Φυλλάδιο 3^o

Άσκηση 1

Αν $C = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$, ποιός είναι ο δυικός του $C^\perp$; Το ίδιο για τον κώδικα $C = \{000, 110, 011, 101\}$.

Για κάθε $x \in C$ και $y = y_1y_2y_3y_4 \in C^\perp$ θα πρέπει να ισχύει:

$$x \cdot y^T = 0.$$

Επομένως, θέτοντας

$$[1100] \cdot [y_1y_2y_3y_4]^T = 0,\ [0011] \cdot [y_1y_2y_3y_4]^T = 0 \ \text{ και } [1111] \cdot [y_1y_2y_3y_4]^T = 0,$$

προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_1 \oplus y_2 = 0,\ y_3 \oplus y_4 = 0,\ y_1 \oplus y_2 = y_3 \oplus y_4$$

ή

$$y_1 = y_2,\ y_3 = y_4,\ y_1 \oplus y_2 = y_3 \oplus y_4.$$

Η τελευταία σχέση από τις τρεις ισχύει, εφόσον ισχύουν οι δύο πρώτες, οπότε οι κωδικές λέξεις του $C^\perp$ έχουν τη μορφή $y = y_1y_1y_2y_2$ για κάθε $y_1,\ y_2 \in \mathbb{F}_2$. Για $y_1 = y_2 = 0$ προκύπτει η κωδική λέξη 0000. Για $y_1 = y_2 = 1$, η 1111, ενώ για $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ προκύπτει η 1100. Τέλος, για $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, προκύπτει η κωδική λέξη 0011. Επομένως, $C^\perp = C$.
Όμοια με πριν, για τις κωδικές λέξεις $y = y_1y_2y_3$ του $C^\perp$, με $C = \{000, 110, 011, 101\}$, βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύει $y_1 = y_2 = y_3$, οπότε $y = y_1y_1y_1$ για κάθε $y_1 \in \mathbb{F}_2$. Άρα $C^\perp = \{000, 111\}$.

Άσκηση 2

Αν E_n ο δυαδικός κώδικας άρτιου βάρους και μήκους n, να αποδείξετε ότι ο $E_n^\perp$ είναι ο κώδικας επανάληψης μήκους n.

Αναζητούμε όλα τα $y \in \mathbb{F}_2^n$, για τα οποία ισχύει:

$$x \cdot y^T = 0, \quad \forall x \in E_n.$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν G είναι ο γεννήτορας πίνακας του E_n, αρκεί να βρούμε όλα τα $y \in \mathbb{F}_2^n$ για τα οποία $Gy^T = 0$ γιατί τότε θα ισχύει:

$$Gy^T = 0 \Longleftrightarrow aGy^T = 0, \quad \forall a \in \mathbb{F}_2^{n-1} \Longleftrightarrow x \cdot y^T = 0, \quad \forall x \in E_n.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε κώδικα C και προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε κωδική λέξη του C είναι ο γραμμικός συνδυασμός κάποιων από τις γραμμές του G, αφού αυτές οι γραμμές αποτελούν βάση του υποχώρου C. Αν επομένως για όλες τις γραμμές $\mathbf{g_i}$ του G ισχύει

$$\mathbf{g_i} \cdot y^T = 0$$

θα ισχύει το ίδιο και για όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς x των γραμμών του G και οι εξισώσεις $x \cdot y^T = 0$ θα επαληθεύονται γι΄ αυτά τα y.
Από την Άσκηση 3 του 2ου φυλλαδίου γνωρίζουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας του E_n σε κανονική μορφή είναι ο εξής:

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & 1 \\ \mathbf{e_2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{e_{n-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{e_i}$, $(1 \leq i \leq n-1)$, είναι τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{F}_2^{n-1}$.
Επομένως, για τις κωδικές λέξεις $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ του $E_n^\perp$ ισχύει:

$$Gy^T = 0 \Longrightarrow (\mathbf{e_i}, 1) \cdot y^T = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y_i = y_n, i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Longrightarrow y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = y_n$$

δηλ. οι κωδικές λέξεις (μήκους n) του $E_n^\perp$ είναι της μορφής $y = y_1 y_1 \ldots y_1$, για κάθε $y_1 \in \mathbb{F}_2$. Άρα

$$E_n^\perp = \{00\ldots0, 11\ldots1\},$$

δηλ. ο κώδικας επανάληψης μήκους n.

Άσκηση 3

Αν C γραμμικός $[8, 4]$ δυαδικός κώδικας του οποίου τα ψηφία ελέγχου δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_5 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ x_6 &= u_0 + u_1 + u_3 \\ x_7 &= u_0 + u_2 + u_3 \\ x_8 &= u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}$$

Να βρείτε:

(i) Ένα γεννήτορα πίνακα του C.

(ii) Τον πίνακα ελέγχου H.

(iii) Την ελάχιστη απόσταση του κώδικα.

(iv) Τον τύπο του κώδικα.

(i) Ισχύει $uG = x$, για κάθε $u \in \mathbb{F}_2^4$. Δηλ. εάν με $\mathbf{g_i}$, συμβολίσουμε τις στήλες του G, έχουμε τη σχέση

$$u \cdot \mathbf{g_i} = x_i, \ \forall i \in \{1, 2, \dots, 8\} \tag{1}$$

Επειδή $x_i = u_{i-1}$, για $(1 \leq i \leq 4)$, οι τέσσερεις πρώτες στήλες του G είναι εκείνες του μοναδιαίου I_4 πίνακα. Οι εξισώσεις ελέγχου της άσκησης δίνουν μέσω της σχέσης (1) ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g_5} &= (1110)^T \\
\mathbf{g_6} &= (1101)^T \\
\mathbf{g_7} &= (1011)^T \\
\mathbf{g_8} &= (0111)^T
\end{aligned}$$

Επομένως

$$-A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Από την Άσκηση 7 του 2ου φυλλαδίου, γνωρίζουμε ότι οι στήλες του πίνακα H είναι ανα τρεις γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ η πρόσθεση των τριών πρώτων στηλών του H δίνει την πέμπτη στήλη του. Επομένως, $mld(H) = d_{min}(C) = 4$.

(iv) Από όλα τα παραπάνω ο κώδικας C είναι ένας $[8, 4, 4]$ κώδικας.