\epsilon] \times_k k[\epsilon] &\xrightarrow{+} k[\epsilon]\\ (x \oplus y_1 \cdot \epsilon, x \oplus y_2 \cdot \epsilon) &\longrightarrow x \oplus (y_1 + y_2) \cdot \epsilon.\end{aligned}$$

Ορισμός IX.3.18. *Θα λέμε ότι ο F ικανοποιεί τη «συνθήκη εφαπτόμενου χώρου» (ή απλούστερα (T_k)) αν η συνάρτηση*

$$h : F(k[\epsilon] \times_k k[\epsilon]) \to F(k[\epsilon]) \times F(k[\epsilon])$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Παρατήρηση IX.3.19. *Αν ο* F *ικανοποιεί τη συνθήκη* (T_k) *ορίζουμε την «πρόσθεση διανυσμάτων» στον εφαπτόμενο χώρο* t_F,

$$\begin{tikzcd} F(k[\epsilon]) \times F(k[\epsilon]) \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "="] & F(k[\epsilon] \times k[\epsilon]) \arrow[r, "F(+)"] & F(k[\epsilon]) \arrow[d, "="] \\ t_F \times t_F \arrow[rr] & & t_F \end{tikzcd}$$

Τώρα θα ορίσουμε γενικότερα τον εφαπτόμενο Zariski A-module. Συνοπτικά, θα κάνουμε τους ανάλογους ορισμούς μόνο που αντί για k-διανυσματικούς χώρους θα έχουμε A-modules.

Ορισμός IX.3.20. *Έστω* $F : \mathcal{C}_\Lambda(A) \to \mathrm{Sets}$ *ένας contravariant συναρτητής ώστε,* $F(A)$ *να είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο Zariski ως*

$$t_{F,A} := F(A[\epsilon]).$$

$(A[\epsilon] = A \oplus \epsilon A$ *είναι όπως και προηγουμένως ένα ελεύθερο* A*-module βαθμού* 2, *όπου* $\epsilon^2 = 0.)$

Με αυτή τη γενικότητα η συνθήκη εφαπτόμενου χώρου γίνεται τώρα:

Ορισμός IX.3.21. *(Συνθήκη εφαπτόμενου χώρου)*
Θα λέμε ότι το D *ικανοποιεί τη συνθήκη εφαπτόμενου χώρου (ή συνθήκη* (T_A)*) αν η συνάρτηση,*

$$h : F(A[\epsilon] \times_A A[\epsilon]) \to F(A[\epsilon]) \times F(A[\epsilon])$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

IX.3.2 Διαφορικά Kähler

Ορισμός IX.3.22. *(Διαφορικά Kähler)*
Θεωρούμε τους ομομορφισμούς

$$\begin{aligned} \phi : R \otimes_\Lambda R &\to R \\ \sum_i (r_i \otimes s_i) &\to \sum_i r_i s_i, \end{aligned}$$

και $I = \ker\phi$. *Τα διαφορικά Kähler είναι το ζευγάρι* $(\Omega_{R/\Lambda}, d)$, *όπου* $\Omega_{R/\Lambda} = I/I^2$ *και η* d *είναι μια συνάρτηση*

$$\begin{aligned} d : R &\to \Omega_{R/\Lambda} \\ r &\to (1 \otimes r) - (r \otimes 1)\,. \end{aligned}$$

Υπάρχει ένας ακόμα ορισμός για τα διαφορικά Kähler, ο οποίος είναι αρκετά χρήσιμος.

Ορισμός IX.3.23. *Ορίζουμε το module* $\Omega_{R/\Lambda}$ *να είναι το ελεύθερο* R*-module* F *το οποίο παράγεται από τα σύμβολα* $\{dr,\ r \in R\}$, *modulo το* R*-υπομodule που παράγεται από όλες τις εκφράσεις της μορφής:*

(i) $d\lambda$, *για* $\lambda \in \Lambda$.

(ii) $d(r_1 + r_2) - dr_1 - dr_2$, *για* $r_1, r_2 \in R$,

(iii) $d(r_1 r_2) - r_1 dr_2 - r_2 dr_1$, *για* $r_1, r_2 \in R$,

Η παραγώγιση

$$d : R \to \Omega_{R/\Lambda},$$

ορίζεται στέλνοντας το r *στο* dr.

Ορισμός IX.3.24. *Αν M είναι ένα R-module, μια Λ-παραγώγιση είναι ένας Λ-module ομομορφισμός $d : R \to M$ ο οποίος ικανοποιεί:*

(i) $d(\lambda) = 0$, *για* $\lambda \in \Lambda$

(ii) $d(r_1 r_2) = r_1 d(r_2) - r_2 d(r_1)$, *για* $r_1, r_2 \in R$

Η συλλογή των Λ-παραγωγίσεων του R μέσα σε ένα R-module M θα συμβολίζεται με $\mathrm{Der}_\Lambda(R, M)$.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\mathrm{Der}_\Lambda(R, M)$ είναι ένα R-υποmodule του $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\mathrm{mod}}(R, M)$

Πρόταση IX.3.25. *Το module των Kähler διαφορικών πάνω από το R υπεράνω του Λ έχει την παρακάτω universal ιδιότητα: Για κάθε R-module M, και για κάθε Λ-παραγώγιση, $d' : R \to M$, υπάρχει ένας μοναδικός R-module ομομορφισμός $f : \Omega_{R/\Lambda} \to M$, ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό,*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & \Omega_{R/\Lambda} \arrow[d, "f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Η απόδειξη της πρότασης IX.3.25 κάνοντας χρήση του δεύτερου ορισμού IX.3.23 αφήνεται στον αναγνώστη. Για μια απόδειξη με τον πρώτο ορισμό IX.3.22 και συνεπώς την ισοδυναμία των δύο ορισμών παραπέμπουμε στο [5].

Πρόταση IX.3.26. *Υπάρχει ένας κανονικός R-module ισομορφισμός*

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{mod}}(\Omega_{R/\Lambda}, M) \cong \mathrm{Der}_\Lambda(R, M),$$

Απόδειξη. Ο ζητούμενος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση

$$(\phi : \Omega_{R/\Lambda} \to M) \mapsto (\phi \circ d : R \to M),$$

με αντίστροφο τη συνάρτηση που στέλνει ένα $\psi \in \mathrm{Der}_\Lambda(R, M)$ στον μοναδικό R-module ομομορφισμό, που δίνεται από την universal ιδιότητα των διαφορικών Kähler (πρόταση IX.3.25). □

Παρατήρηση IX.3.27. *Ο συναρτητής από την κατηγορία των R-modules στην κατηγορία των συνόλων, η οποία απεικονίζει κάθε R-module M στο $\mathrm{Der}_\Lambda(R, M)$ είναι αναπαραστάσιμος από το module των Kähler διαφορικών.*

Παράδειγμα IX.3.28. *Αν $P = \Lambda[[x_1, \dots, x_n]]$, είναι τότε το module των διαφορικών Kähler δίνεται από*

$$\Omega_{P/\Lambda} \cong \oplus_{i=1}^n P \cdot dx_i.$$

Κάνοντας χρήση του δεύτερου ορισμού IX.3.23, αν $\delta : P \to M$ είναι μια Λ-παραγώγιση, μπορούμε να δούμε ότι ο μοναδικός μορφισμός $f : \Omega_{P/\Lambda} \to M$ με $f(dx_i) = \delta(x_i)$.

Παράδειγμα IX.3.29. *Έστω $I \subseteq P$ ένα ιδεώδες του $P = \Lambda[[x_1, \dots, x_n]]$. Ο δακτύλιος P είναι δακτύλιος της Noether και συνεπώς υπάρχουν $f_1, \dots, f_m \in P$ ώστε $I = (f_1, \dots, f_m)$. Τότε τα διαφορικά Kähler του $R = P/I$ είναι,*

$$\Omega_{R/\Lambda} \cong (\oplus_{i=1}^n R \cdot dx_i) / (df_1, \dots, df_m).$$

Το παραπάνω μπορεί να δειχθεί με τη βοήθεια της universal ιδιότητας των διαφορικών Kähler.

Πρόταση IX.3.30. *Αν ο R είναι μια Λ-άλγεβρα τοπικών συντεταγμένων, θα δείξουμε ότι το $\Omega_{R/\Lambda} \otimes_R k$ είναι ισόμορφο ως k-διανυσματικός χώρος με το*

$$t^*_{R/\Lambda} := \mathfrak{m}_R / (\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\phi : \mathfrak{m}_R \to \Omega_{R/\Lambda} \otimes k$, τον μορφισμό που στέλνει το $m \in \mathfrak{m}_R$ to $d(m) \otimes 1_k$, όπου $d : R \to \Omega_{R/\Lambda}$ είναι η universal Λ-παραγώγιση). Αρκεί να αποδείξουμε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής.

$$0 \to \mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathfrak{m}_R \xrightarrow{\phi} \Omega_{R/\Lambda} \otimes_R k \to 0.$$

Η ϕ είναι επί. Πράγματι, για ένα τυχαίο $(d(r) \otimes \kappa) \in \Omega_{R/\Lambda} \otimes_R k$, με $r \in R$ και $\kappa \in k$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ και $m \in \mathfrak{m}_R$ ώστε $r = \lambda_1 1_R + m,\ \kappa = \lambda_2 1_k$.

$$d(r) \otimes \kappa = (\lambda_1 d(1_R) + d(m)) \otimes \lambda_2 1_k = \lambda_2 d(m) \otimes 1_k = d(\lambda_2 m) \otimes 1_k,$$

και $\lambda_2 m \in \mathfrak{m}_R$.

ϕ είναι 1-1. Πράγματι, για $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}_R$ $\mu \in \mathfrak{m}_\Lambda$ και $r \in R$, $d(m_1 m_2) = d(m_1)m_2 + d(m_2)m_1$ και $d(\mu r) = d(r)\mu$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\phi(m_1 m_2) &= (d(m_1)m_2 + d(m_2)m_1) \otimes 1_k = \\ &= d(m_1) \otimes m_2 1_k + d(m_2) \otimes m_1 1_k = 0,\end{aligned}$$

και

$$\phi(\mu r) = d(r)\mu \otimes 1_k = d(r) \otimes \mu 1_k = 0.$$

Τέλος για κάθε $x \in \mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R$, υπάρχουν $m_{i,1}, m_{1,2} \in \mathfrak{m}_R,\ i = 1, \dots, n,\ \mu \in \mathfrak{m}_\Lambda$ και $r \in R$ ώστε

$$x = \sum m_{i,1} m_{i,2} + \mu r,$$

Συνεπώς $\phi(x) = \sum \phi(m_{i,1} m_{i,2}) + \phi(\mu r) = 0$, δηλαδή $\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R \subseteq \ker\phi$. Το επόμενο λήμμα ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα IX.3.31. *Για ένα τυχαίο* $m_0 \in \mathfrak{m}_R \setminus \mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R$ *υπάρχει μία Λ-παραγώγιση* $D : R \to k$, *ώστε το* $D(m_0)$ *δεν είναι μηδενικό.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι αρκεί να ορίσουμε την παραγώγιση, για τα στοιχεία του μέγιστου ιδεώδους $\mathfrak{m}_R$ του R. Πράγματι, για ένα τυχαίο $r \in R$ υπάρχει ένα $\lambda \in \Lambda$ ώστε $\pi_R(r) = \pi_\Lambda(\lambda)$, και το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\pi_\Lambda"'] & R \arrow[d, "\pi_R"] \\ & k \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\pi_R(r) = \pi_R(\lambda 1_R)$. Έπεται ότι υπάρχει ένα $m \in \mathfrak{m}_R$, ώστε $r = \lambda 1_R + m$, και συνεπώς για κάθε Λ-παραγώγιση δ,

$$\delta(r) = \delta(\lambda 1_R) + \delta(m) = \delta(m).$$

Αφού το R είναι δακτύλιος του Artinian υπάρχουν $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{m}_R$, ώστε

$$\mathfrak{m}_R / \left(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot R\right) = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s),$$

και $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s$ είναι ανεξάρτητα υπεράνω του k. Υπάρχουν $y_1, \dots, y_\ell \in \mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda$, ώστε

$$\mathfrak{m}_R = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_\ell).$$

Συνεπώς υπάρχουν $a_i, b_i \in R$ ώστε $m_0 = \sum a_i x_i + \sum b_i y_i$, και αφού $m_0 \notin \mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda$, υπάρχει ένα i_0, ώστε το a_{i_0} να είναι αντιστρέψιμο.

$$\begin{aligned}D(m_0) &= \sum D(a_i x_i) + \sum D(b_i y_i) = \sum D(a_i x_i) \\ &= \sum D(a_i)\overline{x}_i + D(x_i)\overline{a}_i = \sum \overline{a}_i D(x_i).\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι αρκεί να ορίσουμε την παραγώγιση D μόνο για τα x_i, και από την ανεξαρτησία των x_i μπορούμε να ορίσουμε τυχαία εικόνα για αυτά. Ορίζουμε $D(x_{i_0}) = 1$ και $D(x_j) = 0$ για $j \neq i_0$, και $D(m_0) = \overline{a}_{i_0}$ το οποίο είναι μη μηδενικό, αφού το a_{i_0} είναι αντιστρέψιμο. □

Παρατήρηση IX.3.32. *Παρατηρούμε ότι κάθε* R *στο* $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$ *παράγεται, ως* Λ*-module, από το* Λ *και το μέγιστο ιδεώδες* $\mathfrak{m}_R$*, όπως αποδείξαμε στην τελευταία απόδειξη.*

Παρατήρηση IX.3.33. *Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος* $t_{F,A}$ *είναι το υποσύνολο του* $\mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(R, A[\epsilon])$ *που αποτελείται από τους ομομορφισμούς* Λ*-αλγεβρών που η σύνθεσή τους με την προβολή* $A[\epsilon] \to A$ *ισούται με* ρ*.*

Πρόταση IX.3.34. *Έστω ένα* F *ένας pro-representable συναρτητής. Θεωρούμε το* $A \in \widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$ *και* $\rho : R \to A$ *ένας ομορφισμός* Λ*-αλγεβρών τοπικών συντεταγμένων που επάγει στο* A *μια δομή* R*-άλγεβρας. Τότε έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό από* A*-modules,*

$$\mathrm{Hom}_{A-mod.}(\Omega_{R/\Lambda}\widehat{\otimes}_R A, A) \cong t_{F,A}.$$

Απόδειξη. Έχουμε τον ισομορφισμό,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A-mod.}(\Omega_{R/\Lambda}\widehat{\otimes}_R A, A) \cong \mathrm{Hom}_{R-mod.}(\Omega_{R/\Lambda}, A) \\ \mathrm{Hom}_{R-mod.}(\Omega_{R/\Lambda}, A) \cong \mathrm{Der}_\Lambda(R, A). \end{aligned} \tag{IX.6}$$

Επιπλέον υπάρχει ένας φυσικός μονομορφισμός

$$\iota : \mathrm{Der}_\Lambda(R, A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(R, A[\epsilon]),$$

το οποίο δίνει μια παραγώγιση δ στον ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \rho_\delta : R &\to A[\epsilon] \\ r &\to \rho(r) \oplus \epsilon \cdot \delta(r) \end{aligned}$$

Ο μονομορφισμός ι ταυτίζει το $\mathrm{Der}_\Lambda(R, A)$ με το υποσύνολο του $\mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(R, A[\epsilon])$, που αποτελείται από τους ομομορφισμούς ώστε η σύνθεση με τις προβολές $A[\epsilon] \to A$ yields $\rho : R \to A$. □

Παρατήρηση IX.3.35. *Η πρόταση IX.3.30 είναι σαφώς μια ειδική σχέση της τελευταίας πρότασης.*

IX.3.3 Η προσέγγιση του Schlessinger

Θα περιγράψουμε την προσέγγιση στη θεωρία διαταραχών όπως αυτή εκφράστηκε από τον Schlessinger [9].

Ένας συναρτητής δακτυλίων του Artin είναι ένας covariant συναρτητής

$$F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}.$$

Ορισμός IX.3.36. *Υποθέτουμε ότι ο* F *είναι ένα ένας covariant συναρτητής, ένα ζευγάρι παραμόρφωσης για τον* F *είναι το ζεύγος* (A, ξ)*, όπου* $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ *και* $\xi \in F(A)$*. Ένας μορφισμός ζευγαριών παραμόρφωσης* $u : (A, \xi) \to (A', \xi')$ *είναι ένας μορφισμός* $u : A \to A'$ *στο* $\mathcal{C}_\Lambda$ *ώστε* $F(u)(\xi) = \xi'$*.*

Προσπαθούμε να βρούμε ανυψώσεις, δηλαδή κατά πόσο μπορούμε αν έχουμε έναν συναρτητή $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ και έναν επιμορφισμό δακτυλίων $f : B \to A$ να σηκώσουμε ένα στοιχείο $\alpha \in F(A)$ σε ένα στοιχείο $\beta \in F(B)$ ώστε $F(f)(\beta) = \alpha$.

Έστω α ένα στοιχείο του $F(A)$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε μια ανύψωση του α στο $F(B)$. Αν υπάρχει ένας μορφισμός συναρτητών $u : F \to G$, έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & F(B) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] \arrow[d, dashed, "\phi"] & \\
 & F(A) \times_{G(A)} G(B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(A) \arrow[dr] & & G(B) \arrow[dl] \\
 & G(A) &
\end{tikzcd}$$

Αν επιπρόσθετα η συνάρτηση ϕ είναι επί, τότε αρκεί να έχουμε ανυψώσεις από το $G(A)$ στο $G(B)$. Πράγματι, απεικονίζουμε πρώτα το α στο $u(A)(\alpha) \in G(A)$, και ανυψώνουμε το $u(A)(\alpha)$ σε ένα στοιχείο $\beta \in G(B)$. Τώρα το ζευγάρι (α, β) είναι στο $F(A) \times_{G(A)} G(B)$, και χρησιμοποιώντας ότι η ϕ είναι επί, έχουμε ένα στοιχείο $\zeta \in F(B)$ ώστε, $\phi(\zeta) = (\alpha, \beta)$. Είναι σαφές ότι το ζ είναι μια ανύψωση του α.

Ορισμός IX.3.37. *Ένας μορφισμός συναρτητών $F \to G$ θα λέγεται ομαλός αν για κάθε επιμορφισμό $B \to A$ στο $\mathcal{C}_\Lambda$, ο μορφισμός*

$$F(B) \to F(A) \times_{G(A)} G(B),$$

είναι επί.

Παρατήρηση IX.3.38. *Αν $F \to G$ είναι ένας ομαλός μορφισμός συναρτητών και έχουμε έναν επιμορφισμό $B \to A$, για να έχουμε μια ανύψωση από το $F(A)$ στο $F(B)$ αρκεί να έχουμε ανυψώσεις από το $G(A)$ στο $G(B)$.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας *pro-representable* συναρτητής, είναι ένας συναρτητής $F : \mathcal{C}_\Lambda \to k$ ώστε να υπάρχει ένας δακτύλιος R στο $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$ με

$$F(A) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(R, A).$$

Είναι σαφές ότι κάθε αναπαραστάσιμος συναρτητής αποτελεί ένα παράδειγμα και pro-representable συναρτητή.

Παράδειγμα IX.3.39. *Για κάθε δακτύλιο R στο $\mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda)$, ορίζουμε τον (pro-representable) συναρτητή δακτυλίων του Artin,*

$$h_R(A) = \mathrm{Hom}(R, A).$$

Όταν το Λ είναι σταθερό, θα γράφουμε h_R αντί του $h_{R/\Lambda}$.

Πρόταση IX.3.40. *Έστω $R \to S$ ένας μορφισμός στο $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$. Τότε ο $h_S \to h_R$ είναι ομαλός αν και μόνο αν S είναι ένας δακτύλιος δυναμοσειρών πάνω από το R.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $h_S \to h_R$ είναι ομαλός, διαλέγουμε $x_1, \ldots, x_n \in S$, τα οποία επάγουν μια βάση του $t^*_{S/R}$. Αν θέσουμε $T = R[[X_1, \ldots, X_n]]$, παίρνουμε έναν μορφισμό $u_1 : S \to T/(\mathfrak{m}_T^2 + \mathfrak{m}_R \cdot T)$ από τοπικές R-άλγεβρες, απεικονίζοντας το x_i στην κλάση υπολοίπων του X_i. Από την ομαλότητα το u_1 ανυψώνεται στο $u_2 : S \to T/\mathfrak{m}_T^2$. Πράγματι, μπορούμε να απεικονίσουμε το u_1 σε ένα στοιχείο $\tilde{u}_1 \in h_R(\mathfrak{m}_T^2 + \mathfrak{m}_R \cdot T)$, προφανώς υπάρχει μία ανύψωση $v_1 \in h_R(T/\mathfrak{m}_T^2)$ και τέλος λόγω της ομαλότητας, μία ανύψωση του u_1 στο $h_S(T/\mathfrak{m}_T^2)$. Συνεπώς το u_2 ανυψώνεται στο $u_3 : S \to T/\mathfrak{m}_T^3$ (Σχήμα IX.3.3), ... κτλ. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε

$$\begin{tikzcd}
 & & h_S(T/\mathfrak{m}_T^3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & h_S(T/\mathfrak{m}_T^2) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ur, dashed, bend left] & & h_R(T/\mathfrak{m}_T^3) \arrow[dl] \\
h_S(t^*_{T/R}) \arrow[dr] \arrow[ur, dashed, bend left] & & h_R(T/\mathfrak{m}_T^2) \arrow[dl] & \\
 & h_R(t^*_{T/R}) & &
\end{tikzcd}$$

μια $u : S \to T$ η οποία λόγω της επιλογής του u_1, επάγει έναν ισομορφισμό του $t^*_{S/R}$ με $t^*_{T/R}$, ώστε u να είναι επιμορφισμός από το λήμμα IX.3.48. Επιπλέον, αν διαλέξουμε τα $y_i \in S$ ώστε $u(y_i) = X_i$ και παράγουμε έναν τοπικό μορφισμό $\nu : T \to S$ από R-άλγεβρες ώστε $u\nu = 1_T$; ειδικότερα το ν είναι 1-1. Είναι σαφές ότι ο ν επάγει μια 1-1 και επί συνάρτηση στους συνεφαπτόμενους χώρους, οπότε και πάλι λόγω του λήμματος IX.3.48 ο ν είναι επιμορφισμός surjection. Έπεται ότι ο ν είναι ένας ισομορφισμός του $T = R[[X_1, \dots, X_n]]$ με το S.

($\Leftarrow$) Αν S είναι δακτύλιος δυναμοσειρών υπεράνω του R, τότε είναι σαφές ότι ο $h_R \to h_S$ είναι ομαλός.

$\square$

Πρόταση IX.3.41. (i) *Αν $F \to G$ και $G \to H$ είναι ομαλοί, τότε και η σύνθεσή τους $F \to H$ είναι ομαλή.*

(ii) *Αν $u : F \to G$ και $v : G \to H$ είναι μορφισμοί ώστε ο u να είναι επί και ο vu να είναι ομαλός, τότε και ο v είναι ομαλός.*

(iii) *Αν $F \to G$ και $H \to G$ είναι μορφισμοί ώστε ο $F \to G$ να είναι ομαλός, τότε και ο $F \times_G H \to H$ είναι ομαλός.*

Η απόδειξη είναι τυπική επαλήθευση και αφήνεται στον αναγνώστη.

Universal Elements

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα R στο $\mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda)$. Ένα στοιχείο $\widehat{u} \in \widehat{F}(R)$, θα λέγεται τυπικό στοιχείο του F. Εξ ορισμού το $\widehat{u}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύστημα στοιχείων $u_{n+1} \in F(R/\mathfrak{m}^{n+1})$, ώστε για κάθε $n \geqslant 1$, η συνάρτηση

$$F(R/\mathfrak{m}^{n+1}) \to F(R/\mathfrak{m}^n)$$

που επάγεται από την προβολή $R/\mathfrak{m}^{n+1} \to R/\mathfrak{m}$, να στέλνει το $u_{n+1} \mapsto u_n$.

Λήμμα IX.3.42. *Έστω $R \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda)$. Υπάρχει μία $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στα $\widehat{F}(R)$ και στο σύνολο των μορφισμών $\{h_R \to F\}$.*

Απόδειξη. Κάθε τυπικό στοιχείο $\widehat{u} \in \widehat{F}(R)$ ορισμένο ως, $\widehat{u} = \mathrm{proj.lim.} u_n$, όπου $u_n \in F(R/\mathfrak{m}^n)$. Το λήμμα του Yoneda μας δίνει έναν μορφισμό συναρτητών

$$h_{R/\mathfrak{m}^n} \to F,$$

για κάθε u_n. Το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(R/m^n) \arrow[r] \arrow[d] & \{h_{R/m^n} \to F\} \arrow[d] \\ F(R/m^{n+1}) \arrow[r] & \{h_{R/m^{n+1}} \to F\} \end{tikzcd}$$

επάγει ένα νέο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} h_{R/m^n} \arrow[r] \arrow[dr] & h_{R/m^{n+1}} \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}$$

Αφού κάθε $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\Lambda)$

$$h_{R/m^n}(A) \to h_{R/m^{n+1}}(A),$$

είναι 1-1 και επί για όλα εκτός από πεπερασμένα n, μπορούμε να ορίσουμε $h_R(A) \to F(A)$ ως,

$$\lim_{n \to +\infty} [h_{R/m^n}(A) \to F(A)].$$

Αντιστρόφως, κάθε μορφισμός $h_R \to F$ ορίζει ένα τυπικό στοιχείο $\widehat{u} \in \widehat{F}(R)$, όπου $u_n \in F(R/m^n)$ είναι η εικόνα της προβολής $R \to R/m^n$ μέσω της συνάρτησης

$$h_R(R/m^n) \to F(R/m^{n-1})$$

□

Ορισμός IX.3.43. *Αν R είναι στο $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\Lambda)$ και $\widehat{u} \in \widehat{F}(R)$, θα λέμε το $(R, \widehat{u})$ α τυπικό ζευγάρι παραμόρφωσης για τον συναρτητή F.*

Ορισμός IX.3.44. *Το διαφορικό*

$$t_{R/\Lambda} \to t_F$$

του μορφισμού $h_R \to F$ που ορίζεται από το $\widehat{u}$ θα λέγεται η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\widehat{u}$ (ή του τυπικού ζευγαριού παραμόρφωσης $(R, \widehat{u})$) και θα συμβολίζεται με $d\widehat{u}$.

Ορισμός IX.3.45. *Αν $(R, \widehat{u})$ είναι τέτοιο ώστε ο επαγόμενος μορφισμός*

$$h_R \to F$$

να είναι ισομορφισμός, τότε ο F είναι pro-representable και θα λέμε ότι ο F είναι pro-represented μέσω του τυπικού ζευγαριού παραμόρφωσης $(R, \widehat{u})$. Σε αυτή την περίπτωση το $\widehat{u}$ θα λέγεται universal formal στοιχείο για τον F και το $(R, \widehat{u})$ θα είναι universal τυπικό ζευγάρι παραμόρφωσης.

Ένα universal ζευγάρι παραμόρφωσης υπάρχει σπάνια, οπότε θα πρέπει να εισάγουμε μια ασθενέστερη έννοια τυπικού ζευγαριού παραμόρφωσης. Θα εισάγουμε την έννοια της “versality” και της “semiversality”, οι οποίες είναι λίγο ασθενέστερες από την έννοια της universality, βασισμένοι στην έννοια του ομαλού συναρτητή.

Ορισμός IX.3.46. *Έστω F ένας συναρτητής από δακτυλίους του Artin και R στο $\mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda)$. Ένα τυπικό ζευγάρι παραμόρφωσης $\widehat{u} \in \widehat{F(R)}$ θα λέγεται versal, αν ο μορφισμός $h_R \to F$ ορισμένος από $\widehat{u}$, είναι ομαλός.*

Ορισμός IX.3.47. *Το τυπικό στοιχείο $\widehat{u}$ θα λέγεται semiuniversal αν είναι versal και επιπλέον, το διαφορικό $t_{R/\Lambda} \to t_F$ είναι 1-1 και επί. Ο Schlessinger ονομάζει το τυπικό ζευγάρι παραμόρφωσης $(R, \widehat{u})$ μια (pro-representable) hull του F.*

Είναι σαφές από τους ορισμούς ότι:

$$\widehat{u} \text{ universal} \Rightarrow \widehat{u} \text{ semiuniversal} \Rightarrow \widehat{u} \text{ versal}$$

Το Θεώρημα του Schlessinger

Θα χρειαστούμε να ορίσουμε την έννοια της *μικρής επέκτασης*.

Λήμμα IX.3.48. *Ένας μορφισμός* $B \to A$ *στο* $\widehat{\mathcal{C}}_\Lambda$ *είναι επί αν και μόνο αν ο επαγόμενος μορφισμός* $t_B^* \to t_A^*$ *είναι επί.*

Απόδειξη. $(\Leftarrow)$ Αν ο μορφισμός $B \to A$ είναι επί, τότε προφανώς ο επαγόμενος μορφισμός στους συνεφαπτόμενους χώρους είναι επί.

$(\Rightarrow)$ Αντιστρόφως, θεωρούμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_\Lambda \cdot A/\left(\mathfrak{m}_A^2 \cap \mathfrak{m}_\Lambda \cdot A\right) \arrow[r] & \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \arrow[r] & t_A^* \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_\Lambda \cdot B/\left(\mathfrak{m}_B^2 \cap \mathfrak{m}_\Lambda \cdot B\right) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & t_B^* \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & 0 \end{tikzcd}$$

Αφού το α και το γ είναι επί, και το β είναι επίσης επί. Θα χρειαστεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Im}\,(B \to A) = A$, από το λήμμα του Nakayama (αφού το B είναι δακτύλιος του Artin, το $\mathfrak{m}_B$ είναι μηδενοδύναμο) σύμφωνα με το οποίο αρκεί να δείξουμε ότι

$$A = \mathrm{Im}\,(B \to A) + \mathfrak{m}_B \cdot A.$$

Από την παρατήρηση IX.3.32, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathfrak{m}_B \cdot A \to \mathfrak{m}_A$ είναι επί. Χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά το λήμμα του Nakayama αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\mathfrak{m}_B A/\mathfrak{m}_B \mathfrak{m}_A \to \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$$

είναι επί. Γνωρίζουμε ότι το επόμενο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\beta"] & \mathfrak{m}_B \cdot A/\mathfrak{m}_B\mathfrak{m}_A \arrow[r] & \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2. \end{tikzcd}$$

Αφού η β είναι επί, έχουμε τελειώσει. □

Ορισμός IX.3.49. *Θεωρούμε τον επιμορφισμό* $p : B \to A$ *στο* $\mathcal{C}_\Lambda$,

- *Η* p *είναι μικρή επέκταση, αν* $\ker p$ *είναι ένα μη μηδενικό κύριο ιδεώδες* $\langle t \rangle$ *ώστε* $\mathfrak{m}_B \cdot t = (0)$.
- *Η* p *είναι ουσιώδης αν για κάθε μορφισμό* $q : C \to B$ *in* $\mathcal{C}_\Lambda$ *ώστε η* pq *να είναι επί, να έχουμε ότι* q *είναι επί.*

Λήμμα IX.3.50. *Έστω* $f : B \to A$ *ένας επιμορφισμός στην* $\mathcal{C}_\Lambda$. *Τότε η* f *μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως σύνθεση μικρών επεκτάσεων.*

Απόδειξη. Το μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_B$ του B είναι μηδενοδύναμο, αφού ο B είναι δακτύλιος του Artin. Έστω $\mathfrak{m}_B^n = 0$. Πρώτα έχουμε μια παραγοντοποίηση

$$B \to B/\ker(f)\mathfrak{m}_B^{n-1} \to \cdots \to B/\ker(f) \cong A$$

του f σε σύνθεση επιμορφισμών των οποίων οι πυρήνες μηδενίζονται από το μέγιστο ιδεώδες. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα όταν το f είναι μια τέτοια συνάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση $\ker(f)$ είναι ένας k-διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση. Θεωρούμε μια βάση $t_1, \dots, t_r$ του $\ker(f)$ ως ένα k-διανυσματικό χώρο για να πάρουμε μια παραγοντοποίηση

$$B \to B/(t_1) \to \cdots \to B/(t_1, \dots, t_r) \cong A$$

της f ως σύνθεση μικρών επεκτάσεων. □

Λήμμα IX.3.51. *Έστω $p : B \to A$ ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{C}_\Lambda$. Τότε*

(i) *Ο p είναι ουσιώδης αν και μόνο αν η επαγόμενη συνάρτηση $p_* : t_B^* \to t_A^*$ είναι ισομορφισμός.*

(ii) *Αν p είναι μια μικρή επέκταση, ο p δεν είναι ουσιώδης αν και μόνο αν ο p έχει μια section, δηλαδή έναν ομομορφισμό*

$$s : A \to B, \text{ με } ps = 1_A$$

Απόδειξη. (i) Αν ο p_* είναι ισομορφισμός, τότε από το λήμμα IX.3.48, ο p είναι ουσιώδης. Αντιστρόφως θέτουμε $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r$ μια βάση του t_A^*, και ανυψώνουμε τα $\bar{t}_i$, σε στοιχεία t_i του B. Θέτουμε

$$C = \Lambda[t_1, \dots, t_r] \subseteq B.$$

Τότε το p επάγει έναν επιμορφισμό από το C στο A, αφού ο p είναι ουσιώδης, $C = B$. Συνεπώς $\dim_k t_B^* \leqslant r = \dim_k t_A^*$, και $t_B^* \cong t_A^*$.

(ii) Αν ο p έχει μια section s, τότε ο s δεν είναι επί και ο p δεν είναι ουσιώδης. Αν ο p δεν είναι ουσιώδης, τότε ο υποδακτύλιος C όπως κατασκευάστηκε παραπάνω, είναι ένας γνήσιος υποδακτύλιος του B. Αφού το $\text{length}(B) = \text{length}\ (A) + 1$, ο C είναι ισομορφικός με τον A. Ο ισομορφισμός $C \simeq A$ δίνει τη ζητούμενη section.

□

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν συναρτητή F δακτυλίων του Artin, τους δακτύλιους $A, A', A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C}_\Lambda)$ και ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr] & & A'' \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{IX.7}$$

το οποίο επάγει ένα νέο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & F(A' \times_A A'') \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & F(A') \times_{F(A)} F(A'') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(A') \arrow[dr] & & F(A'') \arrow[dl] \\ & F(A) & \end{tikzcd} \tag{IX.8}$$

Τέλος έχουμε μία συνάρτηση

$$\alpha : F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A''). \tag{IX.9}$$

Θα θέλαμε η συνάρτηση α να ικανοποιεί μία σειρά από ιδιότητες:

(H_0) Για $k = R/\mathfrak{m}_R$, το $F(k)$ να είναι μονοσύνολο.

(H_1) Για κάθε διάγραμμα (IX.7), όπου $A'' \to A$ να είναι μια μικρή επέκταση, ο μορφισμός α στο (IX.9) να είναι επί.

(H_2) Για κάθε διάγραμμα (IX.7), όπου $A = k$, $A'' = k[\epsilon]$, ο μορφισμός α στο (IX.9) να είναι 1-1 και επί.

(H_3) Το σύνολο $F(k[\epsilon])$ να έχει τη δομή πεπερασμένης διάστασης k-διανυσματικού χώρου.

(H_4) Για κάθε διάγραμμα (IX.7), όπου $A' = A''$, $A' \to A$ και $A'' \to A$ να είναι ίσες μικρές επεκτάσεις, ο μορφισμός α στο (IX.9) να είναι 1-1 και επί.

(H_ℓ) Για κάθε διάγραμα (IX.7), ο μορφισμός α στο (IX.9) να είναι 1-1.

Πρόταση IX.3.52. *Ένας pro-representable συναρτητής F ικανοποιεί τις συνθήκες (H_0), (H_3) και (H_ℓ).*

Απόδειξη. (H_0) Το σύνολο $\mathrm{Hom}(R, R/\mathfrak{m}_R)$ περιέχει μόνο την κανονική συνάρτηση πηλίκου $R \to R/\mathfrak{m}_R$.

(H_3) Έχουμε δει ότι
$$F(k[\epsilon]) = \mathrm{Hom}_{\Lambda-alg.}(R, k[\epsilon]) = \mathrm{Der}_\Lambda(R, k) = t_{R/\Lambda}.$$

Άρα είναι ο σχετικός εφαπτόμενος χώρος του R πάνω από το Λ. Αφού το R είναι δακτύλιος της Noether, ο εφαπτόμενος χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης.

(H_ℓ) Η απόδειξη είναι απλή και αφήνεται στον αναγνώστη.

□

Παρατήρηση IX.3.53. *Παρατηρήστε ότι οι (H_1), (H_2) και (H_4) είναι ειδικές περιπτώσεις της συνθήκης (H_ℓ).*

Παρατήρηση IX.3.54. *Ένας pro-representable functor $F = h_R$ ικανοποιεί τις συνθήκες (H_1), (H_2) και (H_4).*

Το επόμενο λήμμα είναι η παρατήρηση IX.3.19.

Λήμμα IX.3.55. *Αν F είναι ένας συναρτητής δακτυλίων του Artin rings που ικανοποιεί τις (H_0) και (H_2), τότε το σύνολο $F(k[\epsilon])$ έχει δομή ενός k-διανυσματικού χώρου με συναρτησιακό τρόπο.*

Θεώρημα IX.3.56. *Έστω $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ ένας covariant συναρτητής. Τότε ο F είναι pro-representable αν και μόνο αν ο F ικανοποιεί τις συνθήκες (H_0), (H_3) και (H_ℓ).*

Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [7].

Σε αντίθεση με το παραπάνω θεώρημα το οποίο απαιτεί την συνθήκη (H_ℓ), δηλαδή τον έλεγχο όλων των διαγραμμάτων της μορφής (IX.7), το θεώρημα του Schlessinger μειώνει τα διαγράμματα τα οποία θα πρέπει να ελεγχθούν.

Λήμμα IX.3.57. *Έστω F ένας συναρτητής δακτυλίων του Artin rings που ικανοποιεί τις συνθήκες (H_0), (H_1) και (H_2) και $\pi : A' \to A$ μια μικρή επέκταση με $\ker\pi = (t)$. Τότε η συνάρτηση*

$$\beta : t_F \times F(A') \xrightarrow{\alpha^{-1}} F(k[\epsilon] \times_k A') \xrightarrow{F(\gamma)} F(A' \times_A A') \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A')$$

που επάγεται από την

$$\begin{aligned} \gamma : k[\epsilon] \times_k A' &\to A' \times_A A' \\ (x + y\epsilon, a') &\mapsto (a' + yt, a') \end{aligned}$$

είναι επί. Αν επιπρόσθετα η F ικανοποιεί την (H_4), τότε η β είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Η συνθήκη (H_2) δίνει ότι η $\alpha : F(k[\epsilon] \times_k A') \to t_F \times F(A')$ είναι 1-1 και επί και συνεπώς έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση α^{-1}. Αφού η π είναι μια μικρή επέκταση, η γ είναι 1-1 και επί και το ίδιο είναι και η $F(\gamma)$. Τέλος, η $F(A' \times_A A') \to F(A' \times_A A')$ είναι επί από την (H_1). Για την περίπτωση που η (H_4) ικανοποιείται, παρατηρούμε ότι η $F(A' \times_A A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$ είναι 1-1 και επί. □

Παρατήρηση IX.3.58. *Παρατηρούμε, ότι η β επάγει μια μεταβατική δράση του διανυσματικού χώρου t_F στο σύνολο $F(\pi)^{-1}(\eta)$, όπου $\eta \in F(A)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι το αντιμεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} k[\epsilon] \times_k A', \arrow[r] \arrow[dr] & A' \times_A A' \arrow[d] \\ & A' \end{tikzcd}$$

όπου το κάθετο βέλος είναι δεξιά προβολή και συνεπώς είναι και αυτό αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} F(k[\epsilon]) \times F(A') \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddr, bend left] \arrow[dddd, bend right=60, "\beta"'] & \\ F(k[\epsilon] \times_k A') \arrow[dd, "F(\gamma)"'] \arrow[dr] & \\ & F(A') \\ F(A' \times_A A') \arrow[d] \arrow[ur] & \\ F(A') \times_{F(A)} F(A') \arrow[uur, bend right] & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή αν $\nu \in t_F$ και $\eta' \in F(A')$, τότε

$$\beta(\nu, \eta') = (\tau(\nu, \eta'), \eta').$$

Η δράση δίνεται από τη συνάρτηση τ και είναι μεταβατική, αφού η β είναι επί. Επιπρόσθετα, αν ο F ικανοποιεί την (H_4), τότε η δράση είναι ελεύθερη.

Θεώρημα IX.3.59. *Έστω* $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ *ένας συναρτητής δακτυλίων του Artin που ικανοποιεί την* (H_0)*, δηλαδή το* $F(k)$ *είναι μονοσύνολο. Έστω* $A' \to A$ *και* $A'' \to A$ *ομομορφισμοί στην* $\mathcal{C}_\Lambda$ *και θεωρούμε τη φυσική απεικόνιση*

$$\alpha : F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'') \tag{IX.10}$$

Τότε

(i) *Ο* F *έχει ένα semiuniversal τυπικό στοιχείο αν και μόνο αν ικανοποιεί τις συνθήκες* (H_1), (H_2) *και* (H_3)

(ii) *Ο* F *έχει ένα universal στοιχείο αν και μόνο αν επιπρόσθετα ικανοποιεί και την* (H_4).

Απόδειξη. [12] □

Παρατήρηση IX.3.60. *Δηλαδή, στη γλώσσα του Schlessinger, ένας συναρτητής δακτυλίων του Artin ώστε το* $F(k)$ *να είναι μονοσύνολο, έχει ένα hull αν και μόνο αν ικανοποιεί τις* (H_1), (H_2), (H_3). *Επιπλέον, ο* F *είναι is pro-representable αν και μόνο αν ικανοποιεί την* (H_4).

Τοπικές παραμορφώσεις καμπυλών

Μια παραμόρφωση μιας ομαλής καμπύλης X υπεράνω του φάσματος ενός τοπικού δακτυλίου $\mathrm{Spec}(R)$ είναι ένας proper, επίπεδος morphism $\phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ μαζί με έναν ισομορφισμό του X με την ίνα του $\mathcal{X}$ πάνω από το μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ του R, δηλαδή

$$X \cong \mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}).$$

Ορισμός IX.3.61. *Ένας μορφισμός πεπερασμένου τύπου* $\phi : X \to S$ *ανάμεσα σε σχήματα της Noether είναι proper αν για κάθε διακριτό δακτύλιο εκτίμησης* R *με σώμα κλασμάτων* k *και κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο μορφισμών*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\phi"] \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\mathrm{Spec}(R) \to X$ *ο οποίος να ταιριάζει με το διάγραμμα.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον συναρτητή παραμόρφωσης Def_X καμπυλών με αυτομορφισμούς από την κατηγορία των τοπικών αλγεβρών Artin στην κατηγορία των συνόλων:

$$\mathrm{Def}_X(A) = \{\text{παραμορφώσεις } X \text{ πάνω από το } A/\text{ισομορφισμούς}\},$$

όπου δύο παραμορφώσεις $\mathcal{X}_i \to \mathrm{Spec}A$, $i = 1, 2$ είναι ισοδύναμες αν ταιριάζουν στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_1 \arrow[rr, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr] & & \mathcal{X}_2 \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}A & \end{tikzcd}$$

Δοσμένης μιας παραμόρφωσης $Y \to \mathrm{Spec}(A)$ και ενός μορφισμού $A \to B$, μπορούμε να ορίσουμε την επαγόμενη παραμόρφωση $Y \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B)$ σε όρους του αντιμεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} Y \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η έννοια του μορφισμού παραμορφώσεων.

Θεώρημα IX.3.62. *Για κάθε καμπύλη* X *ο συναρτητής* Def_X *ικανοποιεί τα* H_1, H_2, H_3, H_4 *του θεωρήματος του Schlessinger.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον μορφισμό ζευγαριών παραμόρφωσης $(A', \eta') \to (A, \eta)$ και $(A'', \eta'') \to (A, \eta)$, όπου $A'' \to A$ είναι επιμορφισμός. Έστω X', Y, X'' παραμορφώσεις στην κλάση ισοδυναμίας των η', η, η'' αντίστοιχα και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X' & & X'' \\ & Y \arrow[ul, "u'"] \arrow[ur, "u''"'] & \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένα prescheme Z, επίπεδο πάνω από το $A' \times_A A''$, το άθροισμα των X' και X'' πάνω από το Y, στην κατηγορία των preschemes. Οι κλειστές immersions $X \to Y \to Z$ δίνουν στο Z μια δομή παραμόρφωσης του X υπεράνω του $A' \times_A A''$ ώστε να έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα παραμορφώσεων

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X' \arrow[ur, hook, "p'"] & & X'' \arrow[ul, "p''"'] \\ & Y \arrow[ul, "u'"] \arrow[ur, "u''"'] & \end{tikzcd}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η

$$\mathrm{Def}_X(A' \times_A A'') \to \mathrm{Def}_X(A') \times_{\mathrm{Def}_X(A)} \mathrm{Def}_X(A'')$$

είναι επί, για κάθε επιμορφισμό $A'' \to A$. Συνεπώς η συνθήκη H_1 ικανοποιείται.

Υποθέτουμε ότι η W είναι μια παραμόρφωση πάνω από το B, η οποία επάγει τις παραμορφώσεις X' και X''. Τότε υπάρχει ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα παραμορφώσεων,

$$\begin{tikzcd} & & W & & \\ X' \arrow[urr, "q'"] & & & & X'' \arrow[ull, "q''"'] \\ & Y \arrow[ul, "u'"] & & Y \arrow[ll, "\theta"'] \arrow[ur, "u''"'] & \end{tikzcd}$$

όπου η θ είναι η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "\cong"] & & Y \\ X' \otimes_{\mathrm{Spec}(A')} \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "\cong"] & W \otimes_{\mathrm{Spec}(B)} \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & X'' \otimes_{\mathrm{Spec}(A')} \mathrm{Spec}(A) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Αν η θ μπορεί να ανυψωθεί σε έναν αυτομορφισμό της θ' του X', ώστε $\theta' u' = u' \theta$, τότε η q' μπορεί να αντικατασταθεί με την $q'\theta'$ και τότε $W \overset{\cong}{\to} Z$. Για την ειδική περίπτωση $A = k$, $Y = X$, $\theta = \mathrm{Id}$ αυτή η ανύψωση θ' υπάρχει και η συνθήκη (H_2) ικανοποιείται.

Για τη συνθήκη H_4: θεωρούμε έναν μορφισμό ζευγαριών παραμόρφωσης $p : (A', \eta') \to (A, \eta)$, όπου p είναι μια μικρή επέκταση. Για έναν μορφισμό $B \to A$, έστω $\mathrm{Def}_X^{\eta}(B)$ το σύνολο των $\zeta \in \mathrm{Def}_X(B)$ ώστε $\zeta \otimes_B A = \eta$. Διαλέγουμε μια παραμόρφωση Y' στην κλάση της η'. Θα αποδείξουμε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathrm{Def}_X^{\eta}(A' \times_A A') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Def}_X^{\eta}(A') \times \mathrm{Def}_X^{\eta}(A')$

(ii) Κάθε αυτομορφισμός της παραμόρφωσης $Y = Y' \otimes_{A'} A$ επάγεται από έναν αυτομορφισμό της παραμόρφωσης Y'.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι (i) $\Rightarrow$ (ii). Θεωρούμε τον επαγόμενο μορφισμό παραμορφώσεων $u : Y \to Y'$. Αν θ είναι ένας αυτομορφισμός του Y, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε παραμορφώσεις Z, W υπεράνω του $A' \times_A A'$ για να δώσουμε «διαγράμματα άθροισης» παραμορφώσεων.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
Y' \arrow[ur] & & Y' \arrow[ul] \\
 & Y \arrow[ul, "u\theta"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & W & \\
Y' \arrow[ur] & & Y' \arrow[ul] \\
 & Y \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}
$$

Οι παραμόρφωσεις Z, W έχουν ισόμορφες προβολές και στους δύο παράγοντες, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\rho : Z \xrightarrow{\cong} W$, ο οποίος επάγει αυτομορφισμούς θ_1, θ_2 του Y' και έναν αυτομορφισμό ϕ του Y ώστε

$$\theta_1 u\theta = u\phi, \ \ \theta_2 u = u\phi.$$

Συνεπώς, $u\theta = \theta_1^{-1}\theta_2 u$ και $\theta_1^{-1}\theta_2$ επάγει τον θ.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (i). Από το (ii) για $I = \ker p$ έπεται ότι $t_F \otimes I$ δρα ελεύθερα στο η', δηλαδή $(\eta')^{\sigma} = \eta'$ δίνει ότι $\sigma = 0$. Αφού η δράση του $t_F \otimes I$ στο $\mathrm{Def}_X^{\eta}(A')$ είναι μεταβατική, ο χώρος $\mathrm{Def}_X^{\eta}(A')$ είναι ένας principal homogeneous space κάτω από τη δράση του $t_F \otimes I$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το (i).

Τώρα θα αποδείξουμε τη συνθήκη H_3. Αφού X είναι ομαλή πάνω από το k, μπορούμε να αποδείξουμε με τη χρήση συνομολογίας Chech ότι [1] ότι

$$t_{\mathrm{Def}_X} \cong H^1(X, \Theta),$$

όπου Θ είναι το εφαπτόμενο sheaf της καμπύλης X και από την Serre-Duality και το θεώρημα Riemann-Roch αποδεικνύεται ότι έχει πεπερασμένη διάσταση

$$\dim_k H^1(X, \Theta) = \dim_k H^0(X, \Omega^{\otimes 2}) = 3(g-1).$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Harris, J. & Morrison, I. *Moduli of curves*. Vol. 187. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1998, pp. xiv+366. ISBN: 0-387-98438-0; 0-387-98429-1.

[2] Hartshorne, R. *Deformation theory*. Vol. 257. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010, pp. viii+234. ISBN: 978-1-4419-1595-5. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1596-2`.

[3] Kodaira, K. & Spencer, D. C. *On deformations of complex analytic structures. I, II. Ann. of Math. (2)* 67 (1958), pp. 328–466. ISSN: 0003-486X. URL: `https://doi.org/10.2307/1970009`.

[4] Kodaira, K. *Complex manifolds and deformation of complex structures*. English. Classics in Mathematics. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. Berlin: Springer-Verlag, 2005, pp. x+465. ISBN: 3-540-22614-1.

[5] Matsumura, H. *Commutative algebra*. Second. Vol. 56. Mathematics Lecture Note Series. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980, pp. xv+313. ISBN: 0-8053-7026-9.

[6] Mazur, B. *Deformation theory of Galois Representations (in Modular forms and Fermat's last theorem)* (1997). Ed. by Cornell, G., Silverman, J. H. & Stevens, G. Papers from the Instructional Conference on Number Theory and Arithmetic Geometry held at Boston University, Boston, MA, August 9–18, 1995, pp. xx+582.

[7] Nitsure, N. *Notes on Deformation Theory, Guanajuato*. 2006. URL: `https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00392119`.

[8] Olsson, M. *Algebraic spaces and stacks*. Vol. 62. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, pp. xi+298. ISBN: 978-1-4704-2798-6. URL: `https://doi.org/10.1090/coll/062`.

[9] Schlessinger, M. *Functors of Artin rings*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 130 (1968), pp. 208–222.

[10] Schlessinger, M. *On rigid singularities*. *Rice Univ. Stud.* 59.1 (1973), pp. 147–162. ISSN: 0035-4996.

[11] Sernesi, E. *Deformations of algebraic schemes*. Vol. 334. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer Verlag, Berlin, 2006, pp. xii+339. ISBN: 978-3-540-30608-5; 3-540-30608-0.

[12] Τερεζάκης, Α. *Deformation Theory*. MA thesis. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2019.

X

Παράρτημα

X.1 Ευθέα και αντίστροφα όρια

X.1.1 Ευθέα όρια

Θα θεωρήσουμε ένα σύνολο $(I, \leqslant)$ εφοδιασμένο με μία σχέση διάταξης $\leqslant$ ώστε για κάθε $i, j \in I$ να υπάρχει ένα $c \in I$ με $a \leqslant i$ και $b \leqslant c$. Θεωρούμε επιπλέον μια οικογένεια $\{A_i : i \in I\}$ από σύνολα με αλγεβρική δομή (ομάδες, δακτύλιοι, modules κτλ.) για τα οποία για κάθε $i \leqslant j$ υπάρχει ένας ομομορφισμός

$$f_{ij} : A_i \to A_j \text{ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο}$$

ώστε

1. f_{ii} είναι η ταυτότητα στο A_i
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ για κάθε $i \leqslant j \leqslant k$

Τότε η οικογένεια (A_i, f_{ij}) θα λέγεται ένα ευθύ σύστημα με δείκτες από το I. Σε ένα τέτοιο ευθύ σύστημα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σύνολο πηλίκο

$$A = \lim_{\to} A_i = \coprod_{i \in I} A_i / \sim$$

όπου $x_i \in A_i$ και $x_j \in A_j$ θεωρούνται ισοδύναμα (και θα γράφουμε $x_i \sim x_j$) αν υπάρχει ένα k ώστε $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. Δηλαδή δύο στοιχεία στην ξένη ένωση θα είναι ισοδύναμα, αν γίνονται ίσα σε μεγαλύτερο στοιχείο του ευθέος συστήματος.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό υπάρχουν κανονικές συναρτήσεις $\phi : A_i \to A$ που στέλνουν το $a_i \in A_i$ στην κλάση του a_i στο $A = \lim_{\to} A_i$.

Παράδειγμα X.1.1. *1. Μία συλλογή υποσυνόλων M_i ενός συνόλου M μπορεί να διαταχθεί μερικά με της βοήθεια του εγκλεισμού. Αν σχηματίζει ένα ευθύ σύστημα, τότε το ευθύ όριο είναι η ένωση $\bigcup M_i$.*

2. Ας θεωρήσουμε ένα διατεταγμένο σύνολο δεικτών με ένα μέγιστο στοιχείο m. Το ευθύ όριο του ευθέος συστήματος είναι ισόμορφο με το X_m και ο κανονικός μορφισμός $\phi_m : X_m \to X$ είναι ισομορφισμός.

3. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Θεωρούμε το ευθύ σύστημα που αποτελείται από τις ομάδες $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ και τους ομομορφισμούς $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ που επάγονται από τον πολλαπλασιασμό με p. Το ευθύ όριο αυτού του συστήματος δίνει τις ρίζες της μονάδας με τάξη κάποια δύναμη του p και στη βιβλιογραφία είναι γνωστός ως η ομάδα Prüfer $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

4. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα sheaf επί ενός τοπολογικού χώρου X. Θεωρούμε ένα σημείο $x \in X$. Οι ανοιχτές περιοχές του x αποτελούν ένα ευθύ σύστημα διατεταγμένο με τον εγκλεισμό $U \leqslant V$ αν και μόνο αν το U περιέχει το V. Το ευθύ σύστημα είναι το $(\mathcal{F}(U), r_{U,V})$ όπου r είναι η συνάρτηση περιορισμού.*

   Το ευθύ όριο του συστήματος ονομάζεται το stalk του $\mathcal{F}$ στο x. Κάθε περιοχή U του x δίνει έναν κανονικό μορφισμό $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, ενώ η εικόνα της section $s \in \mathcal{F}(U)$ στο $\mathcal{F}_x$ ονομάζεται το φύτρο της s στο x.

X.1.2 Αντίστροφα Όρια

Ένα αντίστροφο σύστημα αποτελείται από ένα διατεταγμένο σύνολο $I, \leqslant$. Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια από αλγεβρικά αντικείμενα και

$$f_{ij} : A_j \to A_i \text{ από το μεγαλύτερο στο μικρότερο}$$

οικογένεια ομομορφισμών για κάθε $i \leqslant j$ με τις εξής ιδιότητες:

1. f_{ii} είναι η ταυτότητα σε κάθε A_i
2. $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ για $i \leqslant j \leqslant k$.

Το αντίστροφο όριο του αντιστρόφου συστήματος $((A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leqslant j})$ είναι το υποσύνολο του ευθέος γινομένου:

$$A = \varprojlim_{i \in I} = \left\{ a \in \prod_{i \in I} A_i : a_i = f_{ij}(a_j) \text{ για κάθε } i \leqslant j \in I \right\}.$$

Το αντίστροφο όριο έρχεται εφοδιασμένο με φυσικές προβολές $\pi_i : A \to A_j$ οι οποίες επιλέγουν τον i-παράγοντα του γινομένου.

Παράδειγμα X.1.2. 1. *Ο δακτύλιος των p-αδικών ακεραίων είναι το αντίστροφο όριο των δακτυλίων $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, όπου το σύνολο δεικτών είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών με τη φυσιολογική διάταξη, ενώ οι μορφισμοί είναι οι συναρτήσεις $x \mod p^{n+1} \mapsto x \mod p^n$.*

2. *Ο δακτύλιος $R[[t]]$ των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές από έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο R δακτυλίων $R[t]/t^n R[t]$, με σύνολο δεικτών τους φυσικούς αριθμούς με τη φυσιολογική διάταξη και συναρτήσεις*

$$R[t]/t^{n+j}R[t] \to R[t]/t^n R[t]$$

   να δίνονται από τη φυσιολογική προβολή.

3. *Pro-finite groups και θεωρία Galois*

4. *Αν το σύνολο δεικτών ενός αντιστρόφου συστήματος (X_i, f_{ij}) έχει ένα μέγιστο στοιχείο m, τότε η φυσική προβολή $\pi_m : X \mapsto X_m$ είναι ισομορφισμός.*

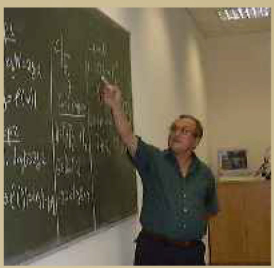
X.1.3 Σύγκριση ευθέων και αντίστροφων ορίων

Τα ευθέα όρια σχετίζονται με τα αντίστροφα όρια μέσω της

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim X_i, Y) = \varprojlim \mathrm{Hom}(X_i, Y).$$

Αλγεβρικές καμπύλες, μια εισαγωγή στην αλγεβρική γεωμετρία

Η αλγεβρική γεωμετρία ξεκίνησε από τη μελέτη των αλγεβρικών συνόλων, δηλαδή του γεωμετρικού τόπου των σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων. Αρκετά νωρίς έγινε σαφές ότι οι γεωμετρικές ιδιότητες τέτοιων συνόλων βρίσκονται κρυμμένες μέσα στις συναρτήσεις που ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο πάνω στα αντικείμενα αυτά.
Στο παρόν βιβλίο αναπτύσσεται τόσο η γενική θεωρία των σχημάτων όσο και η κλασική προσέγγιση των αλγεβρικών καμπυλών μέσω των επιφανειών Riemann αλλά και των αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων πάνω από ένα σώμα οποιασδήποτε χαρακτηριστικής.



Ιωάννης Αντωνιάδης: Διδάκτορας του Πανεπιστημίου της Κολωνίας, έχει διδάξει στα Πανεπιστήμια της Θεσσαλονίκης, της Κύπρου και της Κρήτης και είναι Ομότιμος Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης, Είναι έγγαμος, πατέρας τριών παιδιών και περήφανος παππούς.

Αριστείδης Κοντογεώργης: Διδάκτορας του Πανεπιστημίου Κρήτης, έχει διδάξει στα Πανεπιστήμια Κρήτης, Αιγαίου και Αθηνών. Είναι έγγαμος, πατέρας δύο παιδιών.

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε
από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας.