

Κωδικοποίηση

Ηράκλειο, 3/2/2004

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1^ο [2 μονάδες] Να κατασκευάσετε τον πίνακα των συνδρόμων για δυαδικό τέλειο [7, 4, 3]-κώδικα με πίνακα γεννήτορα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να αποκωδικοποιήσετε τις λέξεις 0000011 και 1010101.

Θέμα 2^ο C είναι ένας δυαδικός τέλειος 1-error correcting κώδικας με $\mathbf{0} \in C$. Να αποδείξετε ότι:

- i) [1 μονάδα] Ο C περιέχει $\frac{n(n-1)}{6}$ κωδικές λέξεις βάρους 3.
- ii) [2 μονάδες] Ο C περιέχει $\frac{n(n-1)(n-3)}{24}$ κωδικές λέξεις βάρους 4.

Θέμα 3^ο [2 μονάδες] Η ανάλυση του $X^{15} - 1$ στο σώμα \mathbf{F}_2 σε γινόμενο αναγώγων παραγόντων είναι:

$$X^{15} - 1 = (X + 1)(X^4 + X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^4 + X^3 + 1)(X^2 + X + 1).$$

Έστω ζ ρίζα του $X^4 + X + 1$. Να βρείτε όλους τους δυαδικούς πρωταρχικούς και με στενή σημασία BCH-κώδικες μήκους 15. Επίσης, να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση αυτών.

Θέμα 4^ο Θεωρούμε την καμπύλη $Y^2 + Y = X^5 + 1$ πάνω από το \mathbf{F}_2 .

- i) [0,25 μονάδες] Να τη γράψετε σε προβολική μορφή
- ii) [0,75 μονάδες] Πόσο είναι το γένος της;
- iii) [1 μονάδα] Να υπολογίσετε το πλήθος των ρητών της σημείων στα σώματα \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_4 και \mathbf{F}_8 .
- iv) [1 μονάδα] Με την βοήθεια όλων των ρητών σημείων της στο \mathbf{F}_8 να κατασκευάσετε όλους τους δυνατούς αλγεβρογεωμετρικούς κώδικες. Ποιος δίνει το καλύτερο δυνατό κάτω-φράγμα στην ελάχιστη απόσταση αυτών;

Καλή επιτυχία,
Γιάννης Α. Αντωνιάδης