ΑΛΓΕΒΡΑ – 3η σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

Άσκηση 1 (1, 5, 6, 8, 11 σελ. 81, 82)**.** Θεωρούμε τις ακόλουθες μεταθέσεις της S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} ,$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} .$$

α′. Υπολογίστε τα γινόμενα $\tau\sigma$ και $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

β′. Υπολογίστε τις παραστάσεις $| < \sigma > |$ και σ^{100}.

γ′. Έστω A σύνολο και $\mu \in S_A$. Για δεδομένο $a \in A$ το σύνολο

$$\mathcal{O}_{a,\mu} := \{\mu^n(a) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

ονομάζεται *τροχιά* του a *μέσω της* μ. Βρείτε την $\mathcal{O}_{1,\sigma}$.

Άσκηση 2 (15 σελ. 82)**.** Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{\sigma \in S_4 \ : \ \sigma(3) = 3\}$.

Άσκηση 3 (17 σελ. 82)**.** Γράφουμε $S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, όπου

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} , \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

α′. Βρείτε τις κυκλικές υποομάδες $< \rho_1 >$, $< \rho_2 >$ και $< \mu_1 >$ της S_3.

β′. Βρείτε *όλες* τις υποομάδες, γνήσιες και μη γνήσιες, της S_3 και σχεδιάστε το δικτυωτό διάγραμμά τους.

Άσκηση 4 (35, 36 σελ. 84)**.** α′. Δείξτε ότι η S_n είναι μη αβελιανή για $n \geq 3$.

β′. Δείξτε ότι για $n \geq 3$ το μόνο στοιχείο σ της S_n που ικανοποιεί την $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ για κάθε $\gamma \in S_n$ είναι το $\sigma = \iota$, δηλαδή η ταυτοτική μετάθεση.