ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης
Φθινόπωρο 2001

5η σειρά ασκήσεων

1. Ας είναι G ο γεννήτορας πίνακας ενός δυαδικού κώδικα $(5,2)$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε ένα πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, όλα τα σύνδρομα και την αρχή των συμπλόκων γι΄ αυτό τον κώδικα.

Η κανονική μορφή του G είναι ο πίνακας

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από την εναλλαγή των δύο γραμμών του G. Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας του κώδικα είναι ο

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εξ ορισμού, για τα σύνδρομα s του κώδικα ισχύει:

$$s = Hy^T, \quad \forall y \in \mathbb{F}_2^5$$

οπότε το σύνολο των συνδρόμων S είναι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $(n-k) = (5-2) = 3$ γραμμικώς ανεξαρτήτων στηλών του H δηλ. $S = \mathbb{F}_2^3$.

Τέλος, γνωρίζουμε ότι έχουμε $2^{n-k} - 1 = 2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ σύμπλοκα (όσα ακριβώς είναι και τα μή μηδενικά σύνδρομα) και το καθένα περιλαμβάνει $2^k = 2^2 = 4$ διανύσματα του $\mathbb{F}_2^5$.

Θεωρούμε ως αρχές των συμπλόκων τα διανύσματα $e_i \in \mathbb{F}_2^5$ ελαχίστου βάρους για τα οποία ισχύει $s_i = He_i^T \neq 0$ για $(1 \leq i \leq 7)$. θα πρέπει επίσης για κάθε $e_i \neq e_j$, με $s_i = He_i^T$ και $s_j = He_j^T$ να ισχύει $s_i \neq s_j$ γιατί αλλιώς τα e_i, e_j ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο και μόνο το ένα από τα δύο μπορεί να είναι αρχή του συμπλόκου.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το σύνδρομο ισούται με το άθροισμα των στηλών του H στις οποίες έχουν συμβεί λάθη. Έτσι, το σύνδρομο $s = (0,0,1)^T$, ισούται με την 5η στήλη του H και προκύπτει ως $s = He^T$ όπου $e = (0,0,0,0,1)$ (δηλ. λάθος στην 5η θέση του διανύσματος που στάλθηκε). Συνεχίζοντας όμοια για τα υπόλοιπα σύνδρομα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αντιστοίχισης των συνδρόμων στις αρχές των συμπλόκων

Αρχή Συμπλόκου e	Σύνδρομο s^T
00000	000
00001	001
00010	010
00100	100
01000	111
00011	011
00110	110
00101	101

2. Ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας ορίζεται από το γεννήτορα πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε την τάξη του πίνακα G, την ελάχιστη απόσταση του κώδικα, ένα πίνακα ελέγχου ισοτιμίας και όλες τις κωδικές λέξεις.

Η τάξη $Rk(G)$ του πίνακα G ισούται με τον αριθμό των γραμμικώς ανεξαρτήτων γραμμών/στηλών του, άρα $Rk(G) = 3$.

Με εναλλαγή της 1ης με την 3η γραμμή του G και στη συνέχεια της 2ης με την 3η γραμμή, προκύπτει ο ίδιος κώδικας με γεννήτορα πίνακα

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και με πίνακα ελέγχου ισοτιμίας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $mld(H) = 2$, αφού η 2η και η 3η στήλη του H είναι όμοιες. Άρα, η ελάχιστη απόσταση του κώδικα είναι 2.

Οι κωδικές λέξεις x του κώδικα προκύπτουν ως $x = aG$, για κάθε $a \in \mathbb{F}_2^3$.

3. Προσδιορίστε το δυϊκό κώδικα του κώδικα της προηγούμενης άσκησης. Προσδιορίστε τις αρχές των συμπλόκων και τα σύνδρομα. Αν ληφθεί το διάνυσμα $y = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]$, ποιά κωδική λέξη του δυϊκού κώδικα είναι πιθανότερο να έχει σταλεί;

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας H του κώδικα C της προηγούμενης άσκησης είναι ο γεννήτορας πίνακας του $C^{\perp}$. Άρα, ο $C^{\perp}$ έχει πίνακα ελέγχου ισοτιμίας τον πίνακα G της προηγούμενης άσκησης.

Με όμοιο τρόπο όπως και στην 1η άσκηση, βρίσκουμε τα σύνδρομα $s_i \in \mathbb{F}_2^3$ και τις αρχές των συμπλόκων e_i, $(1 \leq i \leq 8)$, για τον κώδικα $C^{\perp}$ από τη σχέση $s_i = Ge_i^T$, όπως φαίνεται στον πίνακα του σχ. 1.

Αρχή Συμπλόκου e	Σύνδρομο s^T
00000	000
00001	111
00010	001
00100	010
01000	100
00011	110
00110	011
00101	101

Σχήμα 1: Πίνακας αποκωδικοποίησης.

Εάν έχει ληφθεί το διάνυσμα $y = [01001]$, έχουμε

$$s = Gy^T = (011)^T$$

και από τον πίνακα του σχ. 1, το σύνδρομο s αντιστοιχεί στην αρχή συμπλόκου $e = [00110]$. Επομένως το πιθανότερο είναι να έχει σταλεί η κωδική λέξη

$$x = y \oplus e = [01111]$$

σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα αποκωδικοποίησης.

4. Αποδείξτε ότι οι γραμμικοί κώδικες με γεννήτορες πίνακες

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

είναι ισοδύναμοι.

Με πρόσθεση των δύο πρώτων γραμμών του G_1 και αποθήκευση του αποτελέσματος στην 1η γραμμή, προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με αντιμετάθεση της 3ης και 4ης στήλης του G_{12}, προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος αποτελεί την κανονική μορφή του G_1.

Προσθέτοντας την 1η και 3η γραμμή του G_2 και αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στην 1η προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$G_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με πρόσθεση της 1ης και 2ης γραμμής του G_{22} και αποθήκευση του αποτελέσματος στη 2η προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$G_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με εναλλαγή της 1ης και 3ης στήλης του G_{22}, προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$G_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

που αποτελεί την κανονική μορφή του πίνακα G_2. Ισχύει $G_{12} = G_{23}$, οπότε οι δύο κώδικες είναι ισοδύναμοι.