Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Φθινοπωρο 2001

Μέρος του παρόντος δακτυλογραφήθηκε από τους Σοφία Πατρωνίδου και Ιωάννη Τουλόπουλο στα πλαίσια του έργου Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ «Μαθηματικά για το 2001: Αναμόρφωση και αναβάθμιση των Μαθηματικών σπουδών στην Ελλάδα».

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί

Για μια αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού (σύγκλιση, συνέχεια, παραγώγιση και ολοκλήρωση) χρειάζεται να έχουμε στη διάθεσή μας εξίσου αυστηρά θεμελιωμένο το σύστημα των αριθμών με τους οποίους θα δουλέψουμε: το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών σαν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Θα ακολουθήσουμε την αξιωματική μέθοδο: θα δεχτούμε την ύπαρξη ενός τέτοιου συστήματος αριθμών και θα περιγράψουμε τα σημαντικά υποσύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών αριθμών μέσα σε αυτό. Η πιο φυσιολογική πορεία της διαδοχικής θεμελίωσης των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και κατόπιν των πραγματικών αριθμών είναι κάτι που θα έπρεπε να δει κανείς τουλάχιστον μια φορά. Ξεφεύγει όμως από τους σκοπούς αυτού του μαθήματος (πάρτε κάποιο μάθημα Θεωρίας Συνόλων). Για να πάρετε μια γεύση, στο παράρτημα αυτού του κεφαλαίου συζητάμε τις τομές του Dedekind.

1.1 Διατεταγμένα σώματα

Ένα μη κενό σύνολο Σ λέγεται **διατεταγμένο σώμα** αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) Αξιώματα της πρόσθεσης. Για κάθε ζευγάρι x, y στοιχείων του Σ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x+y$ και λέγεται **άθροισμα** των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x+y$ λέγεται **πρόσθεση** και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Προσεταιριστικότητα: για κάθε $x, y, z \in \Sigma$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- Αντιμεταθετικότητα: για κάθε $x, y \in \Sigma$, $x+y = y+x$.
- Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Sigma$,
$$x+0 = 0+x = x.$$

- Για κάθε $x \in \Sigma$ υπάρχει ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $-x$, τέτοιο ώστε
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Λέμε οτι το Σ με την πράξη της πρόσθεσης είναι Αβελιανή ομάδα. Αποδείξτε οτι το 0 και το $-x$ (δοθέντος του x) ορίζονται μονοσήμαντα. Ο $-x$ είναι ο **αντίθετος** του x. Η **αφαίρεση** στο Σ ορίζεται από την

$$x - y = x + (-y), \quad x, y, \in \Sigma.$$

(β) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού. Για κάθε ζευγάρι $x, y \in \Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με xy και λέγεται **γινόμενο** των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο xy λέγεται **πολλαπλασιασμός** και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Προσεταιριστικότητα: για κάθε $x, y, z \in \Sigma$, $(xy)z = x(yz)$.
- Αντιμεταθετικότητα: για κάθε $x, y \in \Sigma$, $xy = yx$.
- Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ διαφορετικό από το 0 που συμβολίζεται με 1, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Sigma$,
$$x1 = 1x = x.$$
- Για κάθε $x \in \Sigma$ με $x \neq 0$ υπάρχει ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με x^{-1}, τέτοιο ώστε
$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

Αποδείξτε οτι το 1 και το x^{-1} (δοθέντος του $x \neq 0$) ορίζονται μονοσήμαντα. Ο x^{-1} είναι ο **αντίστροφος** του $x \neq 0$. Η **διαίρεση** στο Σ ορίζεται από την

$$\frac{x}{y} = xy^{-1}, \quad x, y \in \Sigma, \quad y \neq 0.$$

(γ) Η **επιμεριστική ιδιότητα** συνδέει τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση: για κάθε $x, y, z \in \Sigma$, έχουμε
$$x(y + z) = xy + xz.$$

(δ) Ιδιότητες της διάταξης. Υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του Σ, που λέγεται το σύνολο των **θετικών στοιχείων** του Σ, τέτοιο ώστε:

- για κάθε $x \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:
$$x \in \Theta, \quad -x \in \Theta, \quad x = 0.$$
- αν $x, y \in \Theta$ τότε $x + y \in \Theta$ και $xy \in \Theta$.

Το σύνολο Θ ορίζει μια **διάταξη** στο σώμα Σ ως εξής: λέμε οτι $x < y$ αν και μόνο αν $y - x \in \Theta$. Γράφοντας $x \leq y$ εννοούμε: είτε $x < y$ ή $x = y$. Από τον ορισμό,

$$x \in \Theta \Longleftrightarrow x > 0.$$

Από τις ιδιότητες του Θ έπονται οι εξής ιδιότητες της διάταξης $<$:

- για κάθε $x, y \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

$$x < y, \quad x > y, \quad x = y.$$

- αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
- αν $x < y$ τότε για κάθε z, $x + z < y + z$.
- αν $x < y$ και $z > 0$, τότε $xz < yz$.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τις φυσιολογικές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού είναι το τυπικό παράδειγμα διατεταγμένου σώματος. Όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{Q}$ έπονται από τον κατάλογο των ιδιοτήτων που δώσαμε πιο πάνω. Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ των φυσικών και των ακεραίων δεν ικανοποιούν όλα τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος (περιμένετε πρώτα να ορίσουμε αυτά τα σύνολα και κατόπιν ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς).

1.2 Το αξίωμα της πληρότητας

Από τη στιγμή που σε ένα διατεταγμένο σώμα Σ έχουμε ορισμένη τη διάταξη $<$, μπορούμε να μιλάμε για υποσύνολα του Σ που είναι άνω ή κάτω φραγμένα.

Ορισμός. Έστω Σ ένα διατεταγμένο σώμα. Ένα υποσύνολο A του Σ λέγεται

- **άνω φραγμένο**, αν υπάρχει $\alpha \in \Sigma$ με την ιδιότητα: $x \leq \alpha$ για κάθε $x \in A$.
- **κάτω φραγμένο**, αν υπάρχει $\alpha \in \Sigma$ με την ιδιότητα: $x \geq \alpha$ για κάθε $x \in A$.
- **φραγμένο**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Κάθε $\alpha \in \Sigma$ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό λέγεται άνω φράγμα (αντίστοιχα, κάτω φράγμα) του A.

Παρατήρηση: Έστω $A \subseteq \Sigma$ και α ένα άνω φράγμα του A, δηλαδή $x \leq \alpha$ για κάθε $x \in A$. Κάθε στοιχείο α_1 του Σ που είναι μεγαλύτερο του α είναι επίσης άνω φράγμα του A: αν $x \in A$ τότε $x \leq \alpha \leq \alpha_1$. Τελείως ανάλογα, αν $A \subseteq \Sigma$ και α ένα κάτω φράγμα του A, τότε κάθε στοιχείο α_1 του Σ που είναι μικρότερο από το α είναι επίσης κάτω φράγμα του A.

Φυσιολογικά, προσπαθεί κανείς να δει αν υπάρχει κάποιο ελάχιστο άνω φράγμα (αντίστοιχα, μέγιστο κάτω φράγμα) του A στο Σ.

Ορισμός. (α) Έστω A ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε οτι το $\alpha \in \Sigma$ είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** του A αν

- το α είναι άνω φράγμα του A και
- αν α_1 είναι άλλο άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leq \alpha_1$.

(β) Έστω A ένα κάτω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε οτι το $\alpha \in \Sigma$ είναι **μέγιστο κάτω φράγμα** του A αν

- το α είναι κάτω φράγμα του A και
- αν α_1 είναι άλλο κάτω φράγμα του A τότε $\alpha \geq \alpha_1$.

Το ελάχιστο άνω φράγμα του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό. Από τον ορισμό είναι φανερό οτι αν α, α_1 είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα του A τότε $\alpha \leq \alpha_1$ και $\alpha_1 \leq \alpha$, δηλαδή $\alpha = \alpha_1$. Ομοίως, το μέγιστο κάτω φράγμα του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

Στην περίπτωση που υπάρχουν, θα συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A με $\sup A$ (το supremum του A) και το μέγιστο κάτω φράγμα του A με $\inf A$ (το infimum του A). Τα $\inf A$, $\sup A$ μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στο σύνολο A.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω A υποσύνολο του Σ και $\alpha \in \Sigma$. Τότε, $\alpha = \sup A$ αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

(α) Το α είναι άνω φράγμα του A,

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x > \alpha - \varepsilon$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι $\alpha = \sup A$. Από τον ορισμό του supremum, ικανοποιείται το (α). Για το (β), έστω $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $x \in A$ ίσχυε η $x \leq \alpha - \varepsilon$, τότε το $\alpha - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα του A. Από τον ορισμό του supremum θα έπρεπε να έχουμε

$$\alpha \leq \alpha - \varepsilon \to \varepsilon \leq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ (το x εξαρτάται βέβαια από το ε) που ικανοποιεί την $x > \alpha - \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω $\alpha \in \Sigma$ που ικανοποιεί τα (α) και (β). Ειδικότερα, το A είναι άνω φραγμένο. Ας υποθέσουμε οτι το α δεν είναι το supremum του A. Τότε, υπάρχει $\beta < \alpha$ το οποίο είναι άνω φράγμα του A. Θέτουμε $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$. Τότε,

$$x \leq \beta = \alpha - \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το (β). □

Ορισμός. Λέμε οτι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί το **αξίωμα της πληρότητας** αν

> Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha \in \Sigma$.

Ένα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας λέγεται **πλήρως διατεταγμένο σώμα**.

Άσκηση. Έστω Σ ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Δείξτε οτι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Όλη η δουλειά που θα κάνουμε σε αυτό το μάθημα βασίζεται στην εξής παραδοχή:

> Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

Μπορεί κανείς να δείξει οτι υπάρχει «μόνο ένα» πλήρως διατεταγμένο σώμα. Δύο πλήρως διατεταγμένα σώματα είναι **ισόμορφα** (βλέπε M. Spivak, Κεφάλαιο 29).

1.3 Ορισμός των φυσικών και των ρητών αριθμών

Δεχτήκαμε το $\mathbb{R}$ σαν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Θα ορίσουμε τώρα σαν υποσύνολά του το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών, το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Ορισμός. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται **επαγωγικό** αν ικανοποιεί τα εξής:

- $1 \in A$
- αν $x \in A$ τότε και $x + 1 \in A$.

Υπάρχουν επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$: για παράδειγμα, το ίδιο το $\mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, το σύνολο $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 + 1\}$. Από την άλλη πλευρά, οι δύο ιδιότητες του ορισμού μας λένε οτι αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι επαγωγικό τότε $1 \in A$, $2 := 1 + 1 \in A$, $3 := 2 + 1 \in A$ κ.ο.κ., δηλαδή το A περιέχει τους «γνωστούς μας» φυσικούς αριθμούς. Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται **φυσικός** αν ανήκει σε όλα τα επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δηλαδή, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι το

$$\mathbb{N} = \bigcap \{\ A \subseteq \mathbb{R}, A \text{ επαγωγικό }\ \}.$$

Πρόταση 1.3.1 *Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο και περιέχεται σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).*

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα οτι το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό:

(α) Για κάθε επαγωγικό $A \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε $1 \in A$. Άρα, $1 \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in A$ για κάθε επαγωγικό $A \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό του επαγωγικού συνόλου, $x + 1 \in A$ για κάθε επαγωγικό $A \subseteq \mathbb{R}$, άρα $x + 1 \in \mathbb{N}$. Από τα (α) και (β), το $\mathbb{N}$ ικανοποιεί και τις δύο ιδιότητες του επαγωγικού συνόλου.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω A ένα επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από τον ορισμό του φυσικού αριθμού, κάθε φυσικός ανήκει στο A, δηλαδή $\mathbb{N} \subseteq A$. $\square$

Πρόταση 1.3.2 *Ο φυσικός αριθμός 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$.*

Απόδειξη: Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ είναι επαγωγικό: Προφανώς $1 \in A$ και αν $x \geq 1$ τότε $x + 1 > 1$ (διότι $1 > 0$). Όμως $\mathbb{N} \subset A$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \geq 1$. $\square$

Το γεγονός οτι το $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ διατυπώνεται συχνά στην εξής μορφή.

Θεώρημα 1.3.1 (Αρχή επαγωγής): *Έστω $\Pi(n)$ μια (μαθηματική) πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $\Pi(1)$ αληθεύει και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\Pi(n) \text{ αληθής } \Rightarrow \Pi(n+1) \text{ αληθής },$$

τότε η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό n.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N} : \Pi(x) \text{ αληθεύει}\}$. Το A είναι επαγωγικό:

(α) $1 \in A$ διότι, από την υπόθεση, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

(β) Αν $x \in A$ τότε $x \in \mathbb{N}$ και η $\Pi(x)$ αληθεύει οπότε, πάλι από την υπόθεση, η $\Pi(x+1)$ αληθεύει και $x + 1 \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x + 1 \in A$.

Έπεται οτι $\mathbb{N} \subseteq A$, διότι το $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ισχύει μάλιστα οτι $\mathbb{N} = A$, αφού από τον ορισμό του το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αφού κάθε φυσικός ανήκει στο A, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό n. $\square$

Πρόταση 1.3.3 *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \neq 1$, τότε $n - 1 \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 1 \text{ ή } x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Θα δείξουμε οτι το A είναι επαγωγικό:

(α) $1 \in A$ από τον ορισμό του A.

(β) Αν $x \in A$ τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: $x = 1$ οπότε $x + 1 \in A$ (αφού $(x+1) - 1 = 1 \in \mathbb{N}$) ή $x \in \mathbb{N}$ και $x - 1 \in \mathbb{N}$, οπότε $x + 1 \in \mathbb{N}$ και $(x+1) - 1 = x \in \mathbb{N}$ δηλαδή $x + 1 \in A$.

Έπεται οτι $A \supseteq \mathbb{N}$ (δηλαδή $A = \mathbb{N}$). $\square$

Πρόταση 1.3.4 *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ανάμεσα στον n και στον $n+1$ δεν υπάρχει κανένας φυσικός αριθμός.*

Απόδειξη: Θέτουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{ αν } x \in \mathbb{R} \text{ και } n < x < n+1 \text{ τότε } x \notin \mathbb{N}\}.$$

Θα δείξουμε οτι το A είναι επαγωγικό:

(α) $1 \in A$: το σύνολο $B = 1 \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ είναι επαγωγικό, άρα αν $1 < x < 2$ έχουμε $x \notin B$ απ' όπου έπεται οτι $x \notin \mathbb{N}$ (γιατί;).

(β) Έστω $n \in A$. Υποθέτουμε οτι $n + 1 < x < n + 2$. Αν $x \in \mathbb{N}$ έχουμε: $x > 2$ οπότε $x - 1 \in \mathbb{N}$ από την Πρόταση 1.3.3. Όμως $n < x - 1 < n + 1$ δηλαδή $n \notin A$, άτοπο. Άρα $x \notin \mathbb{N}$, που σημαίνει οτι $n + 1 \in A$.

Έπεται οτι $A = \mathbb{N}$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.3.2 (Αρχή του ελαχίστου) *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \text{ ο } x \text{ και όλοι οι μικρότεροί του φυσικοί δεν ανήκουν στο } A\}.$$

Το B δεν είναι επαγωγικό (αλλιώς θα είχαμε $A = \emptyset$). Άρα, δύο πράγματα μπορεί να συμβαίνουν:

(α) $1 \notin B$. Τότε $1 \in A$ και από την Πρόταση 1.3.2 το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Υπάρχει $x \in B$ με $x + 1 \notin B$. Αυτό σημαίνει οτι όλοι οι φυσικοί που είναι μικρότεροι του $x + 1$ δεν ανήκουν στο A και $x + 1 \notin B$, δηλαδή $x + 1 \in A$.

Ο $x + 1$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του A. Αν $y \in \mathbb{N}$ και $y < x + 1$ τότε $y \leq x$ (γιατί από την Πρόταση 1.3.4 δεν υπάρχει φυσικός ανάμεσα στον x και στον $x + 1$). Όμως $x \in B$ άρα $y \notin A$. □

Χρήσιμες είναι και οι παρακάτω μορφές της αρχής της επαγωγής (αποδείξτε τις μόνοι/μόνες σας):

Πρόταση 1.3.5 *Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάποιον $n_0 \in \mathbb{N}$ και*

$$\Pi(n) \text{ αληθεύει } \Rightarrow \Pi(n+1) \text{ αληθεύει},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Πρόταση 1.3.6 *Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από το φυσικό n. Αν η $\Pi(1)$ αληθεύει και ισχύει οτι*

$$\Pi(k) \text{ αληθεύει για κάθε } k \leq n \Rightarrow \Pi(n+1) \text{ αληθεύει},$$

τότε η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό n.

Ορισμός. Ένας πραγματικός αριθμός λέγεται **ακέραιος** αν είναι ο 0 ή αν είναι φυσικός ή αν ο αντίθετός του είναι φυσικός. Το σύνολο των ακεραίων συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ή } x \in \mathbb{N} \text{ ή } -x \in \mathbb{N}\}.$$

Πρόταση 1.3.7 *Αν $x \in \mathbb{Z}$ τότε $x - 1 \in \mathbb{Z}$ και $x + 1 \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη: Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$. Τότε $x + 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και $x - 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ από την Πρόταση 1.3.3.

(β) $x = 1$. Τότε $x + 1 = 2 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και $x - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$.

(γ) $x = 0$. Τότε $x + 1 = 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και $x - 1 = -1 \in \mathbb{Z}$ γιατί $-(-1) = 1 \in \mathbb{N}$.

(δ) $-x \in \mathbb{N}$. Τότε $-x + 1 \in \mathbb{N}$ δηλαδή $-(x - 1) \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x - 1 \in \mathbb{Z}$. Αν $x = -1$ τότε $x + 1 = 0 \in \mathbb{Z}$ ενώ αν $x \neq -1$ έχουμε $-x \in \mathbb{N}$, $-x \neq 1$ οπότε

$$-x - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow -(x+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Πρόταση 1.3.8 *Αν $x \in \mathbb{Z}$ τότε δεν υπάρχει κανένας ακέραιος ανάμεσα στον x και στον $x+1$.*

Απόδειξη: Άσκηση: διακρίνετε περιπτώσεις όπως στην Πρόταση 1.3.7. $\square$

Ορισμός. Ένας πραγματικός αριθμός ονομάζεται **ρητός** αν είναι πηλίκο ακεραίων. Το σύνολο των ρητών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$. Δηλαδή,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}.$$

Μπορούμε πάντα να υποθέτουμε οτι ο $x \in \mathbb{Q}$ γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι το $\mathbb{Q}$ είναι διατεταγμένο σώμα με τις πράξεις και την διάταξη που επάγονται από το $\mathbb{R}$. Είναι μάλιστα **πυκνό** διατεταγμένο σώμα, με την εξής έννοια: αν $p, q \in \mathbb{Q}$ και $p < q$, τότε υπάρχει $s \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $p < s < q$ (ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει άλλος ρητός: συγκρίνετε με τις Προτάσεις 1.3.4 και 1.3.8). Για την απόδειξη της «πυκνότητας», πάρτε $s = (p+q)/2$.

1.4 Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών

Η Αρχιμήδεια ιδιότητα ουσιαστικά μας λέει οτι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$:

Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών: *Έστω ε και $a \in \mathbb{R}$ με $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\varepsilon > a$.*

Απόδειξη: Αν όχι, τότε το σύνολο $A = \{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο από το a. Έστω $\beta = \sup A$. Τότε $\beta - \varepsilon < \beta$, άρα το $\beta - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0\varepsilon > \beta - \varepsilon$. Έπεται οτι $(n_0+1)\varepsilon > \beta$, άτοπο αφού το β είναι άνω φράγμα του A. $\square$

Πρόταση 1.4.1 *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ που είναι κάτω φραγμένο έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x \leq a$ για κάθε $a \in A$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών έπεται οτι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > -x$, δηλαδή $-n < x \leq a$ για κάθε $a \in A$. Υπάρχει δηλαδή $m \in \mathbb{Z}$ που είναι κάτω φράγμα του A (πάρτε $m = -n$), και μάλιστα «γνήσιο» με την έννοια οτι

$$m \in \mathbb{Z} \text{ και } m < a \text{ για κάθε } a \in A.$$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a - m : a \in A\} \subseteq \mathbb{N}$. Το B έχει ελάχιστο στοιχείο, το οποίο ονομάζουμε β. Δηλαδή,

$$\beta = a_0 - m \text{ για κάποιο } a_0 \in A \text{ και } \beta \leq a - m \text{ για κάθε } a \in A.$$

Τότε, ο a_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A: προφανώς $a_0 \in A$, και για κάθε $a \in A$ έχουμε $a_0 - m \leq a - m \Rightarrow a_0 \leq a$. □

Θεώρημα 1.4.1 (Ακέραιο μέρος) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε*

$$m \leq x < m + 1.$$

Απόδειξη: Το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{Z} : n > x\}$ είναι μη κενό (γιατί;) και κάτω φραγμένο από το x. Από την Πρόταση 1.4.1, το A έχει ελάχιστο στοιχείο : ας το πούμε n_0. Αφού $n_0 - 1 \notin A$, έχουμε $n_0 - 1 \leq x$. Θέτουμε $m = n_0 - 1$. Είδαμε οτι $m \leq x$. Επίσης $n_0 \in A$, δηλαδή $m + 1 > x$. Άρα,

$$m \leq x < m + 1.$$

Για τη μοναδικότητα ας υποθέσουμε οτι

$$m \leq x < m + 1 \text{ και } m_1 \leq x < m_1 + 1$$

όπου $m, m_1 \in \mathbb{Z}$. Έχουμε $m < m_1 + 1 \Rightarrow m \leq m_1$ (γιατί;) και $m_1 < m + 1 \Rightarrow m_1 \leq m$. Άρα $m = m_1$. □

Ορισμός. Ο ακέραιος m που μας δίνει το προηγούμενο θεώρημα (και ο οποίος εξαρτάται κάθε φορά από τον x) λέγεται **ακέραιο μέρος** του x, και συμβολίζεται με $[x]$. Δηλαδή, ο $[x]$ προσδιορίζεται από τις

$$[x] \in \mathbb{Z} \text{ και } [x] \leq x < [x] + 1.$$

Για παράδειγμα, $[2.7] = 2$, $[-2.7] = -3$.

Η ύπαρξη του ακεραίου μέρους και η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών μας εξασφαλίζουν την **πυκνότητα** του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$: ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε έναν ρητό.

Θεώρημα 1.4.2 *Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει ρητός p με την ιδιότητα*

$$x < p < y.$$

Απόδειξη: Έχουμε $y - x > 0$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει φυσικός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n(y - x) > 1$, δηλαδή

$$nx + 1 < ny.$$

Τότε,

$$nx < [nx] + 1 \leq nx + 1 < ny,$$

δηλαδή

$$x < \frac{[nx] + 1}{n} < y.$$

Αφού ο $p = \frac{[nx]+1}{n}$ είναι ρητός, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 1.4.3 (Ύπαρξη n-οστής ρίζας) *Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μοναδικός $y > 0$ τέτοιος ώστε $y^n = x$.*

[Ο y συμβολίζεται με $\sqrt[n]{x}$ ή $x^{1/n}$. Προφανώς μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση $n \geq 2$.]

Απόδειξη: Η μοναδικότητα είναι απλή: αν $0 < y_1 < y_2$ τότε $y_1^n < y_2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την ύπαρξη θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0 \text{ και } t^n < x\}.$$

Το E είναι μη κενό και άνω φραγμένο: Έχουμε

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^n < \frac{x}{1+x} < x$$

(γιατί;), άρα $E \neq \emptyset$, και

$$(1+x)^n > 1 + x > x,$$

άρα κάθε $t \in E$ φράσσεται από πάνω από τον $1 + x$.
Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το $y = \sup E$. Θα δείξουμε οτι $y^n = x$.
(α) Έστω οτι $y^n < x$. Θα βρούμε $h > 0$ τέτοιον ώστε $y + h \in E$ (άτοπο, γιατί ο y έχει υποτεθεί άνω φράγμα του E). Για κάθε $h > 0$ έχουμε

$$(y+h)^n - y^n = h\left((y+h)^{n-1} + (y+h)^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}\right) \leq nh(y+h)^{n-1}.$$

Θα επιλέξουμε $h < 1$ οπότε μπορούμε από τώρα να υποθέσουμε οτι

$$(y+h)^n - y^n \leq nh(y+1)^{n-1}.$$

Θέλουμε $h > 0$ τέτοιον ώστε $(y+h)^n < x$. Δηλαδή $(y+h)^n - y^n < x - y^n$. Αρκεί να ισχύει

$$nh(y+1)^{n-1} < x - y^n \text{ ή, ισοδύναμα, } h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό οτι αν

$$0 < h < \min\left(1, \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}\right),$$

τότε $(y+h)^n < x$, δηλαδή $y + h \in E$, άτοπο.
(β) Έστω οτι $y^n > x$. Θα βρούμε $h > 0$ τέτοιον ώστε $(y-h)^n > x$ (άτοπο, γιατί τότε ο $y - h$ θα ήταν άνω φράγμα του E μικρότερο από το $\sup E$). Για κάθε $0 < h < y$, έχουμε

$$y^n - (y-h)^n = h\left(y^{n-1} + y^{n-2}(y-h) + \ldots + (y-h)^{n-1}\right) < nhy^{n-1},$$

άρα

$$(y-h)^n - x > y^n - x - nhy^{n-1} > 0 \text{ αν } h < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Επομένως, αν $0 < h < (y^n - x)/(ny^{n-1})$ (ελέγξτε οτι αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος από τον y), έχουμε $(y-h)^n > x$, άτοπο.

Αναγκαστικά $y^n = x$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 1.4.4 *Το $\mathbb{Q}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $y > 0$ τέτοιος ώστε $y^2 = 2$. Θα δείξουμε οτι $y \notin \mathbb{Q}$. Έστω οτι $y = m/n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n είναι 1. Ειδικότερα οι m, n δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Έχουμε $m^2 = 2n^2$, άρα ο m είναι άρτιος (το τετράγωνο περιττού είναι περιττός). Έστω $m = 2k, k \in \mathbb{N}$. Τότε $n^2 = 2k^2$, άρα και ο n είναι άρτιος (άτοπο). $\square$

Ορισμός. Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός λέγεται **άρρητος**.

Θεώρημα 1.4.5 *Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$, τότε υπάρχει q άρρητος με $x < q < y$.*

Απόδειξη: Έχουμε $x < y$ και $\sqrt{2} > 0$, άρα $x/\sqrt{2} < y/\sqrt{2}$. Από το Θεώρημα 1.4.2, υπάρχει ρητός p με

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < p < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $p \neq 0$ (αλλιώς θα παίρναμε άλλον ρητό p' ανάμεσα στον $x/\sqrt{2}$ και στον $p = 0$). Έπεται οτι ο $q := p\sqrt{2}$ είναι άρρητος (γιατί;) και

$$x < q = p\sqrt{2} < y. \quad \square$$

Ορισμός (απόλυτη τιμή): Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η **απόλυτη τιμή** $|x|$ του x είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{αν } x \geq 0 \\ \\ -x & , \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι ικανοποιούνται τα εξής:

- $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1.5 Παράρτημα: Τομές Dedekind

Υποθέτουμε εδώ οτι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών έχει οριστεί, και όλες του οι ιδιότητες θεωρούνται γνωστές. Θα περιγράψουμε την κατασκευή του $\mathbb{R}$ μέσω των τομών Dedekind. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ θα είναι κάποια υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, οι λεγόμενες **τομές**. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό τους είναι οτι κάθε πραγματικός αριθμός προσδιορίζεται από το σύνολο των ρητών που είναι μικρότεροί του:

Άσκηση: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Χρησιμοποιώντας όσα είδαμε στις παραγράφους §1.1 - §1.4, δείξτε οτι

$$x = y \iff A_x = A_y.$$

Για παράδειγμα, ο $\sqrt{2}$ καθορίζεται πλήρως από το σύνολο $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$. Γενικότερα, $x = \sup A_x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός. Ένα υποσύνολο α του $\mathbb{Q}$ λέγεται **τομή** αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- αν $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ και $q < p$, τότε $q \in \alpha$.
- αν $p \in \alpha$, υπάρχει $q \in \alpha$ τέτοιος ώστε $p < q$.

Η τρίτη ιδιότητα μας λέει οτι μια τομή a δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Η δεύτερη έχει τις εξής άμεσες συνέπειες που θα φανούν χρήσιμες:

- αν $p \in \alpha$ και $q \notin \alpha$, τότε $p < q$.
- αν $r \notin \alpha$ και $r < s$, τότε $s \notin \alpha$.

Σημείωση: Σε όλη αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε τα ελληνικά γράμματα α, β, γ για τομές (=μελλοντικούς πραγματικούς αριθμούς) και τα λατινικά p, q, r, s για ρητούς αριθμούς.

Βήμα 1: Ορίζουμε $\mathbb{R} = \{\alpha \subseteq \mathbb{Q} : \text{το } \alpha \text{ είναι τομή}\}$. Αυτό θα είναι τελικά το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Βήμα 2: Πρώτα ορίζουμε την διάταξη στο $\mathbb{R}$. Αν α, β είναι δύο τομές, τότε

$$\alpha < \beta \iff \text{το } \alpha \text{ είναι γνήσιο υποσύνολο του } \beta.$$

Άσκηση: Δείξτε οτι αν α, β είναι τομές, τότε ακριβώς μια από τις $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ ισχύει.

Βήμα 3: Το $(\mathbb{R}, <)$ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας. Δηλαδή, αν A είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και υπάρχει τομή $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\alpha \leq \beta$ για κάθε $\alpha \in A$, τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη: Ορίζουμε γ την ένωση όλων των στοιχείων του A. Δηλαδή

$$\gamma = \{q \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A \text{ με } q \in \alpha\}.$$

Θα δείξουμε οτι $\gamma = \sup A$.

(α) Το γ είναι τομή: Πρώτον, $\gamma \neq \emptyset$: αφού $A \neq \emptyset$, υπάρχει $\alpha_0 \in A$. Αφού $\alpha_0 \neq \emptyset$, υπάρχει $q \in \alpha_0$. Τότε, $q \in \gamma$. Πρέπει επίσης να δείξουμε οτι $\gamma \neq \mathbb{Q}$: Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $q \notin \beta$. Αν $\alpha \in A$, τότε $\alpha \leq \beta$, άρα $q \notin \alpha$. Επομένως, $q \notin \cup\{\alpha : \alpha \in A\}$ δηλαδή $q \notin \gamma$. Άρα, το γ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του ορισμού της τομής.

Για την δεύτερη, έστω $p \in \gamma$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $q < p$. Υπάρχει $\alpha \in A$ με $p \in \alpha$ και $q < p$, άρα $q \in \alpha$. Αφού $\alpha \subseteq \gamma$, έπεται οτι $q \in \gamma$.

Για την τρίτη, έστω $p \in \gamma$. Υπάρχει $\alpha \in A$ με $p \in \alpha$. Αφού το α είναι τομή, υπάρχει $q \in \alpha$ με $p < q$. Τότε, $q \in \gamma$ και $p < q$.

(β) Το γ είναι άνω φράγμα του A: Αν $\alpha \in A$, τότε $\alpha \subseteq \gamma$ δηλαδή $\alpha \leq \gamma$.

(γ) Το γ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A: Έστω $\beta_1 \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Τότε $\beta_1 \geq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή $\beta_1 \supseteq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή

$$\beta_1 \supseteq \bigcup\{\alpha : \alpha \in A\} = \gamma,$$

δηλαδή $\beta_1 \geq \gamma$. $\square$

Βήμα 4: Ορίζουμε μια πράξη $+$ (πρόσθεση) στο $\mathbb{R}$ ως εξής: αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

(α) Δείχνουμε οτι το $\alpha + \beta$ είναι τομή, και εύκολα επαληθεύουμε οτι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(β) Ορίζουμε $0^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ και δείχνουμε οτι το $0^* \in \mathbb{R}$ και είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: $\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, το $-\alpha$ ορίζεται ως εξής:

$$-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \text{ υπάρχει } r \in \mathbb{Q}, r > 0 \text{ με } -q - r \notin \alpha\}.$$

Δείξτε οτι το $-\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0^*$.

Έπεται οτι η πράξη $+$ στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της πρόσθεσης. $\square$

Βήμα 5: Το σύνολο Θ των θετικών στοιχείων του $\mathbb{R}$ ορίζεται τώρα με φυσιολογικό τρόπο:

$$\alpha \in \Theta \Longleftrightarrow 0^* < \alpha.$$

Δείξτε οτι αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει μια ακριβώς από τις $\alpha \in \Theta$, $\alpha = 0^*$, $-\alpha \in \Theta$.

Βήμα 6: Ορίζουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού, πρώτα για $\alpha, \beta \in \Theta$: Αν $\alpha > 0^*$ και $\beta > 0^*$, θέτουμε

$$\alpha\beta = \{q \in \mathbb{Q} : \text{ υπάρχουν } r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0 \text{ με } q \leq rs\}.$$

(α) Δείχνουμε οτι το $\alpha\beta$ είναι τομή και $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Theta$.

(β) Ορίζουμε $1^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$. Τότε, $\alpha 1^* = 1^* \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \Theta$.

(γ) Αν $\alpha \in \Theta$, ο αντίστροφος α^{-1} του α ορίζεται από την:

$$\alpha^{-1} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ ή } q > 0 \text{ και υπάρχει } r \in \mathbb{Q}, r > 1 \text{ με } (qr)^{-1} \notin \alpha\}.$$

Δείξτε οτι $\alpha^{-1} \in \Theta$ και $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1^*$.

Ολοκληρώνουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού θέτοντας

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & , \text{αν } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & , \text{αν } \alpha < 0^*, \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & , \text{αν } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

και
$$\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*.$$
Μπορούμε τώρα να δούμε οτι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού, καθώς και η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Δεν θα μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες (αν θέλετε συμβουλευτείτε τον Spivak, Κεφάλαιο 28).

> «Το $\mathbb{R}$ με βάση την παραπάνω κατασκευή είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.»

Βήμα 7: Αν $q \in \mathbb{Q}$ ορίζουμε $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Κάθε q^* είναι τομή, δηλαδή $q^* \in \mathbb{R}$. Εύκολα δείχνουμε οτι:

(α) αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^* + q^* = (p+q)^*$.

(β) αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^* q^* = (pq)^*$.

(γ) αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^* < q^*$ αν και μόνο αν $p < q$.

Επομένως, η απεικόνιση $I : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ με $I(q) = q^*$ διατηρεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, καθώς και την διάταξη. Μπορούμε λοιπόν να βλέπουμε το $\mathbb{Q}$ σαν ένα διατεταγμένο υποσώμα του $\mathbb{R}$ μέσω της ταύτισης $\mathbb{Q} \longleftrightarrow \mathbb{Q}^*$ (όπου $\mathbb{Q}^* = \{q^* : q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$).

1.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε οτι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$:

(α) Αν $x < y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.

(β) Αν $x \leq y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.

(γ) Αν $|x - y| \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x = y$.

(δ) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x - y| < b - a$.

2. (α) Αν $|a - b| < \varepsilon$, τότε υπάρχει x τέτοιος ώστε
$$|a - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } |b - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(β) Ισχύει το αντίστροφο;

(γ) Έστω οτι $a < b < a + \varepsilon$. Βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε οτι
$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Αν $0 < a < b$, δείξτε οτι

$$na^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b-a} \leq nb^{n-1}.$$

4. (α) Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, δείξτε οτι

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + \ldots + a_n.$$

(β) Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$, τότε

$$1-(a_1+\ldots+a_n) \leq (1-a_1)\ldots(1-a_n) \leq 1-(a_1+\ldots+a_n)+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n).$$

5. (α) Αν $x \geq -1$, τότε $(1+x)^n \geq 1+nx$.
(β) Αν $0 < x < 1/n$, τότε $(1+x)^n < 1/(1-nx)$.
(γ) Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε

$$1 - nx \leq (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

(δ) Ισχύουν οι ανισότητες

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

6. (α) Αν $\sin(x/2) \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin(x/2)}.$$

(β) Αν $\sin x \neq 0$, τότε

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

(γ) Αν $\sin(x/2^n) \neq 0$, τότε

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin(x/2^n)}.$$

7. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) Αν $x_1, \ldots, x_n > 0$, τότε

$$x_1x_2\ldots x_n \leq \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Επίσης, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, τότε

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \right)^n .$$

8. (α) Ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$

(β) Ανισότητα του Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} .$$

9. Αν $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_1 > 0$ και $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$, τότε

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

10. Έστω Σ ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Δείξτε οτι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

11. Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

και

$$B = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

12. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε οτι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

13. Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\inf A = \sup A$. Τι συμπεραίνετε για το A;

14. Σωστό ή λάθος; Αν $x = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $a \in A$ με $x - \varepsilon < a < x$.

15. Είναι το κενό σύνολο άνω ή κάτω φραγμένο; Πώς θα ορίζατε το $\sup \emptyset$ ή το $\inf \emptyset$;

16. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε οτι το $A \cup B$ είναι φραγμένο και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad , \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

17. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε οτι

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad , \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

18. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε οτι

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \quad , \quad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

19. Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tA = \{ta : a \in A\}$. Δείξτε οτι

(α) αν $t \geq 0$ τότε $\sup(tA) = t \sup A$ και $\inf(tA) = t \inf A$.

(α) αν $t < 0$ τότε $\sup(tA) = t \inf A$ και $\inf(tA) = t \sup A$.

20. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$, $a \leq a_0$. Δείξτε οτι $a_0 = \sup A$.

21. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$,

$$a \leq b.$$

Δείξτε οτι $\sup A \leq \inf B$.

22. Έστω A, B όπως στην προηγούμενη άσκηση. Αν επιπλέον $A \cup B = \mathbb{R}$, δείξτε οτι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\text{είτε } A = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad \text{ή} \quad A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}.$$

23. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε

$$a \leq b.$$

Δείξτε οτι $\sup A \leq \sup B$.

24. Έστω A σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών με $\sup A < 1$. Υποθέτουμε οτι το A έχει την εξής ιδιότητα: αν $a, b \in A$ και $a < b$, τότε $a/b \in A$. Δείξτε οτι $\sup A \in A$.

25. Έστω $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε οτι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ με $0 < n \leq N$ τέτοιοι ώστε

$$|nx - m| < \frac{1}{N}.$$

26. Έστω x άρρητος. Δείξτε οτι υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί m/n με $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

27. Έστω $n \in \mathbb{N}$ που δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού. Δείξτε οτι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left|\sqrt{n} - \frac{m}{k}\right| \geq \frac{1}{Mk^2}$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

28. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Δείξτε οτι

$$x = y \Longleftrightarrow A_x = A_y.$$

29. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με την ιδιότητα $a_{n+1} < a_n/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε οτι

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

30. Έστω $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε οτι υπάρχει $1 \leq m \leq n-1$ με την ιδιότητα

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k, \qquad m = 1, \ldots, n-1$$

και

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Δείξτε οτι δύο διαδοχικοί από αυτούς είναι ετερόσημοι.

31. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leq x < 1/n$.

(γ) Δείξτε την ταυτότητα

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες

2.1 Ορισμός του ορίου - ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Μια συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών) λέγεται **ακολουθία**. Αντί να συμβολίζουμε τις τιμές της με $a(1), a(2), \ldots$, γράφουμε

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

και λέμε οτι ο αριθμός a_n είναι ο n-οστός **όρος** της ακολουθίας. Η ίδια η ακολουθία συμβολίζεται με $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$, (a_n) ή ακόμα πιό απλά με a_n χωρίς αυτό να προκαλεί σύγχυση.

Ορισμός Λέμε οτι η ακολουθία a_n **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό a (και γράφουμε $\lim a_n = a$ ή $\lim_n a_n = a$ ή $a_n \to a$ αν ισχύει το εξής:

> Σε οσοδήποτε μικρή περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ του a βρίσκονται τελικά όλοι οι όροι της (a_n).

Παρατηρώντας οτι $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αν και μόνο αν $|x-a| < \varepsilon$, μπορούμε να δώσουμε τον εξής αυστηρό ορισμό: η (a_n) συγκλίνει στον a αν:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $|a_n - a| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις (α) Στον παραπάνω ορισμό, ο δείκτης n_0 εξαρτάται κάθε φορά από το ε. Όσο όμως μικρό κι αν είναι το ε, μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ τέτοιον ώστε όλοι οι όροι που έπονται του a_{n_0} να βρίσκονται«ε-κοντά» στον a. Σκεφτείτε την προσπάθεια επιλογής του $n_0(\varepsilon)$ σαν ένα επ' άπειρον παιχνίδι με έναν αντίπαλο ο οποίος επιλέγει ολοένα και μικρότερο $\varepsilon > 0$.

(β) Λέμε οτι $a_n \to +\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $+\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ τέτοιος ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } a_n > M.$$

Αντίστοιχα, λέμε οτι $a_n \to -\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $-\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ τέτοιος ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } a_n < -M.$$

Χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «τείνει» στο $\pm\infty$: συμφωνούμε πως μια ακολουθία (a_n) **συγκλίνει** μόνο αν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a (ο οποίος λέγεται και **όριο** της (a_n)). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα λέμε οτι η ακολουθία **αποκλίνει**.

Για να εξοικειωθούμε με τον ορισμό δίνουμε αυστηρές αποδείξεις μερικών βασικών ιδιοτήτων των συγκλινουσών ακολουθιών.

Θεώρημα 2.1.1 (Μοναδικότητα του ορίου) *Αν $a_n \to a$ και $a_n \to b$, τότε $a = b$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει φυσικός $n_1(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq n_1, \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Ομοίως, αφού $a_n \to b$ υπάρχει φυσικός $n_2(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq n_2, \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Πάρτε κάποιον φυσικό n που να είναι μεγαλύτερος από τον n_1 και από τον n_2 (γιατί αυτό είναι δυνατό;). Τότε,

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Η ανισότητα $|a - b| < 2\varepsilon$ ισχύει λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό σημαίνει οτι $a = b$ (γιατί;).

Άλλος τρόπος: Υποθέτουμε οτι $a \neq b$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $a < b$. Αν πάρουμε $\varepsilon = (b - a)/4$, τότε $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Δηλαδή,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset.$$

Γι' αυτό το $\varepsilon > 0$, όπως παραπάνω, μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ το οποίο να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Όμως τότε,

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 2.1.2 *Θεωρούμε τρείς ακολουθίες a_n, b_n, γ_n που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $a_n \leq b_n \leq \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $\lim a_n = \lim \gamma_n = L$

Τότε, $\lim b_n = L$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to L$ και $\gamma_n \to L$, υπάρχουν $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)$ φυσικοί τέτοιοι ώστε

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ αν } n \geq n_1 \quad \text{και} \quad |\gamma_n - L| < \varepsilon \text{ αν } n \geq n_2.$$

Ισοδύναμα,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \text{ αν } n \geq n_1 \quad \text{και} \quad L - \varepsilon < \gamma_n < L + \varepsilon \text{ αν } n \geq n_2.$$

Επιλέγουμε $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Αν $n \geq n_0$, τότε

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq \gamma_n < L + \varepsilon$$

δηλαδή, αν $n \geq n_0$ έχουμε $|b_n - L| < \varepsilon$. Με βάση τον ορισμό, $b_n \to L$. □

• Βεβαιωθείτε οτι έχετε καταλάβει την διαδικασία απόδειξης: αν θέλουμε να δείξουμε οτι $t_n \to t$, πρέπει για αυθαίρετο (μικρό) $\varepsilon > 0$ - η απόδειξη ξεκινάει με την φράση «έστω $\varepsilon > 0$» - να βρούμε φυσικό n_0 (που εξαρτάται από το ε) με την ιδιότητα: $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |t_n - t| < \varepsilon$.

• Θα έχετε παρατηρήσει οτι οι πρώτοι m όροι ($m = 2, 10$ ή 10^{10} -το ίδιο κάνει-) δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση ή μη μιας ακολουθίας. Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $(b_n) = (a_{n+k})$ συγκλίνει, και μάλιστα $\lim_n a_n = \lim_n a_{n+k}$.

Ορισμός Η ακολουθία (a_n) λέγεται **φραγμένη** αν μπορούμε να βρούμε κάποιον $M > 0$ με την ιδιότητα

$$|a_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 2.1.3 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω οτι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } |a_n| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και εύκολα ελέγχουμε οτι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leq n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη. □

Θεώρημα 2.1.4 *Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n b_n \to ab$.*

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε οτι η διαφορά $|a_n b_n - ab|$ είναι μικρή όταν το n είναι μεγάλο. Γράφουμε :

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Η a_n μένει φραγμένη από το Θεώρημα 2.1.3, ενώ μπορούμε να κάνουμε τις $|b_n - b|$ και $|a_n - a|$ όσο μικρές θέλουμε (για μεγάλα n).

Τυπικά: Έστω M άνω φράγμα της $|a_n|$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. αν $n \geq n_0$ να έχουμε

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{και} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}.$$

[Η μονάδα στο $1+|b|$ είναι για προληπτικούς λόγους - για την περίπτωση που $b = 0$. Οι $\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$ είναι κάποιοι θετικοί αριθμοί και πάνω τους εφαρμόζουμε την υπόθεση οτι $a_n \to a, b_n \to b$.]

Έστω $n \geq n_0$. Τότε,

$$\begin{aligned} |a_n b - ab| &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έπεται οτι $a_n b_n \to ab$. $\square$

Θεώρημα 2.1.5 *Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b \neq 0$, τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε οτι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. (γιατί;) Σιωπηρά υποθέτουμε οτι $b_n \neq 0$ (ώστε ο $\frac{1}{b_n}$ να είναι καλά ορισμένος). Όπως όμως θα δούμε, η υπόθεση οτι $b \neq 0$ μας λέει οτι *τελικά* $b_n \neq 0$ (και αυτό έχει σημασία για τη σύγκλιση).

Ισχυρισμός Από κάποιον δείκτη και πέρα

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

[Εφαρμόζουμε το οτι $b_n \to b$ με $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. αν $n \geq n_1$ τότε $|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2}$.]

Ας δούμε τι θέλουμε να κάνουμε μικρό:

$$(*) \qquad \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}$$

αν $n \geq n_1$.

Τυπικά: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ για κάθε $n \geq n_2$. Επίσης, είδαμε οτι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$. Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αν $n \geq n_0$, η $(*)$ δίνει

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ (άρα και $\frac{a_n}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$). $\square$

Θεώρημα 2.1.6 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία, και $b_n \to 0$. Τότε $a_n b_n \to 0$.*

Απόδειξη: Έχουμε κάποιον $M > 0$ τ.ω. $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$ Αφού $b_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$|b_n| = |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται οτι, αν $n \geq n_0$ τότε

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \quad \square$$

Αφήνουμε σαν άσκηση την απόδειξη κάποιων άλλων βασικών προτάσεων για τη σύγκλιση ακολουθιών.

Άσκηση. Αποδείξτε τα εξής:

1. Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n + b_n \to a + b$.
2. Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a, b_n \to b$, τότε $a \leq b$.
3. Αν $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$, τότε $a \leq M$.

2.2 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) λέγεται:

- αύξουσα, αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- φθίνουσα, αν $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- γνησίως αύξουσα, αν $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- γνησίως φθίνουσα, αν $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις λέμε οτι η (a_n) είναι **μονότονη**.

Παρατήρηση Εύκολα ελέγχουμε οτι αν η (a_n) είναι αύξουσα τότε

$$(*) \qquad n \leq m \Longrightarrow a_n \leq a_m.$$

(σταθεροποιήστε το n και δείξτε οτι αν $a_n \leq a_m$ τότε $a_n \leq a_{m+1}$). Αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει για όλους τους άλλους τύπους μονοτονίας στον παραπάνω ορισμό.

Η διαίσθηση υποδεικνύει οτι αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη, τότε πρέπει να συγκλίνει. Για παράδειγμα, αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε οι όροι της συσσωρεύονται στο ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα δώσουμε αυστηρή απόδειξη γι' αυτό:

Θεώρημα 2.2.1 (Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών) *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι η a_n είναι αύξουσα. Από την υπόθεση, το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο (και βέβαια μή κενό). Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του. Έστω $a = \sup A$. Θα δείξουμε οτι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a - \varepsilon < a$, ο $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Επειδή η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_{n_0} \leq a_n$ και επειδή ο a είναι άνω φράγμα του A, $a_n \leq a$. Δηλαδή, αν $n \geq n_0$ τότε

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

Έπεται οτι $|a_n - a| < \varepsilon$. $\square$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται τα εξής:

- Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε τείνει στο $+\infty$.
- Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε τείνει στο $-\infty$.

Ας δούμε για παράδειγμα την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού: Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$a_n \geq a_{n_0} > M.$$

Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, $a_n \to +\infty$.

2.3 Κιβωτισμοί διαστημάτων

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1 είναι η «αρχή του κιβωτισμού»:

Θεώρημα 2.3.1 *Αν* $\mathbb{R} \supset [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \ldots$, *τότε*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \to 0$, *τότε το σύνολο* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ *περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό (είναι μονοσύνολο).*

Απόδειξη: Από την υπόθεση $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ έπεται οτι $a_n \leq a_{n+1}$ και $b_n \geq b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

Θα δείξουμε οτι οι (a_n), (b_n) είναι φραγμένες ακολουθίες: Αν $m > n$, τότε $b_n \geq b_m \geq a_m$ ενώ αν $m < n$ τότε $a_m \leq a_n \leq b_n$. Δηλαδή,

$$a_1 \leq a_m \leq b_n \leq b_1$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Η (a_n) είναι άνω φραγμένη π.χ. από τον b_1, και η (b_n) είναι κάτω φραγμένη π.χ. από τον a_1.

Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$a_n \to a \quad \text{και} \quad b_n \to b.$$

Αφού $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εύκολα βλέπουμε οτι $a \leq b$. Επίσης, η μονοτονία των $(a_n), (b_n)$ δίνει

$$a_n \leq a \quad \text{και} \quad b \leq b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$(*) \qquad [a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

(όπου συμφωνούμε οτι $[a, b] = \{a\} = \{b\}$ αν $a = b$). Ειδικότερα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Θα δείξουμε οτι

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Τότε, $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a = \lim_n a_n \leq x \leq \lim_n b_n = b \Rightarrow x \in [a, b].$$

Άρα,

$$[a, b] \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

και η ισότητα έπεται από την $(*)$.

Αν υποθέσουμε οτι $b_n - a_n \to 0$, έχουμε

$$b - a = \lim_n b_n - \lim_n a_n = \lim_n (b_n - a_n) = 0.$$

Δηλαδή, $a = b$. Άρα το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό: τον $a (= b)$. $\square$

2.4 Υπακολουθίες - Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Ορισμός Η ακολουθία (b_k) λέγεται **υπακολουθία** της (a_n) αν υπάρχει μια γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τέτοια ώστε

$$b_k = a_{n_k} \ \text{ για κάθε } \ k \in \mathbb{N}.$$

(Με άλλα λόγια, οι όροι της (b_k) είναι οι $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ όπου $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$). Φυσικά, κάθε ακολουθία έχει πολλές υπακολουθίες.

Θεώρημα 2.4.1 *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη: Έστω (a_n) τυχούσα ακολουθία. Λέμε οτι η (a_n) έχει **σημείο κορυφής** τον όρο a_k αν $a_k \geq a_m$ για κάθε $m \geq k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) η (a_n) έχει άπειρα σημεία κορυφής: Υπάρχουν δηλαδή $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τ.ω. οι όροι $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ να είναι σημεία κορυφής. Από τον ορισμό του σημείου κορυφής

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k} \geq \ldots,$$

δηλαδή η υπακολουθία (a_{n_k}) είναι φθίνουσα.

(β) η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής: Υπάρχει δηλαδή $n_1 \in \mathbb{N}$ (το τελευταίο σημείο κορυφής ή ο $n_1 = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής) με την ιδιότητα: αν $n \geq n_1$, υπάρχει $n' > n$ τ.ω. $a_{n'} > a_n$.

Βρίσκουμε $n_2 > n_1$ τ.ω. $a_{n_1} > a_{n_2}$, κατόπιν βρίσκουμε $n_3 > n_2$ τ.ω. $a_{n_3} > a_{n_2}$ και ούτω καθεξής. Υπάρχουν δηλαδή $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τ.ω.

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k} < \ldots.$$

Άρα, η (a_n) έχει τουλάχιστον μια αύξουσα υπακολουθία. $\square$

Άμεση συνέπεια είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass:

Θεώρημα 2.4.2 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Από το Θεώρημα 2.4.1 η (a_n) έχει μονότονη υπακολουθία (a_{n_k}). Η (a_{n_k}) είναι μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει. $\square$

2.5 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\varepsilon), \ \text{τότε} \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, αν από κάποιο δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της ακολουθίας (a_n) είναι ανά δύο «ε-κοντά».

Παρατήρηση Αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\text{αν } n \geq n_0(\varepsilon), \text{ τότε } \quad |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, από κάποιον δείκτη και πέρα, διαδοχικοί όροι είναι κοντά, δεν έπεται οτι η ακολουθία είναι Cauchy. Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Τότε,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

όταν $n \to \infty$, όμως

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$, απ' όπου βλέπουμε οτι η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy (γιατί;).

Πρόταση 2.5.1 *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Πάρτε $\varepsilon = 1 > 0$ στον ορισμό: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_n - a_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα, $|a_n - a_{n_0}| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$|a_n| < 1 + |a_{n_0}| \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_0.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ και εύκολα επαληθεύουμε οτι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2.5.2 *Αν μια ακολουθία Cauchy (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (a_n) συγκλίνει.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε οτι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy και οτι η υπακολουθία (a_{n_k}) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. για κάθε $k \geq k_0$

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. για κάθε $n, m \geq k_1$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$. Έστω $k \geq k_2$. Τότε $n_k \geq k_2 \geq k_0$, άρα

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης $n_k, k \geq k_2 \geq k_1$ άρα

$$|a_{n_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται οτι

$$|a_k - a| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $|a_k - a| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_2$. Αυτό σημαίνει οτι $a_n \to a$. □

Θεώρημα 2.5.1 *Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_0.$$

Έστω $n, m \geq n_0$. Τότε,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 2.5.1, η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τέλος, από την Πρόταση 2.5.2 έπεται οτι η (a_n) συγκλίνει. □

Αυτό το κριτήριο σύγκλισης είναι πολύ χρήσιμο. Πολλές φορές θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ορίου για μια ακολουθία χωρίς να μας ενδιαφέρει η τιμή του ορίου. Αρκεί να δείξουμε οτι η ακολουθία είναι Cauchy, δηλαδή οτι οι όροι της είναι «κοντά» για μεγάλους δείκτες, κάτι που δεν απαιτεί να μαντέψουμε εκ των προτέρων ποιό είναι το όριο. Αντίθετα, για να ξεκινήσουμε και μόνο να δουλεύουμε με τον ορισμό του ορίου, πρέπει ήδη να ξέρουμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο (Συγκρίνετε τους δύο ορισμούς: «$a_n \to a$» και «(a_n) ακολουθία Cauchy».)

2.6 Σημεία συσσώρευσης - ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να μελετήσουμε πιο προσεκτικά τις υπακολουθίες μιας φραγμένης ακολουθίας. Αν η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, τότε η κατάσταση είναι πολύ απλή.

Θεώρημα 2.6.1 *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε οτι $a_n \to a$. Αν (a_{n_k}) είναι τυχούσα υπακολουθία της (a_n), τότε $a_{n_k} \to a$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_k - a| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Έχουμε $n_k \geq k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $n_k \geq k_0$ αν $k \geq k_0$. Έπεται οτι για κάθε $n \geq k_0$ έχουμε

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει οτι $a_{n_k} \to a$. □

Δηλαδή, όλες οι υπακολουθίες μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνουν και μάλιστα στο ίδιο όριο: το όριο της ακολουθίας. Με άλλα λόγια: αν μια ακολουθία έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε αποκλίνει.

Ορισμός Έστω (a_n) μια ακολουθία. Λέμε οτι ο $x \in \mathbb{R}$ είναι **σημείο συσσώρευσης** της (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) με $a_{n_k} \to x$.

Λήμμα 2.6.1 *Ο x είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ τ.ω. $|a_n - x| < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι ο x είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n). Υπάρχει λοιπόν υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) με $a_{n_k} \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Θεωρούμε τον $k_1 = \max\{m, k_0\}$. Τότε $n_{k_1} \geq k_1 \geq m$ και $k_1 \geq k_0$, άρα $|a_{n_{k_1}} - x| < \varepsilon$.

Αντίστροφα: παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και $m = 1$. Υπάρχει $n_1 \geq 1$ τ.ω. $|a_{n_1} - x| < 1$. Στη συνέχεια πάρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = n_1 + 1$. Υπάρχει $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ τ.ω. $|a_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$.

Επαγωγικά βρίσκουμε $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τ.ω.

$$|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$$

(κάνετε μόνοι σας το επαγωγικό βήμα). Είναι φανερό οτι $a_{n_k} \to x$. □

Ας πάρουμε τώρα μια φραγμένη ακολουθία (a_n). Υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης της } (a_n)\}.$$

Το K είναι μη κενό: Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει τουλάχιστον μια υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) που συγκλίνει. Το όριο της (a_{n_k}) είναι εξ ορισμού στοιχείο του K.

Το K είναι φραγμένο: Αν $x \in K$, υπάρχει $a_{n_k} \to x$ και αφού $-M \leq a_{n_k} \leq M$ για κάθε k, έπεται οτι $-M \leq x \leq M$.

Από το αξίωμα της πληρότητας προκύπτει οτι υπάρχουν τα: $\sup K$ και $\inf K$.

Λήμμα 2.6.2 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και*

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης της } (a_n)\}.$$

Τότε, $\sup K \in K$ και $\inf K \in K$.

Απόδειξη: Έστω $a = \sup K$. Θέλουμε να δείξουμε οτι ο a είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n), και σύμφωνα με το Λήμμα 2.6.1 αρκεί να δούμε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ τ.ω. $|a_n - a| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Αφού $a = \sup K$, υπάρχει $x \in K$ τ.ω. $a - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq a$. Ο x είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n), άρα υπάρχει $n \geq m$ τ.ω. $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$|a_n - a| \leq |a_n - x| + |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε οτι $\inf K \in K$. □

Ορισμός Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Αν

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης της } (a_n)\},$$

ορίζουμε

- $\limsup a_n = \sup K$, το **ανώτερο όριο** της (a_n),
- $\liminf a_n = \inf K$ το **κατώτερο όριο** της (a_n).

Με βάση το Λήμμα 2.6.2, το $\limsup a_n$ είναι το μέγιστο στοιχείο και το $\liminf a_n$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του K αντίστοιχα:

Θεώρημα 2.6.2 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός x για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) με $a_{n_k} \to x$. Το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός y για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία $(a_{n'_k})$ της (a_n) με $a_{n'_k} \to y$.* □

Το ανώτερο και το κατώτερο όριο μιας φραγμένης ακολουθίας περιγράφονται μέσω των περιοχών τους ως εξής:

Θεώρημα 2.6.3 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(1) $x \leq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

(2) $x \geq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.

(3) $x \geq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(4) $x \leq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(5) $x = \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.

(6) $x = \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη: (1:⇒) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) με $a_{n_k} \to \limsup a_n$, άρα υπάρχει k_0 τ.ω. για κάθε $k \geq k_0$

$$a_{n_k} > \limsup a_n - \varepsilon \geq x - \varepsilon.$$

Έπεται οτι το $\{n : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(2:⇒) Έστω $\varepsilon > 0$. Αν υπήρχαν $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ με $a_{n_k} > x + \varepsilon$, τότε η (a_{n_k}) θα είχε συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{n_{k_s}})$ (από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass) με $a_{n_{k_s}} \to y \geq x + \varepsilon$. Όμως τότε θα είχαμε

$$\limsup a_n \geq y \geq x + \varepsilon \geq \limsup a_n + \varepsilon$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το $\{n : a_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(1: ⇐) Έστω οτι $x > \limsup a_n$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε αν $y = x - \varepsilon$ να έχουμε $x > y > \limsup a_n$. Από την υπόθεσή μας, το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο. Όμως $y > \limsup a_n$ οπότε από την (2: ⇒) το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (γράψτε $y = \limsup a_n + \varepsilon_1$ για κάποιο $\varepsilon_1 > 0$). Οι δύο ισχυρισμοί έρχονται σε αντίφαση.

(2:⇐) Όμοια, υποθέτουμε οτι $x < \limsup a_n$ και βρίσκουμε y τέτοιον ώστε $x < y < \limsup a_n$. Αφού $y > x$, συμπεραίνουμε οτι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (αυτή είναι η υπόθεσή μας) και αφού $y < \limsup a_n$ συμπεραίνουμε οτι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο (από την (1:⇒).) Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Η (5) είναι άμεση συνέπεια των (1) και (2).

Για τις (3), (4) και (6) εργαζόμαστε όμοια. □

Μια εναλλακτική περιγραφή των $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ δίνεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.6.4 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.*

(α) Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Τότε, $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(β) Θέτουμε $\gamma_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Τότε, $\liminf a_n = \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα οτι οι αριθμοί $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορίζονται καλά:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\gamma_n \leq a_n \leq b_n$ (γιατί;). Επίσης, η (b_n) είναι φθίνουσα, ενώ η (a_n) είναι αύξουσα (γιατί;). Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, έπεται οτι η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, ενώ η (γ_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Άρα, $b_n \to \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} := b$ και $\gamma_n \to \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} := \gamma$ (Θεώρημα 2.2.1).

Θα δείξουμε οτι $\limsup a_n = b$. Από το Λήμμα 2.6.2, υπάρχει (a_{n_k}) υπακολουθία της (a_n) με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Όμως, $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ και $b_{n_k} \to b$ (γιατί;). Άρα, $\limsup a_n = \lim a_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = b$.

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε οτι ο b είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n). Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $n \geq m$ τ.ω. $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αλλά,

$b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, άρα υπάρχει $k \geq n \geq m$ τ.ω. $b_n \geq a_k > b_n - \frac{\varepsilon}{2}$ δηλαδή $|b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έπεται οτι

$$|b - a_k| \leq |b - b_n| + |b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το Λήμμα 2.6.1, ο b είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n), και από το Θεώρημα 2.6.2 παίρνουμε $b \leq \limsup a_n$.

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε οτι $\liminf a_n = \gamma$. □

Τελειώνουμε με έναν χαρακτηρισμό της σύγκλισης για φραγμένες ακολουθίες (ο οποίος συμπληρώνει το Θεώρημα 2.6.1).

Θεώρημα 2.6.5 *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$.*

Απόδειξη: Έστω οτι $a_n \to a$. Από το Θεώρημα 2.6.1, για κάθε υπακολουθία (a_{n_k}) της (a_n) έχουμε $a_{n_k} \to a$. Επομένως, ο a είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης της (a_n). Έχουμε $K = \{a\}$, άρα

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a.$$

Αντίστροφα: έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 2.6.3, ο αριθμός $a = \limsup a_n = \liminf a_n$ έχει την ιδιότητα:

> Τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a - \varepsilon\}$ και $\{n \in \mathbb{N} : a_n > a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένα.

Δηλαδή, το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Ισοδύναμα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται οτι $a_n \to a$. □

2.7 Παράρτημα: από την Αρχιμήδεια ιδιότητα και την ιδιότητα Cauchy έπεται το αξίωμα της πληρότητας

Στο Κεφάλαιο 1 δεχτήκαμε οτι το $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας: κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Χρησιμοποιώντας την ύπαρξη supremum δείξαμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα:

(*) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\varepsilon > a$.

Χρησιμοποιώντας και πάλι το αξίωμα της πληρότητας, δείξαμε οτι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Σαν συνέπεια πήραμε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό με τη σειρά του μας επέτρεψε να δείξουμε την «ιδιότητα Cauchy» των πραγματικών αριθμών:

> (**) Κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε οτι το αξίωμα της πληρότητας είναι λογική συνέπεια των (*) και (**). Αν δηλαδή δεχτούμε το $\mathbb{R}$ σαν ένα διατεταγμένο σώμα που έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα και την ιδιότητα Cauchy, τότε μπορούμε να αποδείξουμε το «αξίωμα της πληρότητας» σαν θεώρημα:

Θεώρημα 2.7.1 *Έστω $\mathbb{R}^*$ ένα διατεταγμένο σώμα με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $a \in \mathbb{R}^*$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\varepsilon > a$.*
2. *Κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathbb{R}^*$ συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathbb{R}^*$.*

Τότε, κάθε μη κενό και άνω φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^*$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Σημείωση: Το σύνολο $\mathbb{N}$, οι ακολουθίες Cauchy, το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου κλπ. ορίζονται ακριβώς όπως και στο $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^*$, η ακολουθία (a_n) είναι ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ αν $n, m \geq n_0(\varepsilon)$, και ούτω καθεξής.

Απόδειξη: Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^*$.

Ξεκινάμε με τυχόν στοιχείο $a_0 \in A$ (υπάρχει αφού $A \neq \emptyset$). Έστω b άνω φράγμα του A. Από την συνθήκη 1, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_0 + k > b$. Δηλαδή, υπάρχει φυσικός k με την ιδιότητα

$$\text{για κάθε } \; a \in A, \;\; a < a_0 + k.$$

Από την αρχή του ελαχίστου (που είναι συνέπεια της 1) έπεται οτι υπάρχει ελάχιστος τέτοιος φυσικός. Ας τον πούμε k_1. Τότε,

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_0 + k_1$.
- Υπάρχει $a_1 \in A$ τέτοιος ώστε $a_0 + (k_1 - 1) \leq a_1$.

Επαγωγικά θα βρούμε $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ στο A και $k_n \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τα εξής:

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}}$.
- $a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n$.

Απόδειξη του επαγωγικού βήματος: Έχουμε $a_n \in A$ και από την συνθήκη 1 υπάρχει ελάχιστος φυσικός k_{n+1} με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$,

$$a < a_n + \frac{k_{n+1}}{2^n}.$$

Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει a_{n+1} με

$$a_n + \frac{k_{n+1} - 1}{2^n} \leq a_{n+1}.$$

Ισχυρισμός 1: Η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Πράγματι, έχουμε

$$a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}},$$

άρα

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Αν λοιπόν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n < m$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Αν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα, αυτό γίνεται όσο θέλουμε μικρό. Πιο συγκεκριμένα, αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $1/2^{n_0-1} < \varepsilon$, οπότε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε $|a_m - a_n| < \varepsilon$. □

Αφού το $\mathbb{R}^*$ έχει την ιδιότητα Cauchy, υπάρχει ο $a^* = \lim a_n$.

Ισχυρισμός 2: Ο a^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

(α) Ο a^* είναι άνω φράγμα του A: ας υποθέσουμε οτι υπάρχει $a \in A$ με $a > a^*$. Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τ.ω $a > a^* + \varepsilon$. Όμως,

$$a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}} \leq a_n + \frac{1}{2^{n-1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned} & a^* + \varepsilon < a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \\ \Longrightarrow\quad & a^* + \varepsilon \leq \lim \left(a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ \Longrightarrow\quad & a^* + \varepsilon \leq a^*, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

(β) Αν a^{**} είναι άνω φράγμα του A, τότε $a^{**} \geq a^*$: έχουμε $a^{**} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;), άρα

$$a^{**} \geq \lim a_n = a^*.$$

Από τα (α) και (β) είναι σαφές οτι $a^* = \sup A$. □

2.8 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε με τον ορισμό οτι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0:

$$a_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}, \quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad c_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$$

και

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , \text{αν } n = 1, 4, 7, 10, 13, \dots \\ \frac{1}{n^2+1} & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

2. Αποδείξτε με τον ορισμό οτι

$$\frac{n^2-n}{n^2+n} \to 1, \quad \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \to -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} k \to -1.$$

3. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες με $a_n \to a$ και $b_n \to b$.
(α) Δείξτε οτι $a_n + b_n \to a + b$.
(β) Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε οτι $a \leq b$.
(γ) Αν $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε οτι $m \leq a \leq M$.
(δ) Δείξτε οτι $|a_n| \to |a|$.
(ε) Δείξτε οτι $\sqrt[k]{|a_n|} \to \sqrt[k]{|a|}$ $(k \geq 2)$.

4. Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Δείξτε οτι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

5. (α) Έστω $a > 0$. Δείξτε οτι $\sqrt[n]{a} \to 1$.
(β) Δείξτε οτι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

6. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.
(β) Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

7. Υποθέτουμε οτι $a_n \to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Δείξτε οτι $b_n \to a$.

8. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a > 0$. Δείξτε οτι

$$b_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \gamma_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \to a.$$

9. Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim_n(a_{n+1}-a_n)=a$. Δείξτε οτι

$$\frac{a_n}{n}\to a.$$

10. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\to a.$$

Δείξτε οτι $a_n\to a$.

11. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a=\sup A$, δείξτε οτι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_n a_n = a$.

12. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε την ακολουθία

$$x_n = an-[bn].$$

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_n x_n$.

13. (α) Έστω $k>1$ και $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $a_{n+1}\geq ka_n$ για κάθε n, δείξτε οτι $a_n\to+\infty$.

(β) Έστω $0<k<1$ και (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα $|a_{n+1}|\leq k|a_n|$ για κάθε n. Δείξτε οτι $a_n\to 0$.

(γ) Έστω $a_n>0$ για κάθε n, και $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to l>1$. Δείξτε οτι $a_n\to+\infty$.

(δ) Έστω $a_n\neq 0$ για κάθε n, και $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to l<1$. Δείξτε οτι $a_n\to 0$.

14. Έστω $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $a_n\to a>0$. Δείξτε οτι

$$\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}>0.$$

15. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1=\sqrt{2}$ και $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε οτι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, και βρείτε το όριό της.

16. Έστω $a>0$. Θέτουμε $x_1=x>0$ και

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

Δείξτε οτι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim_n x_n$.

17. Έστω $x_1=1$ και $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n^2}$. Δείξτε οτι η (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

18. Έστω $0<x_1<1$ και $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$. Δείξτε οτι η (x_n) είναι φθίνουσα. Βρείτε το όριο της x_n και το όριο της x_{n+1}/x_n.

19. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε οτι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

20. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$. Δείξτε οτι το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

21. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Δείξτε οτι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Δείξτε οτι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

22. Έστω (a_n) μια αύξουσα ακολουθία. Δείξτε οτι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι επίσης αύξουσα.

23. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Υποθέτουμε οτι για το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισχύει $\inf A = 0$. Δείξτε οτι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.

24. Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών:

(α) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

(β) $b_n = \frac{n}{a^n}$, όπου $a > 1$.

(γ) $\gamma_n = \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.

(δ) $\delta_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, όπου $a, b > 0$.

25. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

δείξτε οτι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συμπεράνετε οτι $a_n \to +\infty$.

26. Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Δείξτε οτι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy (άρα, συγκλίνει).

27. (α) Έστω $0 < k < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε οτι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

(β) Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

(γ) Έστω $x_1 = x$ και $x_{n+1} = q\sin(x_n) + a$, όπου $0 < q < 1$ και $a \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

28. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Ορίζουμε

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε οτι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

29. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε οτι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a.

30. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+a_n}.$$

Δείξτε οτι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_n a_n$.

31. Δείξτε οτι αν μια μονότονη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.

32. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{n+1}, \quad \gamma_n = \frac{n^2((-1)^n + 1) + 2n + 1}{n+1}.$$

33. Έστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε οτι

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

34. Έστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(β) Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$.

35. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε οτι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n \quad \text{και} \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

36. Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία σημείων συσσώρευσης της (a_n). Υποθέτουμε οτι $x_k \to x$. Δείξτε οτι ο x είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n).

37*. Έστω $x_1 = a$, $x_2 = b$ και

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Δείξτε οτι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n).]

38*. Έστω (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα

$$a_{n+1} - \frac{a_n}{2} \to 0.$$

Δείξτε οτι $a_n \to 0$. [*Υπόδειξη:* αν $y_n = a_{n+1} - \frac{a_n}{2}$, δείξτε οτι

$$a_n = y_{n-1} + \frac{y_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{y_1}{2^{n-2}} + \frac{a_1}{2^{n-1}}.]$$

39*. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_1 > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$a_n > a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε οτι: για κάθε $0 < q < 2$ ισχύει $\frac{a_n}{q^n} \to +\infty$.

40*. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία που ικανοποιεί την

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε οτι $b_n := a_{n+1} - a_n \to 0$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε οτι η (b_n) είναι μονότονη και φραγμένη.]

41*. Ορίζουμε μια ακολουθία ως εξής:

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}.$$

Βρείτε όλα τα σημεία συσσώρευσης της (a_n). [*Υπόδειξη:* Γράψτε τους δέκα πρώτους όρους της ακολουθίας.]

42*. Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Αν $a < b$ είναι δύο σημεία συσσώρευσης της (x_n), δείξτε ότι κάθε $y \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης της (x_n). [*Υπόδειξη:* Απαγωγή σε άτοπο.]

Κεφάλαιο 3

Συνέχεια συναρτήσεων

3.1 Όρια συναρτήσεων

Σε αυτήν την παράγραφο απλώς υπενθυμίζουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης (το θέμα αυτό έχει καλυφθεί στο μάθημα «Απειροστικός Λογισμός Ι».)

Ορισμός Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Λέμε οτι ο x_0 είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in A$ τ.ω. $0 < |x - x_0| < \delta$ (ισοδύναμα: $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $x \neq x_0$).

Δηλαδή, ο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν οσοδήποτε κοντά στον x_0 μπορούμε να βρούμε στοιχεία του A διαφορετικά από τον x_0. Παρατηρήστε οτι δεν απαιτούμε από τον x_0 να είναι στοιχείο του A.

Παραδείγματα:

- Αν $A = [0, 1] \cup \{2\}$, τότε $2 \in A$ αλλά ο 2 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.
- Αν $A = (0, 1)$, τότε $1 \notin A$ αλλά ο 1 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Ορισμός (όριο συνάρτησης) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε οτι το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και ισούται με $L \in \mathbb{R}$ αν:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.: αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Αν ένας τέτοιος αριθμός L υπάρχει, τότε είναι μοναδικός (δείξτε το) και γράφουμε $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ή $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0$.

Άσκηση Δώστε ορισμούς για τα: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ κλπ. (ο $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν σε κάθε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ υπάρχει στοιχείο του A, ανάλογα για το $-\infty$).

Ορισμός (πλευρικά όρια συνάρτησης) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση, και x_0 σημείο συσσώρευσης του A τ.ω. για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν στοιχεία του A στο $(x_0 - \delta, x_0)$. Λέμε οτι:

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ (ο L είναι το πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά) αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ και $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του A τ.ω. για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν στοιχεία του A στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Λέμε οτι:

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ (ο L είναι το πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 από δεξιά) αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ και $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Με βάση τον ορισμό μπορεί κανείς να αποδείξει τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες των ορίων (οι αποδείξεις είναι ανάλογες με τις αποδείξεις που δώσαμε για τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών):

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο πραγματικές συναρτήσεις και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Υποθέτουμε οτι $f(x) \to a \in \mathbb{R}$ και $g(x) \to b \in \mathbb{R}$ καθώς $x \to x_0$. Τότε:*

1. *Αν $f(x) \to a_1$ όταν $x \to x_0$, τότε $a_1 = a$ (μοναδικότητα του ορίου).*
2. *$f(x) + g(x) \to a + b$ όταν $x \to x_0$.*
3. *$f(x)g(x) \to ab$ όταν $x \to x_0$.*
4. *αν $b \neq 0$, τότε $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b}$ όταν $x \to x_0$.*

Η ύπαρξη του ορίου σχετίζεται με την ύπαρξη των πλευρικών ορίων ως εξής:

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση, και x_0 σημείο συσσώρευσης του A τ.ω. για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν στοιχεία του A τόσο στο $(x_0 - \delta, x_0)$ όσο και στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Τότε,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \text{ τα } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ και } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ υπάρχουν και ισούνται με } L.$$

Βεβαιωθείτε οτι όλα τα παραπάνω σας είναι οικεία. Ανατρέξτε στο βιβλίο του Σ. Πηχωρίδη (σελ. $27 - 38$) και στο βιβλίο του M. Spivak (κεφάλαιο 5) για περισσότερες λεπτομέρειες.

3.2 Συνέχεια συναρτήσεων: ορισμοί - βασικές ιδιότητες

1. Η συνέχεια μιας συνάρτησης ορίζεται πρώτα τοπικά: ορίζουμε δηλαδή πότε μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση, και $x_0 \in A$. Λέμε οτι **η f είναι συνεχής στο** x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Παρατηρήσεις: (α) Στον ορισμό της συνέχειας απαιτούμε το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Η τιμή $f(x_0)$ προϋποτίθεται ούτως ή άλλως από τον ίδιο τον ορισμό.

(β) Δεν ζητάμε από το x να ικανοποιεί την $0 < |x - x_0| < \delta$, να είναι δηλαδή το x διαφορετικό από το x_0. Αν $x = x_0$, η ανισότητα $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο όσο μικρό κι αν είναι το ε: $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

(γ) Δεν ζητάμε από το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν $x_0 \in A$ και το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (είναι όπως λέμε **μεμονωμένο** σημείο του A), τότε η f είναι αυτομάτως συνεχής στο x_0. Ο λόγος είναι απλός: αφού το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap A = \{x_0\}$ (γιατί;). Πάρτε τώρα τυχόν $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta_0 > 0$. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta = \delta_0$, τότε $x = x_0$, άρα $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Με βάση τον ορισμό μας, η f είναι συνεχής στο x_0.

(δ) Αν το $x_0 \in A$ και το x_0 είναι και σημείο συσσώρευσης του A, τότε έχει νόημα να εξετάσουμε τόσο την συνέχεια της f στο x_0 όσο και την ύπαρξη ορίου της f καθώς το x τείνει στο x_0. Σε αυτήν την περίπτωση, η παρατήρηση (β) δείχνει οτι «η f είναι συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$».

2. Κατ' αναλογία προς τον ορισμό των πλευρικών ορίων, ορίζουμε συνέχεια από δεξιά και συνέχεια από αριστερά μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ στο $x_0 \in A$:

Ορισμός (πλευρική συνέχεια) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Λέμε οτι:

- Η f είναι συνεχής από δεξιά στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $x \in A$ και $x_0 \leq x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Η f είναι συνεχής από αριστερά στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $x \in A$ και $x_0 - \delta < x \leq x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Παρατήρηση Είναι εύκολο να δείτε οτι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

3. Από τον ορισμό της συνέχειας σε ένα σημείο μπορούμε τώρα να περάσουμε στον ορισμό της **συνεχούς συνάρτησης**:

Ορισμός Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση, και B ένα υποσύνολο του A. Λέμε οτι **η f είναι συνεχής στο** B αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in B$.

Παρατήρηση: Τα πεδία ορισμού συναρτήσεων είναι τις περισσότερες φορές διαστήματα. Συμφωνούμε πως όταν λέμε οτι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ εννοούμε οτι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b)$, συνεχής από δεξιά στο a και συνεχής από αριστερά στο b.

4. Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων:

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Υποθέτουμε οτι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε,*

1. *Οι $f + g, fg$ είναι συνεχείς στο x_0.*
2. *Η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0 αν $g(x_0) \neq 0$.*

Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ και η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 3.2.1 έπεται οτι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και οτι κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

5. Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τι σημαίνει η φράση:

$$\text{η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x_0$$

όπου x_0 είναι σημείο στο πεδίο ορισμού της f. Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

- Τα πλευρικά ορια της f καθώς $x \to x_0$ υπάρχουν και $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, όμως η τιμή της f στο x_0 δεν είναι ο L: δηλαδή, $f(x_0) \neq L$. Τότε λέμε οτι στο x_0 παρουσιάζεται άρσιμη ασυνέχεια (ή «επουσιώδης» ασυνέχεια). Η f συμπεριφέρεται άριστα γύρω από το x_0, αλλά η τιμή της στο x_0 είναι «λανθασμένη».
- Τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$
Τότε λέμε οτι στο x_0 παρουσιάζεται «ασυνέχεια α΄ είδους» (ή άλμα). Η διαφορά $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι το «άλμα» της f στο x_0.
- Κάποιο από τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ δεν υπάρχει. Τότε, λέμε οτι στο x_0 παρουσιάζεται ασυνέχεια β΄ είδους (ή «ουσιώδης ασυνέχεια».)

Βεβαιωθείτε οτι όλα τα παραπάνω σας είναι οικεία. Ανατρέξτε στο βιβλίο του Σ. Πηχωρίδη (σελ. 38−48) και στο βιβλίο του M. Spivak (Κεφάλαιο 6) για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα.

3.3 Χαρακτηρισμός της συνέχειας με χρήση ακολουθιών

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Θα δώσουμε έναν χαρακτηρισμό της συνέχειας της f στο x_0 μέσω ακολουθιών (αποδίδεται στον Γερμανό μαθηματικό Heine).

Θεώρημα 3.3.1 *Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν: για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε οτι $f(x_n) \to f(x_0)$: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της συνέχειας της f στο x_0).

Έχουμε υποθέσει οτι $x_n \to x_0$. Άρα, γι' αυτό το $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ τ.ω.: αν $n \geq n_0(\delta)$ τότε $|x_n - x_0| < \delta$ (αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της σύγκλισης της (x_n) στο x_0).

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε: αν $n \geq n_0(\delta)$, τότε $|x_n - x_0| < \delta$ άρα

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f(x_n) \to f(x_0)$.

[*Σημείωση:* Το n_0 που βρήκαμε εξαρτάται από το δ, όμως το δ στο πρώτο βήμα της απόδειξης εξαρτάται από το ε, άρα το n_0 εξαρτάται από το ε που μας δόθηκε.]

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε οτι για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$. Υποθέτουμε επίσης οτι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού η f δεν είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο ε με την εξής ιδιότητα:

$(*)$ Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

[Με λίγη σκέψη θα πειστείτε οτι αυτή είναι η άρνηση της πρότασης «η f είναι συνεχής στο x_0»: οσοδήποτε κοντά στο x_0 υπάρχει $x \in A$ τ.ω. οι τιμές $f(x)$ και $f(x_0)$ να απέχουν αρκετά.]

Χρησιμοποιούμε την $(*)$ διαδοχικά με $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $1/n > 0$ και από την $(*)$ βρίσκουμε $x_n \in A$ με $|x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Είναι φανερό οτι $x_n \to x_0$ και από την υπόθεση που κάναμε πρέπει η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει στο $f(x_0)$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 3.3.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- για να δείξουμε οτι η f είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να δείξουμε οτι «$x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$».

- για να δείξουμε οτι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ τ.ω. $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$.

Απλό παράδειγμα: Η συνάρτηση του Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής σε κανένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Πράγματι: υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών με $q_n \to x_0$ και ακολουθία (a_n) αρρήτων αριθμών με $a_n \to x_0$ (τόσο οι ρητοί όσο και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$). Όμως, $f(q_n) = 1 \to 1$ και $f(a_n) = 0 \to 0$. Από το Θεώρημα 3.3.1 βλέπουμε οτι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

3.4 Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε δύο θεμελιώδη και διαισθητικά αναμενόμενα θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα: το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα ύπαρξης μέγιστης - ελάχιστης τιμής. Η απόδειξή τους απαιτεί ουσιαστική χρήση του αξιώματος της πληρότητας.

3.4.1 Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Θα εξετάσουμε πρώτα την εξής περίπτωση: Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Τότε, αυτό που περιμένει κανείς από την γραφική παράσταση της f είναι οτι για κάποιο σημείο $c \in (a,b)$ θα ισχύει $f(c) = 0$ (η καμπύλη $y = f(x)$ θα τμήσει τον οριζόντιο άξονα).

Θεώρημα 3.4.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Τότε, υπάρχει $c \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.*

Απόδειξη: Θα προσπαθήσουμε να «βρούμε» την μικρότερη λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a,b). Ψάχνουμε δηλαδή για κάποιο $c \in (a,b)$ για το οποίο $f(c) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε x με $a \leq x < c$.

Η ιδέα είναι οτι αυτό το c πρέπει να είναι το supremum του συνόλου όλων των $y \in (a,b)$ που ικανοποιούν το εξής:

$$\text{για κάθε } \; x \text{ με } a \leq x < y \; \text{ ισχύει } f(x) < 0.$$

Ορίζουμε λοιπόν

$$A = \{y \in (a,b] : \; a \leq x < y \Longrightarrow f(x) < 0\}.$$

Ισχυρισμός 1 Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

Απόδειξη: Είναι σαφές οτι ο b είναι άνω φράγμα για το A. Για να δείξουμε οτι το A είναι μη κενό, σκεφτόμαστε ως εξής: η f είναι συνεχής από δεξιά στο a και $f(a) < 0$. Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $a \leq y < a + \delta$ να ισχύει

$$|f(y) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2} \Longrightarrow f(y) \leq f(a) + \frac{|f(a)|}{2} = \frac{f(a)}{2} < 0.$$

Δηλαδή, η f παίρνει αρνητικές τιμές στο $[a, a + \delta)$. Αν λοιπόν $a < y < a + \delta$, τότε

$$\text{για κάθε } \ x \text{ με } a \leq x < y \ \text{ ισχύει } f(x) < 0,$$

το οποίο σημαίνει οτι $y \in A$. Άρα, $(a, a + \delta) \subseteq A$ (το A είναι μη κενό). □

Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει ο $c = \sup A$. Επίσης, $a < c$ διότι $(a, a+\delta) \subseteq A$.

Ισχυρισμός 2 Για τον $c = \sup A$ ισχύουν οι $a < c < b$ και $f(c) = 0$.

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα οτι $c < b$: Έχουμε $f(b) > 0$ και η f είναι συνεχής από αριστερά στο b. Για $\varepsilon = \frac{f(b)}{2} > 0$ βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$b - \delta_1 < x \leq b \Longrightarrow |f(x) - f(b)| < \frac{f(b)}{2} \Longrightarrow f(x) > \frac{f(b)}{2} > 0.$$

Τότε, κάθε $x \in (b - \delta_1, b]$ είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, αν $y \in A$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, y)$ και αφού $f(x) > 0$ στο $(b - \delta_1, b]$ έχουμε $y \leq b - \delta_1$. Επομένως, για κάθε $x \in (b - \delta_1, b]$ ισχύει

$$c = \sup A \leq b - \delta_1 < x.$$

Ειδικότερα, $c < b$. Από την $(a, a + \delta) \subseteq A$ έχουμε $c \geq a + \delta > a$, άρα $a < c < b$.

Μένει να δείξουμε οτι $f(c) = 0$. Θα αποκλείσουμε τα ενδεχόμενα $f(c) < 0$ και $f(c) > 0$.

- Έστω οτι $f(c) < 0$. Από την συνέχεια της f στο c, υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ω. $f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0$ στο $(c - \delta_2, c + \delta_2)$ (γιατί;). Όμως τότε, $f(x) < 0$ στο $[a, c + \delta_2)$ (γιατί υπάρχει $y \in A$ με $y > c - \delta_2$, οπότε $f(x) < 0$ στο $[a, y) \cup (c - \delta_2, c + \delta_2) = [a, c + \delta_2)$). Επομένως, $c + \delta_2 \in A$. Αυτό είναι άτοπο αφού $c = \sup A$.

- Έστω οτι $f(c) > 0$. Τότε, υπάρχει $\delta_3 > 0$ τ.ω. $f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$ στο $(c - \delta_3, c + \delta_3)$. Αν πάρουμε $y \in A$ με $y > c - \delta_3$ και z με $y > z > c - \delta_3$, τότε

  $$y \in A \Longrightarrow f(z) < 0$$

  ενώ

  $$z \in (c - \delta_3, c + \delta_3) \Longrightarrow f(z) > 0$$

  δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Με την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού ολοκληρώνεται και η απόδειξη του Θεωρήματος. □

Σαν πόρισμα παίρνουμε το **θεώρημα ενδιάμεσης τιμής**:

Θεώρημα 3.4.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) < f(b)$ και $\rho \in (f(a), f(b))$, τότε υπάρχει $c \in (a,b)$ με $f(c) = \rho$. Όμοια, αν $f(b) < f(a)$ και $\rho \in (f(b), f(a))$, τότε υπάρχει $c \in (a,b)$ με $f(c) = \rho$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - \rho$. Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $g(a) = f(a) - \rho < 0$, $g(b) = f(b) - \rho > 0$. Από το Θεώρημα 3.4.1 υπάρχει $c \in (a,b)$ με $g(c) = 0$, δηλαδή $f(c) = \rho$.

Για την άλλη περίπτωση, χρησιμοποιήστε την συνεχή συνάρτηση $h(x) = \rho - f(x)$. $\square$

3.4.2 Το θεώρημα ελάχιστης και μέγιστης τιμής

Το δεύτερο βασικό θεώρημα μας λέει οτι αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε η f είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, και μάλιστα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών.

Θεώρημα 3.4.3 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω.*

$$\text{για κάθε } x \in [a,b], \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Δηλαδή, η f είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε οτι η f δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε, για κάθε $M > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in [a,b]$ με $f(x) > M$.

Επιλέγουμε διαδοχικά $M = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ και βρίσκουμε $x_n \in [a,b]$ με

$$f(x_n) > n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία (x_n). Αφού $a \leq x_n \leq b$, η (x_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με $x_{n_k} \to x_0$. Αφού $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, έπεται οτι $x_0 \in [a,b]$.

Η f είναι συνεχής στο x_0 και $x_{n_k} \to x_0$. Από το Θεώρημα 3.3.1,

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$

Άρα, η $(f(x_{n_k}))$ είναι φραγμένη ακολουθία. Όμως, $f(x_{n_k}) > n_k \geq k$ από τον τρόπο επιλογής των x_{n_k}, δηλαδή $f(x_{n_k}) \to +\infty$. Αυτό είναι άτοπο.

Όμοια δείχνουμε την ύπαρξη κάτω φράγματος (ή πιο απλά, θεωρήστε την $-f$: αυτή είναι συνεχής, άρα άνω φραγμένη στο $[a,b]$ κλπ). $\square$

Κάνοντας ένα ακόμα βήμα, δείχνουμε οτι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$:

Θεώρημα 3.4.4 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $y_1, y_2 \in [a,b]$ τέτοια ώστε $f(y_1) \leq f(x) \leq f(y_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.4.3 ξέρουμε οτι το σύνολο

$$A = \{f(x) : x \in [a,b]\}$$

είναι άνω φραγμένο. Έστω $\rho = \sup A$. Θέλουμε να δείξουμε οτι υπάρχει $y_2 \in [a,b]$ με $f(y_2) = \rho$.

Από τον ορισμό του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του A στο $(\rho - 1/n, \rho]$. Δηλαδή, υπάρχει $x_n \in [a,b]$ για το οποίο

$$(*) \qquad \rho - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \rho.$$

Η ακολουθία (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{n_k}). Γράφουμε y_2 για το $\lim x_{n_k}$. Αφού $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, έπεται οτι $y_2 \in [a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο y_2, συμπεραίνουμε οτι $f(x_{n_k}) \to f(y_2)$. Όμως, $f(x_n) \to \rho$ από την $(*)$. Άρα,

$$f(y_2) = \rho = \sup A.$$

Αυτό σημαίνει οτι $f(x) \leq f(y_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$ (από τον ορισμό του A).

Για την ελάχιστη τιμή εργαζόμαστε ανάλογα. $\square$

3.4.3 Παραδείγματα και εφαρμογές

Παραδείγματα: Η συνέχεια της f αλλά και η υπόθεση οτι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα είναι απαραίτητες στα προηγούμενα θεωρήματα.

(α) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1-x & , 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο $[-1,1]$. Έχουμε $1 = \sup\{f(x) : x \in [-1,1]\}$, αλλά ο 1 δεν είναι τιμή της f: παρατηρήστε οτι $0 \leq f(x) < 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Η f είναι ασυνεχής στο 0.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Τότε, $f(0) < 0$ και $f(2) > 0$, αλλά δεν υπάρχει λύση της $f(x) = 0$ στο $[0,2]$. Η f είναι ασυνεχής στο 1.

(γ) Θεωρούμε την $f(x) = 1/x$ στο $(0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη. Το πεδίο ορισμού της f *δεν είναι κλειστό διάστημα*.

Θεώρημα 3.4.5 *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.*

Απόδειξη: Έστω $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, όπου $a_m \neq 0$ και m περιττός. Γράφουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m x} + \ldots + \frac{a_1}{a_m x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m x^m}\right) \\ &= a_m x^m g(x). \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δείτε οτι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1.$$

Άρα, υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ τέτοιοι ώστε: αν $x < -M_1$ ή $x > M_2$, τότε $g(x) > 0$.

Επιλέγουμε τυχόν $a < -M_1$ και τυχόν $b > M_2$. Τότε, $g(a) > 0$ και $g(b) > 0$. Επομένως,

$$P(a)P(b) = a_m^2 g(a)g(b)a^m b^m < 0$$

διότι $a_m^2 > 0$, $a^m < 0$ και $b^m > 0$ (σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται η υπόθεση οτι ο m είναι περιττός). Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x \in (a,b)$ τ.ω. $P(x) = 0$. □

Θεώρημα 3.4.6 *Έστω $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο άρτιου βαθμού με $a_m > 0$. Υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω.*

$$P(x_0) \leq P(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή, η P παίρνει ελάχιστη τιμή).

Απόδειξη: Έχουμε υποθέσει οτι ο m είναι άρτιος και οτι $a_m > 0$. Έπεται οτι

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$$

(γιατί;). Θεωρούμε την τιμή $P(0) = a_0$. Υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ τ.ω. αν $x < -M_1$ ή $x > M_2$ τότε $P(x) > P(0)$.

Θεωρούμε τον περιορισμό της P στο $[-M_1, M_2]$. Η P είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M_1, M_2]$, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.4.4: Υπάρχει $x_0 \in [-M_1, M_2]$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad P(x_0) \leq P(x) \quad \text{για κάθε } x \in [-M_1, M_2].$$

Αφού $0 \in [-M_1, M_2]$, παίρνουμε $P(x_0) \leq P(0)$. Άρα,

$$(**) \qquad P(x_0) \leq P(0) < P(x) \quad \text{για κάθε } x \notin [-M_1, M_2].$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ συμπεραίνουμε οτι $P(x_0) \leq P(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Θεώρημα 3.4.7 (Θεώρημα σταθερού σημείου, Banach) *Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τ.ω. $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε οτι η συνεχής συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ μηδενίζεται κάπου στο $[0,1]$ (δηλαδή, οτι το γράφημά της τέμνει την διαγώνιο $y = x$).

Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$ έχουμε το ζητούμενο για $x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$ αντίστοιχα.

Υποθέτουμε λοιπόν οτι $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$. Τότε, $h(0) = f(0) > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 < 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τ.ω. $h(x_0) = 0$. Δηλαδή, $f(x_0) = x_0$. □

3.5 Συνέχεια σύνθετης και αντίστροφης συνάρτησης

Θα ασχοληθούμε με μια απλή περίπτωση σύνθεσης συναρτήσεων: f είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό διάστημα (a,b) και g μια δεύτερη συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό διάστημα (γ,δ). Υποθέτουμε ακόμα οτι

$$\{f(x) : x \in (a,b)\} \subseteq (\gamma,\delta)$$

(δηλαδή, το πεδίο ορισμού της g περιέχει την *εικόνα* της f). Τότε, η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται στο (a,b) μέσω της

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad a < x < b.$$

Θεώρημα 3.5.1 *Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις όπως παραπάνω και αν*
(α) η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$,
(β) η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in (\gamma,\delta)$,
τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: Απλή, με διπλή εφαρμογή του ορισμού. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$(*)$ Αν $y \in (\gamma,\delta)$ και $|y - f(x_0)| < \delta_1$, τότε $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Η f είναι συνεχής στο x_0. Άρα, γι' αυτό το $\delta_1 > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta_2 > 0$ τ.ω.

$(**)$ Αν $x \in (a,b)$ και $|x - x_0| < \delta_2$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$.

Έστω $x \in (a,b)$ με $|x - x_0| < \delta_2$. Τότε, $y = f(x) \in (\gamma,\delta)$ και $|y - f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$, από την $(**)$. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την $(*)$ με $y = f(x)$. Έπεται οτι

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

δηλαδή,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. □

Περνάμε τώρα στον ορισμό και τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης.

Ορισμός Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, όπου I είναι ένα διάστημα (οποιασδήποτε μορφής: $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ κλπ). Λέμε οτι η f είναι ένα προς ένα (1-1) αν για κάθε $x, y \in I$ με $x \neq y$ έχουμε

$$f(x) \neq f(y).$$

Παρατήρηση: Μια 1-1 συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά μονότονη. Πάρτε για παράδειγμα την $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & , 0 < x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ x - 1 & , 1 < x < 2. \end{cases}$$

Η f είναι 1-1, όμως είναι φθίνουσα στο $(0, 1)$ και αύξουσα στο $(1, 2)$. Αν πάντως μια 1-1 συνάρτηση είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα, τότε είναι γνησίως μονότονη (γιατί;).

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει αν μια *συνεχής* συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα, τότε είναι γνησίως μονότονη.

Θεώρημα 3.5.2 *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε, η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο I.*

Απόδειξη: Επιλέγουμε τυχαία δύο σημεία $x_0 < y_0$ στο I. Έχουμε $f(x_0) \neq f(y_0)$, άρα $f(x_0) < f(y_0)$ ή $f(x_0) > f(y_0)$. Υποθέτουμε οτι $f(x_0) < f(y_0)$ και θα δείξουμε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα (όμοια δείχνουμε οτι αν $f(x_0) > f(y_0)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Έστω $x_1, y_1 \in I$ με $x_1 < y_1$. Θέλουμε να δείξουμε οτι $f(x_1) < f(y_1)$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $h, g : [0, 1] \to I$ με

$$h(t) = (1 - t)x_0 + tx_1 \quad , \quad g(t) = (1 - t)y_0 + ty_1.$$

Παρατηρήστε οτι $h(t), g(t) \in I$ για κάθε $t \in [0, 1]$ (καθώς το t διατρέχει το $[0, 1]$, το $h(t)$ κινείται από το x_0 προς το x_1 και το $g(t)$ κινείται από το y_0 προς το y_1 - αφού το I είναι διάστημα, τα $h(t)$, $g(t)$ μένουν μέσα σ' αυτό).

Παρατηρήστε επίσης οτι, λόγω των $x_0 < y_0$ και $x_1 < y_1$ έχουμε

$$h(t) = (1 - t)x_0 + tx_1 < (1 - t)y_0 + ty_1 = g(t)$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Ορίζουμε $H(t) = f(h(t)) - f(g(t))$. Η H είναι συνεχής συνάρτηση από το Θεώρημα 3.5.1. Αφού $h(t) \neq g(t)$ και η f είναι 1-1, παίρνουμε

$$H(t) \neq 0$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Όμως, $H(0) = f(h(0)) - f(g(0)) = f(x_0) - f(y_0) < 0$ από την υπόθεσή μας. Έπεται οτι $H(t) < 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$: αν η H έπαιρνε κάπου θετική τιμή, τότε θα έπαιρνε και την τιμή 0 από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (άτοπο). Έχουμε λοιπόν

$$f(h(t)) < f(g(t)) \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0,1].$$

Ειδικότερα, $f(h(1)) < f(g(1))$, δηλαδή $f(x_1) < f(y_1)$. $\square$

Δεν είναι δύσκολο να περιγράψει κανείς την εικόνα $f(I)$ μιας συνεχούς και 1-1 συνάρτησης $f : I \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα οτι το I είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και οτι η f είναι γνησίως αύξουσα (από το Θεώρημα 3.5.2 η f είναι γνησίως μονότονη). Τότε, η εικόνα της f είναι το κλειστό διάστημα $[f(a), f(b)]$. Πράγματι, αν $a < x < b$ τότε $f(a) < f(x) < f(b)$, δηλαδή $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Αντίστροφα, αν $f(a) < c < f(b)$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) = c$.

Αν το I είναι διάστημα ανοικτό σε κάποιο ή και στα δύο από τα άκρα του (ή διάστημα με άκρο κάποιο από τα $\pm\infty$), τότε χρειάζεται περισσότερη προσοχή. Πάλι όμως, η εικόνα $f(I)$ της f είναι κάποιο διάστημα I'. Ορίζουμε τότε την **αντίστροφη** συνάρτηση $f^{-1} : I' \to I$ της f ως εξής: αν $y \in I'$, υπάρχει μοναδικό $x \in I$ τ.ω. $f(x) = y$ (η μοναδικότητα οφείλεται στο οτι η f είναι 1-1). Θέτουμε $f^{-1}(y) = x$. Δηλαδή,

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Παρατήρηση: Η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in I'$ με $y_1 < y_2$. Αν ήταν $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, τότε θα είχαμε

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)), \quad \text{δηλαδή} \quad y_1 \geq y_2.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, το οποίο σημαίνει οτι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε οτι η αντίστροφη συνεχούς και 1-1 συνάρτησης είναι επίσης συνεχής.

Θεώρημα 3.5.3 *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Τότε, η f^{-1} είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_0 \in I'$. Υποθέτουμε οτι το y_0 δεν είναι άκρο του I' (οι άλλες περιπτώσεις ελέγχονται όμοια). Τότε, $y_0 = f(x_0)$ για κάποιο εσωτερικό σημείο του I.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$ (ούτως ή άλλως, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μας ενδιαφέρουν τα μικρά $\varepsilon > 0$). Θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ τ.ω.

$$|y - y_0| < \delta \ \text{ και } \ y \in I' \Longrightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

Για την επιλογή του δ δουλεύουμε ως εξής: αφού $f(x_0 - \varepsilon) < y = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τ.ω. $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$ και $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$. Επιλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Αν $|y-y_0|<\delta$, τότε $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x\in I$ τ.ω. $f(x)=y$. Το x είναι μοναδικό γιατί η f είναι 1-1, και

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

(γιατί;). Άρα, $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$. Δηλαδή, η f^{-1} είναι συνεχής στο y_0. □

3.6 Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε οτι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\frac{a}{2},\quad a\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Βεβαιωθείτε οτι το x_0 (0 ή $+\infty$ αντίστοιχα) είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

2. Δείξτε οτι αν $a,b>0$ τότε

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0.$$

Τι γίνεται όταν $x\to0^-$;

3. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}1 & ,\ x\in\mathbb{Q}\\ x & ,\ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Μελετήστε το $\lim_{x\to x_0}h(x)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

4. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\notin\mathbb{Q}\ \text{ή}\ x=0\\ \frac{1}{q} & ,\ x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q)=1.\end{cases}$$

5. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)\neq0$, δείξτε οτι

1. αν $f(x_0)>0$, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. αν $|x-x_0|<\delta$ και $x\in A$ τότε $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$.
2. αν $f(x_0)<0$, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. αν $|x-x_0|<\delta$ και $x\in A$ τότε $f(x)<\frac{f(x_0)}{2}<0$.

6. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε μια συνάρτηση g ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & , x = a \\ \\ \max\{f(t) : a \leq t \leq x\} & , a < x \leq b. \end{cases}$$

Δείξτε οτι η g είναι συνεχής στο $[a,b]$.

8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε οτι η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κανένα σημείο του (a,b). Δείξτε οτι η f είναι μονότονη στο (a,b).

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο σε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του $[a,b]$, τότε υπάρχει x_3 ανάμεσα στα x_1, x_2 στο οποίο η f έχει τοπικό ελάχιστο.

10. Έστω $a < b$. Δείξτε οτι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^6+1}{x-b} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο (a,b).

11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε οτι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$|f(y)| \leq \frac{|f(x)|}{2}.$$

Δείξτε οτι υπάρχει $z \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(z) = 0$.

12. Έστω $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε οτι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

13. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε οτι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

14. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε επίσης οτι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε οτι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a,b]$.

15. Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε οτι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ με $|x-y| = 1$ και $f(x) = f(y)$.

16. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Δείξτε οτι υπάρχει $y \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

17. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε οτι η f είναι σταθερή.

18. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε οτι η f είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν

$$f(a)=\inf\{f(x):a<x\leq b\}.$$

19. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε οτι υπάρχει $\rho>0$ τ.ω. $f(x)>g(x)+\rho$ για κάθε $x\in[a,b]$.

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τ.ω. $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Δείξτε οτι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(y)\geq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

21. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε οτι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0)=x_0.$$

22. Υποθέτουμε οτι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. Έστω $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε οτι υπάρχει $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ τ.ω. $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

23. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1,x_2\in[a,b]$. Δείξτε οτι για κάθε $t\in[0,1]$ υπάρχει $y_t\in[a,b]$ τ.ω.

$$f(y_t)=tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

24. Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την $x^2+f^2(x)=1$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Δείξτε οτι είτε $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in[-1,1]$ ή $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

25. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(a,b)$. Δείξτε οτι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε *μονότονη* ακολουθία (x_n) σημείων του $[a,b]$ με $x_n\to x_0$ ισχύει $f(x_n)\to f(x_0)$.

26. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$ και $\lim_{x\to+\infty}g(x)=a$. Δείξτε οτι $\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=a$.

27. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T>0$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$. Δείξτε οτι η f είναι σταθερή.

28. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε οτι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_\varepsilon:A\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in A$. Δείξτε οτι η f είναι συνεχής.

29. Έστω $f,g:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε οτι η f είναι αύξουσα και $g\circ f=f\circ g$. Δείξτε οτι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y)=y$ και $g(y)=y$. [*Υπόδειξη:* Ξέρουμε οτι υπάρχει $x_1\in[0,1]$ με $g(x_1)=x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1)=x_1$, έχουμε τελειώσει.

Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, δείξτε οτι είναι μονότονη και οτι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).]

30. (Το Λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Λέμε οτι η f έχει *σημείο σκιάς* στο x αν μπορούμε να βρούμε $y > x$ με $f(y) > f(x)$ (σχεδιάστε μια συνάρτηση με πολλούς «λόφους» και «κοιλάδες» και βρείτε τα σημεία σκιάς της για να εξοικειωθείτε με τον ορισμό).

Υποθέτουμε οτι υπάρχει ένα διάστημα (a, b) τ.ω. κάθε $x \in (a, b)$ να είναι σημείο σκιάς της f αλλά τα άκρα a και b να μην είναι σημεία σκιάς της f.

(α) Δείξτε οτι αν $x \in (a, b)$ τότε $f(x) \leq f(b)$. [*Υπόδειξη:* Έστω $A_x = \{y \in [x, b] : f(x) \leq f(y)\}$. Δείξτε οτι $\sup A_x = b$.]

(β) Δείξτε οτι $f(a) \leq f(b)$. [*Υπόδειξη:* Η f είναι συνεχής στο a.]

(γ) Δείξτε οτι $f(a) = f(b)$. [*Υπόδειξη:* Το a δεν είναι σημείο σκιάς της f.]

Κεφάλαιο 4

Ομοιόμορφη συνέχεια

4.1 Αρχικά παραδείγματα - ορισμός

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε οτι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, κάτι που εύκολα επιβεβαιώνουμε αυστηρά χρησιμοποιώντας τον «εψιλοντικό» ορισμό:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \text{ δηλαδή } \ |x - x_0| < \varepsilon.$$

Η επιλογή του δ είναι προφανής: αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε οτι το δ που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από το ε που δόθηκε και όχι από το συγκεκριμένο σημείο x_0. Η συνάρτηση f μεταβάλλεται με τον «ίδιο ρυθμό» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται με την συνάρτηση $g(x) = x^2$. Είναι πάλι γνωστό οτι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού $g = f \cdot f$). Αν θελήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εψιλοντικό ορισμό, θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, και ζητάμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Αν $0 < \delta \leq 1$, έχουμε

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|.$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right\}$, τότε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + 1)\delta \leq \varepsilon.$$

Άρα, η g είναι συνεχής στο x_0. Παρατηρήστε όμως οτι το δ που επιλέξαμε δεν εξαρτάται μόνο από το ε που μας δόθηκε, αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο ελέγχουμε την συνέχεια της g. Όσο πιο μακριά βρίσκεται το x_0 από το 0, τόσο πιο μικρό πρέπει να επιλέξουμε το δ. Δεν υπάρχει κάποια **ομοιόμορφη επιλογή** του δ που να δουλεύει για δοθέν ε και **κάθε** $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αυτό φαίνεται από τον εξής απλό υπολογισμό: αν $x_0 > 0$, τότε

$$|(x_0+\delta)^2 - x_0^2| = |\delta^2 + 2\delta x_0| \geq 2\delta x_0.$$

Όσο μικρό κι αν γίνει το δ, η ποσότητα $2\delta x_0$ δεν μπορεί να παραμένει μικρότερη από ε **για κάθε** $x_0 > 0$.

Άσκηση Θεωρήστε την $g(x) = x^2$ περιορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Δίνεται $\varepsilon > 0$. Δείξτε οτι ο $\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2M+1}\right\}$ εξασφαλίζει την

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

για κάθε $x_0 \in [-M, M]$.

Τα παραδείγματα που δώσαμε δείχνουν μια «παράλειψή» μας στον ορισμό της συνέχειας. Ένας πιο προσεκτικός ορισμός θα ήταν ο εξής:

> Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τέτοιος ώστε: αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο συμβολισμός $\delta(x_0, \varepsilon)$ θα έδειχνε οτι το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο x_0. Συναρτήσεις όπως η $f(x) = x$ που μας επιτρέπουν να επιλέγουμε το δ ανεξάρτητα από το x_0 δικαιούνται ξεχωριστή μελέτη:

Ορισμός Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε οτι η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω.

$$\text{αν } x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Παραδείγματα (α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[-M, M]$, $M > 0$, όχι όμως στο $\mathbb{R}$ (γιατί;).

Παρατήρηση Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής. Πράγματι: έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε αυτό το δ. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (πάρτε $y = x_0$). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0.

4.2 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θυμηθείτε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών: αν $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας έχει ως εξής:

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει*
$$f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω (x_n), (y_n) δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε οτι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$(*) \qquad x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|x_n - y_n| < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $|x_n - y_n| < \delta$ και $x_n, y_n \in A$, οπότε η $(*)$ δίνει

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε οτι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα: ας υποθέσουμε οτι

$$x_n, y_n \in A \text{ και } x_n - y_n \to 0 \Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Θα δείξουμε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω οτι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ με $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, y_n \in A$ τ.ω. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n), (y_n). Από την κατασκευή έχουμε $x_n - y_n \to 0$, αλλά δεν μπορεί να ισχύει η $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Παραδείγματα (α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η f είναι συνεχής αλλά *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για να το δούμε, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $(0, 1]$ που να ικανοποιούν την $x_n - y_n \to 0$ αλλά να μην ικανοποιούν την $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \to 0$.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{2n}$. Τότε, $x_n, y_n \in (0, 1]$ και

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$$

αλλά

$$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n \to -\infty.$$

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$. Τότε,

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

αλλά

$$g(x_n) - g(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

Άρα, η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση Το Θεώρημα 4.2.1 δείχνει κι αυτό οτι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής: έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω $x_0 \in A$. Έστω (x_n) ακολουθία στο A με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε την σταθερή ακολουθία $y_n = x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$x_n - y_n = x_n - x_0 \to 0,$$

οπότε το Θεώρημα 4.2.1 μας δίνει

$$f(x_n) - f(x_0) = f(x_n) - f(y_n) \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to f(x_0)$. Από το Θεώρημα 3.3.1 η f είναι συνεχής στο x_0.

4.3 Ομοιόμορφη συνέχεια συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε οτι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I = \mathbb{R}$ αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $I = [-M, M]$, $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι το M). Αυτό που ισχύει γενικά είναι οτι κάθε συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής είναι και ομοιόμορφα συνεχής:

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε οτι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a, b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Οι (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες ακολουθίες (γιατί;). Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχουν υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και $x \in [a, b]$ με

$$x_{n_k} \to x.$$

Τότε,

$$y_{n_k} = x_{n_k} - (x_{n_k} - y_{n_k}) \to x - 0 = x.$$

Από την συνέχεια της f στο x έπεται οτι

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{n_k}) \to f(x).$$

Δηλαδή,

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0.$$

Αυτό είναι άτοπο αφού είχαμε $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. □

Παρατήρηση Το γεγονός οτι η f ήταν ορισμένη στο **κλειστό διάστημα** $[a, b]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορέσαμε να βρούμε συγκλίνουσες υπακολουθίες των (x_n), (y_n) (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Δεύτερον, μπορούσαμε να πούμε οτι το κοινό όριο x αυτών των υπακολουθιών εξακολουθεί να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού $[a, b]$ της f. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή το εξής:

$$\text{αν } a \leq z_n \leq b \text{ και } z_n \to z, \text{ τότε } a \leq z \leq b.$$

Άσκηση Αποδείξτε το Θεώρημα 4.3.1 χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό. Τα βήματα είναι τα εξής (υποθέτουμε οτι $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και οτι μας έχουν δώσει κάποιο $\varepsilon > 0$).

(α) Ορίζουμε

$$A = \{z \in [a, b] : \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. αν } x, y \in [a, z] \text{ και } |x - y| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}.$$

Δείξτε οτι το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

(β) Έστω $\rho = \sup A$. Δείξτε οτι $\rho = b$. [*Υπόδειξη:* Αν $\rho < b$, βρείτε $h > 0$ τ.ω. $\rho + h \in A$.]

(γ) Δείξτε οτι το $b = \sup A$ ανήκει στο A.

Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Η απόδειξη που δώσαμε είναι πολύ πιο απλή, ο λόγος όμως είναι οτι χρησιμοποιήσαμε πολύ σημαντικά αποτελέσματα όπως το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

4.4 Παραδείγματα και εφαρμογές

Όλα τα παραδείγματα συνεχών αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων που συναντήσαμε ως τώρα ήταν παραδείγματα μη φραγμένων συναρτήσεων.

Ορίζουμε $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δείτε, θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{και} \quad y_n = \sqrt{n\pi}.$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0,$$

αλλά
$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 4.2.1 έπεται το συμπέρασμα. Υπάρχουν λοιπόν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $\cos(x^2)$ για να δείτε το λόγο: για μεγάλα x, η f ανεβαίνει από την τιμή -1 στην τιμή 1 και κατεβαίνει από την τιμή 1 στην τιμή -1 όλο και πιο γρήγορα - σε κάποια διαστήματα, ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται πολύ μεγάλος).

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και (x_n) ακολουθία Cauchy στο A. Τότε, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\delta)$ τ.ω.
$$m, n \geq n_0(\delta) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \delta.$$
Όμως τότε,
$$m, n \geq n_0(\delta) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \delta \Longrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy. □

Το προηγούμενο θεώρημα δείχνει οτι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στέλνει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Αυτό δεν είναι γενικά σωστό για συνεχείς συναρτήσεις: θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0, 1]$, όμως η $f(x_n) = n$ δεν είναι ακολουθία Cauchy.

Είδαμε οτι κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα:

Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b);

Θεώρημα 4.4.2 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι υπάρχουν τα $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$. Ορίζουμε μια «επέκταση» g της f στο $[a, b]$, θέτοντας
$$g(x) = \begin{cases} \lim_{y \to a^+} f(y) & , x = a \\ f(x) & , a < x < b \\ \lim_{y \to b^-} f(y) & , x = b. \end{cases}$$
Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ (γιατί;), άρα ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε οτι η f είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $x, y \in (a,b)$ με $|x-y|<\delta$. Τότε, από τον ορισμό της g έχουμε

$$|f(x)-f(y)| = |g(x)-g(y)| < \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) και δείχνουμε οτι υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (η ύπαρξη του άλλου πλευρικού ορίου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Θα δείξουμε οτι αν (x_n) είναι ακολουθία στο (a,b) με $x_n \to a$, τότε η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 4.4.2: η (x_n) συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό L.

Επίσης, το όριο της $(f(x_n))$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (x_n): έστω (y_n) μια άλλη ακολουθία στο (a,b) με $y_n \to a$. Τότε, $x_n - y_n \to 0$. Από το Θεώρημα 4.2.1,

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Ξέρουμε ήδη οτι $\lim f(x_n) = L$, άρα

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \to L + 0 = L.$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε οτι $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ (άσκηση: μιμηθείτε την απόδειξη του χαρακτηρισμού της συνέχειας μέσω ακολουθιών). □

Ορισμός Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε οτι

- η f είναι **Lipschitz συνεχής** αν υπάρχει $M > 0$ τ.ω. για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

- η f είναι **συστολή** αν υπάρχει $0 < M < 1$ τ.ω. για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Προφανώς, κάθε συστολή είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα 4.4.3 *Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $M > 0$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in A$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \leq M\delta = \varepsilon.$$

Έπεται οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Θεώρημα 4.4.4 (Θεώρημα σταθερού σημείου, Banach) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συστολή. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(y) = y$.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση υπάρχει $0 < M < 1$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επιλέγουμε τυχόντα $x_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) μέσω της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε,

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}|$$

για κάθε $n \geq 2$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε οτι

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M^{n-1}|x_2 - x_1|$$

για κάθε $n \geq 2$. Έπεται οτι αν $n > m$ στο $\mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq (M^{n-2} + \ldots + M^{m-1})|x_2 - x_1| \\
&= \frac{1 - M^{n-m}}{1 - M} M^{m-1}|x_2 - x_1| \\
&\leq \frac{M^{m-1}}{1 - M}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Αφού $0 < M < 1$, έχουμε $M^m \to 0$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε εύκολα να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ τ.ω. αν $n > m \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Επομένως, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και αυτό σημαίνει οτι συγκλίνει: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $x_n \to y$. Θα δείξουμε οτι $f(y) = y$: από την $x_n \to y$ και την συνέχεια της f βλέπουμε οτι $f(x_n) \to f(y)$. Όμως $x_{n+1} = f(x_n)$ και $x_{n+1} \to y$, άρα $f(x_n) \to y$. Από την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει η $f(y) = y$.

Το y είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f. Έστω $z \neq y$ με $f(z) = z$. Τότε,

$$0 < |z - y| = |f(z) - f(y)| \leq M|z - y|,$$

δηλαδή $1 \leq M$, το οποίο είναι άτοπο. □

Παραδείγματα (α) Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν είναι κατ' ανάγκην Lipschitz συνεχής. Θεωρήστε την $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0, 1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως,

$$|f(1/n^2) - f(0)| = \frac{1}{n} = n\left|\frac{1}{n} - 0\right|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υπήρχε $M > 0$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$, θα έπρεπε να ισχύει $M \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συστολή στο $[1, +\infty)$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x, y \geq 1$ τότε

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4.5 Ασκήσεις

1. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και $g : J \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις τ.ω. $\{f(x) : x \in I\} \subseteq J$. Δείξτε οτι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε οτι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ τ.ω. $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε οτι υπάρχουν $A, B > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε οτι

(α) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

8. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.
2. $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
6. $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.
8. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

9. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε οτι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

10. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε οτι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a, b)$.

11. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι υπάρχει $a > 0$ τ.ω. η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β) Δείξτε οτι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

12. Αποδείξτε οτι η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0, 1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1, 2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Κεφάλαιο 5

Το ολοκλήρωμα Riemann

5.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann για **φραγμένες** συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα. Για μη αρνητικές συναρτήσεις το ολοκλήρωμα δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Ορισμός Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα.

(α) **Διαμέριση** του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a$, $x_n = b$. Θα υποθέτουμε πάντα οτι τα $x_k \in \Delta$ είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b.$$

Θα γράφουμε $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς την διάταξη. Παρατηρήστε οτι από τον ορισμό, κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a, b]$).

(β) Κάθε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη αυτών των υποδιαστημάτων. Δηλαδή, το πλάτος της διαμέρισης ισούται με

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε οτι δεν απαιτούμε αυτά τα n υποδιαστήματα να έχουν το ίδιο μήκος (τα x_k δεν είναι υποχρεωτικό να ισαπέχουν).

(γ) Η διαμέριση Δ_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της Δ αν $\Delta \subseteq \Delta_1$, δηλαδή αν προκύπτει από την Δ με την προσθήκη κι άλλων (πεπερασμένων το πλήθος) σημείων. Τότε λέμε οτι η Δ_1 είναι λεπτότερη από την Δ.

(δ) Έστω Δ_1, Δ_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η **κοινή εκλέπτυνση** των Δ_1, Δ_2 είναι η διαμέριση $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Εύκολα βλέπουμε οτι η Δ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και οτι αν Δ' είναι μια διαμέριση λεπτότερη τόσο από την Δ_1 όσο και από την Δ_2 τότε $\Delta' \supseteq \Delta$ (δηλαδή, η $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι η μικρότερη δυνατή διαμέριση που εκλεπτύνει τόσο την Δ_1 όσο και την Δ_2).

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Η Δ διαμερίζει το $[a,b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, \Delta) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, \Delta) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, επομένως και σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ ορίζουμε τώρα το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την Δ με τον εξής τρόπο:

$$\overline{\sum}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

είναι το **άνω άθροισμα της f ως προς** Δ και

$$\underline{\sum}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

είναι το **κάτω άθροισμα της f ως προς** Δ.

Παρατήρηση: Είναι φανερό οτι για κάθε διαμέριση Δ ισχύει

$$(*) \qquad \underline{\sum}(f, \Delta) \leq \overline{\sum}(f, \Delta)$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Σε σχέση με το «εμβαδόν» που προσπαθούμε να ορίσουμε, πρέπει να σκεφτόμαστε το κάτω άθροισμα $\underline{\sum}(f, \Delta)$ σαν μια *προσέγγιση από κάτω* και το άνω άθροισμα $\overline{\sum}(f, \Delta)$ σαν μια *προσέγγιση από πάνω*.

Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα από την $(*)$:

Λήμμα 5.1.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και Δ_1, Δ_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$(**) \qquad \underline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \overline{\sum}(f, \Delta_2).$$

Παρατηρήστε οτι η $(*)$ είναι ειδική περίπτωση της $(**)$: αρκεί να πάρουμε $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$ στο Λήμμα.

Απόδειξη: Η απόδειξη της $(**)$ θα βασιστεί στον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Έστω $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν $\Delta_1 = \Delta \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < y < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$, τότε
>
> $$\underline{\sum}(f, \Delta) \leq \underline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \overline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \overline{\sum}(f, \Delta).$$

Δηλαδή, με την προσθήκη ενός σημείου y στην διαμέριση Δ, το άνω άθροισμα της f «μικραίνει» ενώ το κάτω άθροισμα της f «μεγαλώνει».

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \Longrightarrow \inf B \leq \inf A$). Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\underline{\sum}(f, \Delta_1) &= [m_0(x_1 - x_0) + \ldots + m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) + \ldots \\
&\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\
&\geq [m_0(x_1 - x_0) + \ldots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \ldots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\
&= \underline{\sum}(f, \Delta).
\end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε οτι

$$\overline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \overline{\sum}(f, \Delta). \qquad \square$$

Για να αποδείξουμε την $(**)$ θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ των Δ_1 και Δ_2. Η Δ προκύπτει από την Δ_1 με διαδοχική προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $\underline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \underline{\sum}(f, \Delta)$.

Όμοια βλέπουμε οτι $\overline{\sum}(f, \Delta) \leq \overline{\sum}(f, \Delta_2)$. Από την άλλη πλευρά, $\underline{\sum}(f, \Delta) \leq \overline{\sum}(f, \Delta)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$\underline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \underline{\sum}(f, \Delta) \leq \overline{\sum}(f, \Delta) \leq \overline{\sum}(f, \Delta_2). \qquad \square$$

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A = \left\{\underline{\sum}(f, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\right\}$$

και

$$B = \left\{\overline{\sum}(f, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\right\}.$$

Από το Λήμμα 5.1.1 έχουμε: για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$. Άρα, $\sup A \leq \inf B$ (Άσκηση 1.6.17). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\underline{\sum}(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\overline{\sum}(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\}$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ορισμός Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

5.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι δύσχρηστος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να αποφανθεί αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας που ακολουθεί είναι πολύ πιό εύχρηστο:

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$\overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση Δ_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < \underline{\sum}(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση Δ_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > \overline{\sum}(f,\Delta_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Τότε,
$$\begin{aligned}\overline{\sum}(f,\Delta) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq \overline{\sum}(f,\Delta_2) - \frac{\varepsilon}{2}\\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx\\ &< \underline{\sum}(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{\sum}(f,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$
απ' όπου έπεται οτι
$$0 \leq \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon.$$
Αντίστροφα: υποθέτουμε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε
$$\overline{\sum}(f,\Delta_\varepsilon) < \underline{\sum}(f,\Delta_\varepsilon) + \varepsilon.$$
Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε
$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\sum}(f,\Delta_\varepsilon)\\ &< \underline{\sum}(f,\Delta_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.\end{aligned}$$
Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται οτι
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$
δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. $\square$

Παραδείγματα: Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.2.1 για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:

(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση Δ_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:
$$\Delta_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$\begin{aligned}
\underline{\sum}(f,\Delta_n) &= f(0)\frac{1}{n}+f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n}\left(0+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\\
&= \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\\
&= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}(f,\Delta_n) &= f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^2}\right)\\
&= \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\
&= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται οτι

$$\overline{\sum}(f,\Delta_n)-\underline{\sum}(f,\Delta_n)=\frac{1}{n}.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\sum}(f,\Delta)-\underline{\sum}(f,\Delta)<\varepsilon.$$

Αρκεί να πάρουμε $n\in\mathbb{N}$ με $1/n<\varepsilon$ και $\Delta=\Delta_n$.

Από το Θεώρημα 5.2.1 συμπεραίνουμε οτι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} &= \underline{\sum}(f,\Delta_n)\\
&\leq \underline{\int_0^1} x^2dx=\int_0^1 x^2dx=\overline{\int_0^1} x^2dx\\
&\leq \overline{\sum}(f,\Delta_n)\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3}\quad \text{και}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3},$$

έπεται οτι
$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3}.$$
Δηλαδή,
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

(β) Η συνάρτηση του Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Θα δείξουμε οτι η f **δεν** είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω Δ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Δηλαδή,
$$\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = 1\}.$$

Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της f ως προς την Δ. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $f(q_k) = 1$, $f(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε οτι $m_k = 0$ και $M_k = 1$. Συνεπώς,
$$\underline{\sum}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$$
και
$$\overline{\sum}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 1.$$
Αφού η Δ ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε
$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1.$$
Άρα, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(γ) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x = \frac{1}{2} \\ 0 & , x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Θα δείξουμε οτι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και
$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση Δ του $[0,1]$ τέτοια ώστε

$$0 \leq \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Η διαμέριση Δ θα είναι της μορφής

$$\Delta = \left\{0 < \frac{1}{2} - \delta < \frac{1}{2} + \delta < 1\right\},$$

όπου το δ θα επιλεγεί κατάλληλα (και θα εξαρτάται από το δοθέν ε).

Εύκολα βλέπουμε οτι

$$\underline{\sum}(f,\Delta) = 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + 0 \cdot (2\delta) + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \delta\right) = 0$$

και

$$\overline{\sum}(f,\Delta) = 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + 3 \cdot (2\delta) + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \delta\right) = 6\delta,$$

άρα

$$0 \leq \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) = 6\delta < \varepsilon$$

αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε $\delta = \varepsilon/12$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 5.2.1) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Επιπλέον, για κάθε διαμέριση $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ του $[0,1]$ έχουμε $\underline{\sum}(f,\Delta) = 0$, επομένως

$$\int_0^1 f(x)dx = \underline{\int_0^1} f(x)dx = \sup\left\{\underline{\sum}(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0,1]\right\} = 0.$$

5.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann (Θεώρημα 5.2.1) θα δείξουμε οτι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 5.3.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε αν

$$\Delta_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b\right\}$$

είναι η διαμέριση του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, να ισχύει

$$\overline{\sum}(f, \Delta_n) - \underline{\sum}(f, \Delta_n) < \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Delta_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} \underline{\sum}(f, \Delta_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\overline{\sum}(f, \Delta_n) - \underline{\sum}(f, \Delta_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n},$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 5.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. $\square$

Θεώρημα 5.3.2 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή την διαμέριση

$$\Delta_n = \left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a+\frac{n(b-a)}{n} = b\right\}.$$

Ορίζουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Έστω $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ τ.ω.

$$M_k = f(y_k') \quad \text{και} \quad m_k = f(y_k'').$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται οτι

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f,\Delta_n) - \underline{\sum}(f,\Delta_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

5.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε αυστηρά μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση που θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με τις διαμερίσεις, τα άνω και κάτω αθροίσματα κλπ.

Θεώρημα 5.4.1 *Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Απόδειξη: Έστω $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ έχουμε $m_k = M_k = c$. Άρα,

$$\underline{\sum}(f,\Delta) = \overline{\sum}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} c(x_{k+1} - x_k) = c(b-a).$$

Έπεται οτι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \qquad \square$$

Θεώρημα 5.4.2 *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη: Έστω $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε

$$m_k = \inf\{(f+g)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad , \quad M_k = \sup\{(f+g)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad , \quad M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

$$m_k'' = \inf\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad , \quad M_k'' = \sup\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k' + m_k'' \leq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$m_k' + m_k'' \leq m_k.$$

Ομοίως, για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $M_k' + M_k'' \geq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$M_k' + M_k'' \geq M_k.$$

Έπεται οτι

$$\underline{\sum}(f,\Delta) + \underline{\sum}(g,\Delta) \leq \underline{\sum}(f+g,\Delta) \leq \overline{\sum}(f+g,\Delta) \leq \overline{\sum}(f,\Delta) + \overline{\sum}(g,\Delta).$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx &= \sup\left\{\underline{\sum}(f+g,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\} \\ &\geq \sup\left\{\underline{\sum}(f,\Delta) + \underline{\sum}(g,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\left\{\underline{\sum}(f,\Delta_1)+\underline{\sum}(g,\Delta_2) : \Delta_1,\Delta_2 \text{ διαμερίσεις του } [a,b]\right\}\\
&= \sup\left\{\underline{\sum}(f,\Delta_1) : \Delta_1 \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\}\\
&\quad + \sup\left\{\underline{\sum}(g,\Delta_2) : \Delta_2 \text{ διαμέριση του } [a,b]\right\}\\
&= \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx.
\end{aligned}
$$

(η μεσαία ισότητα αφήνεται σαν άσκηση). Όμοια,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx\\
&\leq \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx\\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}
$$

Αυτό σημαίνει οτι

$$\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx = \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx,$$

δηλαδή η $f+g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και μάλιστα

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \qquad \square$$

Θεώρημα 5.4.3 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα οτι $t > 0$. Έστω $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Αν για $k = 0,1,\ldots,n-1$ ορίσουμε

$$m_k = \inf\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad , \quad M_k = \sup\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$m'_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad , \quad M'_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},$$

είναι φανερό οτι

$$m_k = tm'_k \quad \text{και} \quad M_k = tM'_k.$$

Άρα,

$$\underline{\sum}(tf, \Delta) = t\underline{\sum}(f, \Delta) \quad \text{και} \quad \overline{\sum}(tf, \Delta) = t\overline{\sum}(f, \Delta).$$

Έπεται οτι

$$\underline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{και} \quad \overline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έπεται οτι η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx.$$

Αν $t < 0$, η μόνη αλλαγή στο προηγούμενο επιχείρημα είναι οτι τώρα $m_k = tM'_k$ και $M_k = tm'_k$. Συμπληρώστε την απόδειξη μόνοι σας.

Τέλος, αν $t = 0$ έχουμε $tf \equiv 0$. Άρα,

$$\int_a^b tf = 0 = 0 \cdot \int_a^b f. \qquad \square$$

Πόρισμα 5.4.1 *Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx. \qquad \square$$

Θεώρημα 5.4.4 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις Δ_1 του $[a,c]$ και Δ_2 του $[c,b]$ τέτοιες ώστε

$$\underline{\sum}(f, \Delta_1) \leq \int_a^c f(x)dx \leq \overline{\sum}(f, \Delta_1) \quad \text{και} \quad \overline{\sum}(f, \Delta_1) - \underline{\sum}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\underline{\sum}(f,\Delta_2) \leq \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\sum}(f,\Delta_2) \quad \text{και} \quad \overline{\sum}(f,\Delta_2) - \underline{\sum}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύουν οι

$$\underline{\sum}(f,\Delta) = \underline{\sum}(f,\Delta_1) + \underline{\sum}(f,\Delta_2) \quad , \quad \overline{\sum}(f,\Delta) = \overline{\sum}(f,\Delta_1) + \overline{\sum}(f,\Delta_2).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) &= \left(\overline{\sum}(f,\Delta_1) - \underline{\sum}(f,\Delta_1)\right) \\ &\quad + \left(\overline{\sum}(f,\Delta_2) - \underline{\sum}(f,\Delta_2)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann). Επιπλέον έχουμε

$$\underline{\sum}(f,\Delta) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{\sum}(f,\Delta)$$

και

$$\underline{\sum}(f,\Delta) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \overline{\sum}(f,\Delta)$$

(γιατί;). Επομένως,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| \leq \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε οτι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ τ.ω.

$$\overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Αν $c \notin \Delta$ θέτουμε $\Delta' = \Delta \cup \{c\}$, οπότε πάλι έχουμε

$$\overline{\sum}(f,\Delta') - \underline{\sum}(f,\Delta') \leq \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < \varepsilon$$

(γιατί;). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε οτι $c \in \Delta$. Ορίζουμε $\Delta_1 = \Delta \cap [a,c]$ και $\Delta_2 = \Delta \cap [c,b]$. Οι Δ_1, Δ_2 είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, και

$$\underline{\sum}(f,\Delta) = \underline{\sum}(f,\Delta_1) + \underline{\sum}(f,\Delta_2) \quad , \quad \overline{\sum}(f,\Delta) = \overline{\sum}(f,\Delta_1) + \overline{\sum}(f,\Delta_2).$$

Αφού

$$\begin{aligned} \left(\overline{\sum}(f,\Delta_1) - \underline{\sum}(f,\Delta_1)\right) &+ \left(\overline{\sum}(f,\Delta_2) - \underline{\sum}(f,\Delta_2)\right) \\ &= \overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

έπεται οτι

$$\overline{\sum}(f,\Delta_1) - \underline{\sum}(f,\Delta_1) < \varepsilon \quad , \quad \overline{\sum}(f,\Delta_2) - \underline{\sum}(f,\Delta_2) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann μας εξασφαλίζει οτι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε την ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad \square$$

Θεώρημα 5.4.5 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

είναι η **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Αρκεί να διαπιστώσετε οτι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ ισχύει

$$m(b-a) \leq \underline{\sum}(f,\Delta) \leq \overline{\sum}(f,\Delta) \leq M(b-a)$$

(το οποίο είναι πολύ εύκολο). $\square$

Άσκηση Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε οτι:
(α) η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(β) η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Τελευταία παρατήρηση: Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε με κλειστό διάστημα $[a,b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geq b$ ως εξής:

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Όλες οι ιδιότητες που αποδείξαμε σε αυτήν την παράγραφο, εκτός από την

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

εξακολουθούν να ισχύουν.

5.5 Παράρτημα: ο ορισμός του Riemann για το ολοκλήρωμα - ισοδυναμία με τον ορισμό του Darboux

Ο ορισμός που δώσαμε για το ποιές φραγμένες συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε οτι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος μικρότερο από δ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η Δ, τότε

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε οτι ο I είναι το

$$\int_a^b f(x)dx$$

(ο I είναι το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$).

Συμβολισμός: Συνήθως γράφουμε ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, \Delta, \xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Παρατηρήστε οτι τώρα το ξ «εισέρχεται» υποχρεωτικά στον συμβολισμό $\sum(f, \Delta, \xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση Δ μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι οτι

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum(f, \Delta, \xi)$$

όταν το πλάτος της Δ τείνει στο μηδέν και τα ξ_k επιλέγονται αυθαίρετα στα υποδιαστήματα που ορίζει η Δ. Επειδή δεν έχουμε συναντήσει τέτοιου είδους «όρια» ως τώρα, καταφεύγουμε στην «εψιλοντική μέθοδο».

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 5.5.1 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε I για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) τέτοια ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi'_k, \xi''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τ.ω.

$$m_k > f(\xi'_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad , \quad M_k < f(\xi''_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα,

$$\underline{\sum}(f, \Delta) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi'_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\overline{\sum}(f, \Delta) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi''_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται οτι
$$\overline{\sum}(f,\Delta)-\underline{\sum}(f,\Delta)<\varepsilon,$$
δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,
$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{\int_a^b} f(x)dx\le\overline{\int_a^b} f(x)dx<I+\frac{\varepsilon}{2},$$
και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν,
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=I.$$
Δηλαδή,
$$\int_a^b f(x)dx=I.$$
Αντίστροφα: υποθέτουμε οτι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ τ.ω.
$$\overline{\sum}(f,\Delta)-\underline{\sum}(f,\Delta)<\frac{\varepsilon}{4}.$$
Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Επιλέγουμε
$$\delta=\frac{\varepsilon}{6nM}>0.$$
Έστω Δ' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος μικρότερο από δ, **η οποία είναι και εκλέπτυνση της** Δ. Τότε, για κάθε επιλογή ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η Δ' έχουμε
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx-\frac{\varepsilon}{4} &< \underline{\sum}(f,\Delta)\le\underline{\sum}(f,\Delta')\\ &\le \sum(f,\Delta',\xi)\\ &\le \overline{\sum}(f,\Delta')\le\overline{\sum}(f,\Delta)\\ &< \int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$
Δηλαδή,
$$\left|\sum(f,\Delta',\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για **τυχούσα** διαμέριση Δ_1 με πλάτος μικρότερο από δ (μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της Δ).

Έστω $\Delta_1 = \{a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a, b]$. Θα «προσθέσουμε» στην Δ_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της Δ τα οποία δεν ανήκουν στην Δ_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε οτι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της Δ_1. Θεωρούμε την $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$ με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \ldots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην Δ_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum(f, \Delta_1, \xi^{(1)}) - \sum(f, \Delta_2, \xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1} - y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l) \\
&\quad - f(\xi_l'')(y_{l+1} - x_k)| \\
&\leq 3M \max_l |y_{l+1} - y_l| < 3M\delta \\
&= \frac{\varepsilon}{2n}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την δοσμένη $(\Delta_1, \xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(\Delta_k, \xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της Δ, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση Δ_0 και μια επιλογή σημείων $\xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η Δ_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των Δ και Δ_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η Δ_0 είναι εκλέπτυνση της Δ, έχουμε

$$\left|\sum(f, \Delta_0, \xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην Δ_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f, \Delta_1, \xi^{(1)}) - \sum(f, \Delta_0, \xi^{(0)})\right| < n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση Δ_1 πλάτους $< \delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της Δ_1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum(f, \Delta_1, \xi^{(1)}) - \int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f, \Delta_1, \xi^{(1)}) - \sum(f, \Delta_0, \xi^{(0)}\right| \\
&\quad + \left|\sum(f, \Delta_0, \xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Έπεται οτι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και οτι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. $\square$

5.6 Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann αποδείξτε οτι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμά τους (αν υπάρχει):

(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

(γ) $f(x) = x + [x]$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αλλιώς.

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε οτι

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\underline{\sum}(f,\Delta) = \overline{\sum}(f,\Delta)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Δείξτε οτι η f είναι σταθερή. Ποιό είναι το ολοκλήρωμά της;

5. Έστω $f,g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ τρείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε οτι οι f,h είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = I.$$

Δείξτε οτι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x)dx = I.$$

6. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση τ.ω.

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

για κάθε $x,y \in [0,1]$. Δείξτε οτι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, οτι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x-c)$. Δείξτε οτι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Δείξτε οτι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

10. Έστω $c > 0$ και $f : [ca, cb] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $g(t) = f(ct)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt.$$

11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε οτι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

12. Έστω $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, δείξτε οτι $\int_{-b}^b f(x)dx = 0$.

(β) Αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, δείξτε οτι $\int_{-b}^b f(x)dx = 2\int_0^b f(x)dx$.

13. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε οτι

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

14. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε οτι για κάθε $a, b > 0$

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a) = b$.

15. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $g_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f$ και

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \right| < \varepsilon.$$

16. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

17. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

18. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε οτι

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

19. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

20. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με τυχόν διάστημα $[a,b]$;

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ τ.ω.

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

22. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \int_0^1 f(x^n)dx.$$

Δείξτε οτι $a_n \to f(0)$.

23. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

συγκλίνει.

24. Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Δείξτε οτι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

25. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε οτι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\overline{\sum}(f,\Delta) - \underline{\sum}(f,\Delta) < b - a$ (γιατί;). Δείξτε οτι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ τέτοια ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_1, b_1]$. Δείξτε οτι υπάρχουν $a_2 < b_2$ στο (a_1, b_1) τέτοια ώστε $b_2 - a_2 < 1/2$ και

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

(γ) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ τέτοια ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(δ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε οτι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(ε) Τώρα δείξτε οτι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε οτι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

27. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

28. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε οτι η g είναι ολοκληρώσιμη.

29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη-αρνητικές τιμές. Δείξτε οτι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

30. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a.$$

Δείξτε οτι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = a.$$

31. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε οτι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

32. Αποδείξτε οτι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

Κεφάλαιο 6

Παράγωγος

Θεωρούμε γνωστό τον ορισμό καθώς και τις βασικές ιδιότητες των παραγώγων. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορείτε να συμβουλευτείτε τα βιβλία των Σ. Πηχωρίδη και M. Spivak. Παρακάτω καλύπτουμε μόνο τα θέματα που περιγράφονται στον οδηγό σπουδών.

6.1 Παράγωγος σύνθετης και αντίστροφης συνάρτησης

6.1.1 Ο κανόνας της αλυσίδας

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Λέμε οτι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού A της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$.

Θεώρημα 6.1.1 *Έστω $g : A \to \mathbb{R}$ και $f : B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε οτι $\{g(x) : x \in A\} \subseteq B$. Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε το $y_0 = g(x_0)$ να είναι εσωτερικό σημείο του B. Υποθέτουμε οτι οι παράγωγοι $g'(x_0)$ και $f'(y_0)$ υπάρχουν. Τότε, η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Απόδειξη: Η $f \circ g$ είναι καλά ορισμένη στο A. Ακόμα και αν δεν είχαμε την υπόθεση οτι $\{g(x) : x \in A\} \subseteq B$, οι υπόλοιπες υποθέσεις αρκούν για να δείξουμε οτι η $f \circ g$ είναι καλά ορισμένη σε μια περιοχή του x_0: η g είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο x_0. Το $g(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του B, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(g(x_0)-\delta, g(x_0)+\delta) \subseteq B$. Από τη συνέχεια της g στο x_0 μπορούμε να βρούμε $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \Rightarrow g(x) \in (g(x_0)-\delta, g(x_0)+\delta),$$

άρα η $f(g(x))$ ορίζεται καλά για $|x-x_0| < \delta_1$.
Θέλουμε να δείξουμε οτι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

δηλαδή οτι

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} - f'(g(x_0))g'(x_0) \to 0$$

όταν $x \to x_0$. Γράφουμε την παραπάνω διαφορά με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} &\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} - f'(g(x_0))g'(x_0) \\ &= \left[\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} - f'(g(x_0))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\ &+ f'(g(x_0))\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right]. \end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0)$$

όταν $x \to x_0$, ο δεύτερος όρος του αθροίσματος τείνει στο 0. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \to 0$$

όταν $x \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα υπάρχει $\delta_2 < \delta_1$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right| < 1$$

οπότε

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| < |g'(x_0)| + 1 =: M.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα υπάρχει $\delta_3 < \delta_2$ τέτοιο ώστε

$$0 < |y-g(x_0)| < \delta_3 \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)} - f'(g(x_0))\right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Δηλαδή, αν $|y - g(x_0)| < \delta_3$ τότε

$$|f(y) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))(y - g(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot |y - g(x_0)|.$$

Πάλι από την συνέχεια της g στο x_0, υπάρχει $\delta_4 < \delta_3$ τέτοιο ώστε: αν $|x - x_0| < \delta_4$ τότε $|g(x) - g(x_0)| < \delta_3$, οπότε

$$|f(g(x)) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot |g(x) - g(x_0)|,$$

άρα, αν $0 < |x - x_0| < \delta_4$ έχουμε

$$\left|\frac{f(g(x)) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}\right| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο. □

6.1.2 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 6.1.2 . *Έστω f γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση στο (a, b). Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$ και οτι $f'(x_0) \neq 0$. Τότε, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα. Η $f'(x_0)$ υπάρχει, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Επιπλέον έχουμε υποθέσει οτι $f'(x_0) \neq 0$, άρα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ και $x \neq x_0$, τότε

(1) $$\left|\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$y_1 = f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Τότε, το (y_1, y_2) είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $f(x_0)$, άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$(f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1) \subseteq (y_1, y_2) = \left(f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right), f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right).$$

Έστω $y \neq f(x_0)$ που ικανοποιεί την $|y - f(x_0)| < \delta_1$. Τότε, $y = f(x)$ για κάποιο $x \neq x_0$ με $x \in \left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$. Άρα,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad \text{και} \quad 0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{2},$$

οπότε η (1) δίνει

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Αφου το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται οτι

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Δηλαδή, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

6.2 Θεώρημα του Rolle και θεώρημα μέσης τιμής - κριτήρια μονοτονίας

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b): δηλαδή, για κάθε $x \in (a, b)$ ορίζεται καλά η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x, f(x))$. Θεωρούμε την χορδή AB με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Αν την μετακινήσουμε παράλληλα προς τον εαυτό της, κάποια στιγμή θα γίνει εφαπτομένη του γραφήματος της f σε κάποιο σημείο $(x_0, f(x_0))$, όπου $x_0 \in (a, b)$. Η κλίση της εφαπτομένης θα πρέπει να ισούται με την κλίση της χορδής AB. Δηλαδή,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Στο πρώτο μέρος αυτής της παραγράφου δίνουμε αυστηρή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού (Θεώρημα Μέσης Τιμής). Αποδεικνύουμε πρώτα μια ειδική περίπτωσή του: το θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 6.2.1 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Υποθέτουμε επιπλέον οτι $f(a) = f(b) = 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα οτι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$, δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε, $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$ και οποιοδήποτε από αυτά τα x μπορεί να παίξει το ρόλο του x_0.

Έστω λοιπόν οτι η f δεν είναι σταθερή στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $x_1\in(a,b)$ τ.ω. $f(x_1)\neq 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι $f(x_1)>0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $x_0\in[a,b]$ τ.ω

$$f(x_0)=\max\{f(x):x\in[a,b]\}\geq f(x_1)>0.$$

Ειδικότερα, το x_0 βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα (a,b). Από την υπόθεσή μας η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

- Αν $x<x_0$, τότε $f(x)\leq f(x_0)$ άρα $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. Επομένως,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$

- Αν $x>x_0$, τότε $f(x)\leq f(x_0)$ άρα $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$. Επομένως,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0.$$

Έπεται οτι $f'(x_0)=0$. □

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Rolle.

Θεώρημα 6.2.2 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε μια συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και εύκολα ελέγχουμε οτι $g(a)=g(b)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τ.ω $g'(x_0)=0$. Δηλαδή,

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \qquad \square$$

Μια παραλλαγή (και γενίκευση) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy:

Θεώρημα 6.2.3 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Υποθέτουμε επιπλέον οτι*

(α) οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a, b).

(β) $g(b) - g(a) \neq 0$.

Τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε μια συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Επίσης,

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$$

Από το Θεώρημα 6.2.2 υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0,$$

δηλαδή

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Παρατηρούμε οτι $g'(x_0) \neq 0$: αν είχαμε $g'(x_0) = 0$, τότε θα ήταν $(g(b)-g(a))f'(x_0) = 0$ και αφού από την υπόθεσή μας $g(b) - g(a) \neq 0$ θα έπρεπε να έχουμε $f'(x_0) = 0$. Δηλαδή οι f' και g' θα είχαν κοινή ρίζα. Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε και έχουμε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \qquad \square$$

Παρατηρήσεις: (α) Παίρνοντας $g(x) = x$ στο Θεώρημα 6.2.3, παίρνουμε σαν ειδική περίπτωσή του το Θεώρημα Μέσης Τιμής: αφού $g'(x) = 1$, οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a, b) (η g' δεν έχει καμμία ρίζα στο (a, b)). Επίσης, $g(b) - g(a) = b - a \neq 0$. Απο το Θεώρημα 6.2.3 υπάρχει $x_0 \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0).$$

(β) Η υπόθεση οτι οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a, b) είναι απαραίτητη. Πάρτε για παράδειγμα $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$. Τότε,

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = 0.$$

Όμως

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x}, \quad x \neq 0.$$

Άρα δεν υπάρχει $x \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Το πρόβλημα είναι οτι $f'(0) = g'(0) = 0$.

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής μας επιτρέπει να αποδείξουμε το εξής κριτήριο μονοτονίας:

Θεώρημα 6.2.4 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Αν η f είναι αύξουσα, τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Ανάλογα, αν η f είναι φθίνουσα τότε $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(β) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$. Ανάλογα, αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a,b]$.

Απόδειξη: (α) Έστω $x \in (a,b)$. Αφού η f είναι αύξουσα, εύκολα βλέπουμε οτι

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

για κάθε $y \in (a,b)$ με $y \neq x$. Επομένως,

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Η απόδειξη της $f'(x) \leq 0$ για φθίνουσα f είναι εντελώς ανάλογη.

(β) Με την υπόθεση οτι $f'(x) \geq 0$ στο (a,b), δείχνουμε οτι αν $a < x < y < b$ τότε $f(x) \leq f(y)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[x,y]$. Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ και παραγωγίσιμη στο (x,y), οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε $\xi \ \in (x,y)$ τ.ω.

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Αφού $f'(\xi) \geq 0$, έπεται το ζητούμενο. Εντελώς ανάλογα δείχνουμε οτι αν $f'(x) \leq 0$ στο (a,b), τότε η f είναι φθίνουσα. □

6.3 Ιδιότητα Darboux για την παράγωγο

Λέμε οτι μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Darboux (ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής) αν: για κάθε $x < y$ στο I με $f(x) \neq f(y)$ και κάθε πραγματικό αριθμό ρ ανάμεσα στους $f(x)$ και $f(y)$ μπορούμε να βρούμε $z \in (x,y)$ τ.ω. $f(z) = \rho$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έπεται οτι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Darboux.

Θα δείξουμε οτι η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης έχει πάντα την ιδιότητα Darboux (αν και δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση).

Θεώρημα 6.3.1 *Έστω* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε, η* f' *έχει την ιδιότητα Darboux.*

Απόδειξη: Έστω $x<y\in I$ με $f'(x)\neq f'(y)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι $f'(x)<f'(y)$. Υποθέτουμε οτι $f'(x)<\rho<f'(y)$ και θα βρούμε $z\in(x,y)$ τ.ω. $f'(z)=\rho$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x, δηλαδή

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)<\rho.$$

Άρα υπάρχει $h_1>0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\rho$$

για κάθε $0<h<h_1$.

Όμοια η f είναι παραγωγίσιμη στο y, δηλαδή

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}=f'(y)>\rho.$$

Άρα υπάρχει $h_2>0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(y-h)-f(y)}{-h}=\frac{f(y)-f(y-h)}{h}>\rho$$

για κάθε $0<h<h_2$.

Θεωρούμε τον αριθμό $\delta=\frac{1}{2}\min\{h_1,h_2\}>0$. Τότε,

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}<\rho \tag{1}$$

και

$$\frac{f(y-\delta+\delta)-f(y-\delta)}{\delta}>\rho. \tag{2}$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $g_\delta:[x,y-\delta]\to\mathbb{R}$ με

$$g_\delta(t)=\frac{f(t+\delta)-f(t)}{\delta}.$$

• Η g_δ είναι συνεχής στο $[x,y-\delta]$ και από τις (1) και (2) βλέπουμε οτι

$$g_\delta(x)<\rho<g_\delta(y-\delta).$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται οτι υπάρχει $t\in(x,y-\delta)$ τέτοιος ώστε

$$g_\delta(t)=\rho\Rightarrow\frac{f(t+\delta)-f(t)}{\delta}=\rho.$$

• Η f είναι συνεχής στο $[t, t+\delta]$ και παραγωγίσιμη στο $(t, t+\delta)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται οτι υπάρχει $z \in (t, t+\delta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(z) = \frac{f(t+\delta) - f(t)}{t+\delta-t} = \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta} = \rho. \qquad \square$$

Παράδειγμα Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η f έχει παράγωγο σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η f' δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$: το όριο της $2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ καθώς το $x \to 0$ δεν υπάρχει. Από το προηγούμενο όμως θεώρημα, η f' πρέπει να έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής (επαληθεύστε το).

Άσκηση Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a,b)$, δείξτε οτι η ασυνέχεια της f' στο x_0 είναι ουσιώδης (δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f'(x)$).

6.4 Απροσδιόριστες μορφές

Τυπικά παραδείγματα της κατάστασης που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την παράγραφο είναι τα εξής: θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

όπου f, g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες δεξιά και αριστερά από το x_0, με $g(x) \neq 0$ αν το $x \neq x_0$ βρίσκεται κοντά στο x_0, και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ή π.χ.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

Τότε λέμε οτι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ αντίστοιχα.

Οι κανόνες του l'Hospital μας επιτρέπουν συχνά να βρούμε τέτοια όρια (αν υπάρχουν) με την βοήθεια των παραγώγων των f και g. Θα αποδείξουμε αυστηρά μερικούς από αυτούς τους κανόνες.

Θεώρημα 6.4.1 *Έστω $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$.

(β) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τις f και g στο x_0 θέτοντας $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Αφού

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

οι f και g γίνονται τώρα συνεχείς στο (a, b). Θα δείξουμε οτι

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

για κάθε $x \in (x_0, b)$. Οι f', g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (x_0, x) γιατί η g' δεν μηδενίζεται πουθενά. Επίσης $g(x) \neq 0$, δηλαδή $g(x) - g(x_0) \neq 0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy μπορούμε για κάθε $x \in (x_0, b)$ να βρούμε $\xi_x \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Έστω τώρα οτι $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

Αν $x_0 < \xi < x_0 + \delta$, τότε

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \varepsilon.$$

Αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L \right| < \varepsilon$$

(γιατί $x_0 < \xi_x < x < x_0 + \delta$). Άρα,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε οτι $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. $\square$

Θεώρημα 6.4.2 *Έστω $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x > a$.

(β) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $f_1, g_1 : \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Οι $f_1,\ g_1$ είναι παραγωγίσιμες και

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (γιατί;). Επίσης, $g_1 \neq 0$ και $g_1' \neq 0$ στο $(0, 1/a)$. Τέλος,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Άρα, εφαρμόζεται το Θεώρημα 6.4.1 για τις f_1, g_1 και έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Δηλαδή,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \square$$

Ας δούμε και μια τυπική περίπτωση κανόνα l'Hospital για απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Θεώρημα 6.4.3 *Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(β) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Έστω $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε: αν $a < \xi < a + \delta_1$ τότε

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επειδή $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, μπορούμε να βρούμε $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) > f(a+\delta_1) \quad \text{και} \quad g(x) > g(a+\delta_1)$$

για κάθε $a < x < a + \delta_2$. Αυτό σημαίνει (μαζί με τις υπόλοιπες υποθέσεις του θεωρήματος) οτι για κάθε $x \in (a, a+\delta_2)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στο $(x, a+\delta_1)$ και να βρούμε ξ_x τ.ω.

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_1)}{g(x) - g(a+\delta_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

και

$$\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

αφού $a < x < \xi_x < a + \delta_1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} \\ &= \left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L \right) \cdot \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} + L \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}, \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L \right) \cdot \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} + L \frac{\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)} - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}.$$

Αφού $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to +\infty$ καθώς $x \to a^+$, έχουμε την δυνατότητα να βρούμε $\delta > 0$ με $0 < \delta < \delta_2$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (a, a+\delta)$

$$\left| \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} \right| < \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \left| \frac{\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)} - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} \right| < \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)}.$$

Τότε, εύκολα βλέπουμε οτι για κάθε $x \in (a, a+\delta)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &\leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L \right| \cdot \frac{4}{3} + |L| \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)} \\ &< \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

6.5 Μελέτη συναρτήσεων μέσω παραγώγων

(α) Ακρότατα. Λέμε οτι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in (a, b)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ και

$$f(x) \leq f(x_0)$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Τελείως ανάλογα λέμε οτι η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in (a, b)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ και

$$f(x) \geq f(x_0)$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν επιπλέον υποθέσουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε η f' μας δίνει μια αναγαία συνθήκη για να έχουμε ακρότατο στο $x_0 \in (a, b)$:

Θεώρημα 6.5.1 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε οτι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ και $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν $0 < h < \delta$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0.$$

Αν $-\delta < h < 0$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0.$$

Άρα, $f'(x_0) = 0$. □

(β) Γεωμετρική σημασία της δευτέρας παραγώγου. Ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο x_0 δεν είναι και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου στο x_0. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x_0) = 0$. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου μπορούμε πολλές φορές να βεβαιωθούμε για το αν το υποψήφιο σημείο ακρότατου είναι όντως σημείο ακρότατου.

Θεώρημα 6.5.2 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$ με $f'(x_0) = 0$.*

(α) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) < 0$, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο στο x_0.

Αν $f''(x_0) = 0$ ή αν δεν υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε οτιδήποτε μπορεί να συμβαίνει.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο το (α). Έχουμε

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Επομένως μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

- αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$.
- αν $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $f'(x) < 0$.

Έστω $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

- αν $x_0 < y < x_0 + \delta$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_0, y]$ βρίσκουμε $x \in (x_0, y)$ τ.ω.

$$f(y) - f(x_0) = f'(x)(y - x_0) > 0.$$

- αν $x_0 - \delta < y < x_0$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[y, x_0]$ βρίσκουμε $x \in (y, x_0)$ τ.ω.

$$f(y) - f(x_0) = f'(x)(y - x_0) > 0.$$

Δηλαδή, $f(y) \geq f(x_0)$ για κάθε $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. $\square$

(γ) Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Λέμε οτι η f **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο σημείο** x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Δηλαδή, αν το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : |x - x_0| < \delta\}$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη.

Λέμε οτι η f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο σημείο** x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Δηλαδή, αν το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : |x - x_0| < \delta\}$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη.

Τέλος, λέμε οτι η f έχει **σημείο καμπής στο σημείο** x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), & x_0 < x < x_0 + \delta \\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), & x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), & x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Η f λέγεται **κυρτή** στο (a,b) αν στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω σε κάθε $x_0 \in (a,b)$ και **κοίλη** στο (a,b) αν στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω σε κάθε $x_0 \in (a,b)$.

Η δεύτερη παράγωγος (αν υπάρχει) μπορεί να μας δώσει πληροφορία για το αν η f είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο $x_0 \in (a,b)$ ή και σε ολόκληρο το (a,b).

Θεώρημα 6.5.3 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a,b)$ για το οποίο υποθέτουμε οτι υπάρχει η $f''(x_0)$.*

(α) Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο x_0.

(β) Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο x_0.

Απόδειξη: (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Αφού υπάρχει η $f''(x_0)$, η f' υπάρχει σε μια περιοχή του x_0. Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0 και

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Έχουμε $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$. Από το Θεώρημα 6.5.2, η g έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. Όμως, $g(x_0) = 0$. Άρα, $g(x) \geq 0$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

αν $|x - x_0| < \delta$. Αυτό σημαίνει οτι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο x_0.

(β) Με τον ίδιο τρόπο. □

Τέλος, δίνουμε μια αναγαία συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο καμπής της f.

Θεώρημα 6.5.4 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a,b)$ για το οποίο υποθέτουμε οτι υπάρχει η $f''(x_0)$. Αν η f έχει σημείο καμπής στο x_0, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Η g δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο x_0 (έχουμε $g(x_0) = 0$ και $g \geq 0$ αριστερά του x_0, $g \leq 0$ δεξιά του x_0 -ή το αντίστροφο- οπότε ο μόνος τρόπος για να έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 είναι να είναι σταθερά ίση με μηδεν σε μια περιοχή αριστερά ή δεξιά του x_0).

Επίσης, $g'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0)$. Αν ήταν $g''(x_0) > 0$ ή $g''(x_0) < 0$ τότε η g θα είχε **γνήσιο** ακρότατο στο x_0, άτοπο. Άρα, $f''(x_0) = 0$. □

Παρατήρηση Η συνθήκη του Θεωρήματος 6.5.4 δεν είναι ικανή. Η $f(x) = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$. Είναι κυρτή και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $x_0 = 0$. Όμως $f''(x) = 12x^2$, άρα $f''(0) = 0$.

6.6 Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ξέρουμε οτι τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b]$. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Θεώρημα 6.6.1 *Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M(y-x) \\ &\leq M \cdot |y-x|. \end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής. □

Ισχύει μάλιστα κάτι ισχυρότερο: στα σημεία συνέχειας της f η F είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 6.6.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε οτι $a < x_0 < b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ ελέγχονται όμοια). Θέτουμε $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Αν $|h| < \delta_1$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $0 < \delta < \delta_1$ τ.ω. αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έστω $0 < |h| < \delta$.

- Αν $0 < h < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon dt = \frac{1}{h}\cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Αν $-\delta < h < 0$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon dt = \frac{1}{|h|}\cdot(-h)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται οτι

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

δηλαδή $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Το Θεώρημα 6.6.2 είναι το **πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού**. Ας υποθέσουμε τώρα οτι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μια συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f (ή **αντιπαράγωγος** της f) αν $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6.2, η

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Αν G είναι ένα άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, άρα η $F - G$ είναι σταθερή στο (a,b) (απλή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής). Λόγω συνέχειας στα άκρα a και b έπεται οτι

$$F(x) - G(x) = c$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού $F(a) = 0$, παίρνουμε $c = -G(a)$. Δηλαδή,

$$\int_a^x f(t)dt - G(x) = -G(a)$$

ή αλλιώς

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Ειδικότερα, αν θέσουμε $x = b$ παίρνουμε το **δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού**:

Θεώρημα 6.6.3 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση. Αν G είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \qquad \square$$

6.7 Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$.

(β) $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $g(0) = 0$.

(γ) $h(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $h(0) = 0$.

2. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και $a < x_0 < b$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει $\alpha > 0$ τ.ω. $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^{\alpha}$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(α) Δείξτε οτι η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Αν $\alpha > 1$, δείξτε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Ποιά είναι η τιμή της $f'(x_0)$;

(γ) Δώστε παράδειγμα όπου $\alpha = 1$ αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

δεν είναι φραγμένη. Δείξτε οτι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Έστω $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Υποθέτουμε οτι για κάποιο $t \in (0,1)$ ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(tx)}{x} = b.$$

Δείξτε οτι υπάρχει η $f'(0)$ και υπολογίστε την τιμή της.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε οτι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε οτι η $g(x) = f(x) - \cos x$ είναι σταθερή συνάρτηση.]

6. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ και $f'(x_0) > 0$. Δείξτε οτι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

(α) $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a,b)$.

(β) $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$.

7. Ορίζουμε $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Δείξτε οτι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς τρείς διαφορετικές πραγματικές λύσεις.

8. Δείξτε οτι η εξίσωση $e^x = 1 + x$ έχει ακριβώς μια πραγματική λύση. Ποιά;

9. (α) Δείξτε οτι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μια λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

10. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε οτι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.

11. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in (0, 2)$. Θέτουμε $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Δείξτε οτι η (a_n) συγκλίνει.

12. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε οτι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0.$$

13. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, a)$. Υποθέτουμε οτι $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ στο $(0, a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε οτι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε οτι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

14. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) \geq m > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε οτι υπάρχει υποδιάστημα J του $[0, 1]$, με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του $1/2$, τ.ω. $f(x) \geq m/2$ για κάθε $x \in J$.

15. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, με $f(a) = 0$ και $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

16. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$\begin{aligned} M_0 &= \sup\{|f(x)| : x > 0\} \\ M_1 &= \sup\{|f'(x)| : x > 0\} \\ M_2 &= \sup\{|f''(x)| : x > 0\}. \end{aligned}$$

Δείξτε οτι $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

17. Έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε οτι για κάθε $x \in [0, a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du.$$

18. Έστω $f, h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Υποθέτουμε οτι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε οτι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

19. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε οτι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχη παράγωγο: δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε οτι

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = 0.$$

21. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τ.ω. $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

22. Υποθέτουμε οτι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και οτι η $f''(x_0)$ υπάρχει σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε οτι

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

23. Υποθέτουμε οτι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και οτι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε οτι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

25. Υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων F, G με

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \quad , \quad G(x) = \int_{2-x}^{2+x} \frac{t-1}{t} dt.$$

26. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχης συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x)=\int_0^x xf(t)dt$$

για $x\in[0,1]$. Υπολογίστε την $F'(x)$.

27. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$. Δείξτε οτι αν

$$(f(x))^2=2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x\geq 0$, τότε $f(x)=x$ στο $[0,+\infty)$.

28. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε

$$M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n=\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=M$.

29. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε οτι υπάρχει $s\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^s f(t)dt=\int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b);

30. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε οτι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

31. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε οτι υπάρχει $s\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx=f(s)\cdot(b-a).$$

32. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε οτι υπάρχει $s\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx=\frac{f(s)}{3}.$$

Κεφάλαιο 7

Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να δώσουμε αυστηρό ορισμό της εκθετικής συνάρτησης a^x, $a > 0$ και της (αντίστροφής της) λογαριθμικής συνάρτησης $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ και να αποδείξουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Θα περιγράψουμε συνοπτικά δύο τρόπους ορισμού.

7.1 Ορισμός μέσω του ολοκληρώματος

Έστω a θετικός πραγματικός αριθμός. Είναι φανερός ο τρόπος με τον οποίο ορίζει κανείς τον a^x όταν ο x είναι ρητός:

- αν $x \in \mathbb{N}$, τότε $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (x φορές).
- αν $x = 0$, τότε θέτουμε $a^0 = 1$.
- αν $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$, τότε ορίζουμε $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ (με αυτόν τον τρόπο διατηρείται η γνωστή ισότητα $a^{x+y} = a^x a^y$ για τυχόντες $x, y \in \mathbb{Z}$).
- αν $x = \frac{1}{n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (στο Κεφάλαιο 1 αποδείχθηκε η ύπαρξη και το μονοσήμαντο θετικής n-οστής ρίζας για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό).
- αν $x = \frac{m}{n}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ είναι τυχών ρητός, θέτουμε

$$a^x = \left(a^{1/n}\right)^m .$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι αν $x = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, τότε

$$\left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^{1/n_1}\right)^{m_1}.$$

Δηλαδή, ο a^x ορίζεται καλά με αυτόν τον τρόπο.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι με ποιόν τρόπο θα επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x για άρρητους εκθέτες x, έτσι ώστε να προκύψει μια συνεχής συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ που να ικανοποιεί τα εξής:

1. $f_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$.
2. $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f_a(1) = a$.

Παρατηρήστε οτι η πρώτη ιδιότητα είναι συνέπεια των άλλων δύο (γιατί;).

Ας υποθέσουμε οτι καταφέραμε να ορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση f_a και μάλιστα με τέτοιον τρόπο ώστε η f_a να είναι παραγωγίσιμη. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x)f_a(h) - f_a(x)f_a(0)}{h} \\ &= f_a(x) \lim_{h\to 0} \frac{f_a(h) - f_a(0)}{h} \\ &= f_a'(0) \cdot f_a(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, η παράγωγος της f_a είναι υποχρεωμένη να ικανοποιεί την

$$f_a'(x) = f_a'(0) \cdot f_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η αντίστροφη συνάρτηση (υποθέτουμε εδώ οτι η f_a που προσπαθούμε να ορίσουμε θα είναι γνησίως μονότονη και επί του $(0, +\infty)$) $\log_a := f_a^{-1}$ της f_a θα είναι κι αυτή παραγωγίσιμη (αρκεί να ισχύει $f_a'(0) \neq 0$) και θα ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \log_a'(x) &= \frac{1}{f_a'(\log_a x)} = \frac{1}{f_a'(0)f_a(\log_a x)} \\ &= \frac{1}{f_a'(0)x} \end{aligned}$$

για κάθε $x > 0$. Δηλαδή, η παράγωγος της $\log_a x$ είναι «υποχρεωμένη» να έχει την πολύ απλή μορφή

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{cx}$$

όπου $c = f_a'(0)$. Μορφή που θα είναι ακόμα απλούστερη για εκείνο το $a > 0$ (αν υπάρχει!) που ικανοποιεί την

$$f_a'(0) = c = 1.$$

Αυτή η τιμή του a είναι η πιό «φυσιολογική» και αυτής της f_a η αντίστροφη συνάρτηση είναι η πιό «φυσιολογική» λογαριθμική συνάρτηση (με παράγωγο την $1/x$). Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στον εξής «ουρανοκατέβατο» ορισμό:

Ορισμός Ορίζουμε μια συνάρτηση $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Ο ορισμός αυτός υπαγορεύεται από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: η $\frac{1}{t}$ είναι συνεχής στο $[1, x]$ αν $x > 1$ ή στο $[x, 1]$ αν $x < 1$, άρα η $\ln x$ ορίζεται καλά για κάθε $x > 0$. Επιπλέον,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Δηλαδή, η ln είναι η «φυσιολογική» λογαριθμική συνάρτηση που ψάχναμε.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε οτι η ln ικανοποιεί την βασική ιδιότητα των λογαρίθμων:

Θεώρημα 7.1.1 *Αν $x, y > 0$, τότε $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.*

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε κάποιο $x > 0$ και ορίζουμε $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(y) = \ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Τότε,

$$f'(y) = \frac{1}{xy} \cdot \frac{d(xy)}{dy} = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y} = \ln'(y).$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\ln(xy) = \ln y + c$$

για κάθε $y > 0$. Για να υπολογίσουμε την τιμή της c, θέτουμε $y = 1$. Έχουμε

$$\ln x = \ln 1 + c = \int_1^1 \frac{1}{t} dt + c = 0 + c = c.$$

Άρα, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. □

Άσκηση Δείξτε οτι αν $x, y > 0$, τότε
(α) $\ln(x^n) = n \ln x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

Είναι φανερό οτι η $\ln$ είναι συνεχής και μάλιστα παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επίσης, η $\ln$ είναι γνησίως αύξουσα αφού η παράγωγός της είναι $\frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Το σύνολο τιμών της $\ln$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αυτό φαίνεται εύκολα ως εξής: έχουμε

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}dt > 0,$$

επομένως

$$\ln(2^n) = n\ln 2 \to +\infty$$

καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, η $\ln$ παίρνει οσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές. Αφού $\ln 1 = 0$, η συνέχεια της $\ln$ και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μας εξασφαλίζουν οτι η $\ln$ παίρνει **όλες** τις τιμές στο $[0,+\infty)$ για $x \geq 1$. Δηλαδή,

$$f([1,+\infty)) = [0,+\infty).$$

Από την $\ln(1/x) = -\ln x$ συμπεραίνουμε οτι

$$f((0,1]) = (-\infty, 0].$$

Άρα, έχουμε δείξει το εξής:

Θεώρημα 7.1.2 *Η* $\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και επί συνάρτηση, με παράγωγο*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}. \qquad \square$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την αντίστροφη της $\ln$,

$$\exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$$

με $\exp(x) = \ln^{-1}(x)$. Ορίζουμε

$$e = \exp(1)$$

και γράφουμε $\exp(x) =: e^x$. Η $x \mapsto e^x$ ικανοποιεί την βασική ιδιότητα μιας «εκθετικής συνάρτησης»:

Θεώρημα 7.1.3 *Αν* $x, y \in \mathbb{R}$, *τότε* $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ *(δηλαδή,* $e^{x+y} = e^x e^y$*).*

Απόδειξη: Έστω $z = \exp(x)$ και $w = \exp(y)$. Τότε, $zw = \exp(x)\exp(y)$, άρα το Θεώρημα 7.1.1 δίνει

$$\ln(zw) = \ln(\exp(x)\cdot\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y.$$

Έπεται οτι

$$zw = \ln^{-1}(x+y) \Longrightarrow zw = \exp(x+y).$$

Δηλαδή, $\exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y)$. $\square$

Θεώρημα 7.1.4 *Η* exp *είναι παραγωγίσιμη και* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Απόδειξη: Από τον τύπο της παραγώγου αντίστροφης απεικόνισης,

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} \\ &= \ln^{-1}(x) = \exp(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Παρατήρηση Αξίζει τον κόπο να ελέγξουμε οτι, με τον ορισμό του e που δώσαμε,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Αν $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, έχουμε

$$\ln a_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}.$$

Όταν $n\to\infty$ έχουμε $\frac{1}{n}\to 0$. Άρα,

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}} \to \ln'(1) = 1.$$

Αφού $\ln a_n \to 1$, από τη συνέχεια της exp παίρνουμε $a_n = \exp(\ln a_n) \to \exp(1) = e$.

Ορισμός Για αυθαίρετο $a > 0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ και (αν $a \neq 1$) $x \mapsto \log_a(x)$, $x > 0$ ως εξής:

- $a^x = \exp(x\ln a) = e^{x\ln a}$.
- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, αν $a \neq 1$.

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των exp και ln ελέγχουμε εύκολα οτι

- αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $a^{x+y} = a^x a^y$.
- αν $a \neq 1$ και $x, y > 0$, τότε $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

Άσκηση Δείξτε οτι:

1. Αν $0 < a < 1$, τότε η a^x είναι γνησίως φθίνουσα και
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$
2. Αν $a > 1$, τότε η a^x είναι γνησίως αύξουσα και
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

3. Αν $0 < a < 1$, τότε η $\log_a(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

4. Αν $a > 1$, τότε η $\log_a(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

Άσκηση Δείξτε οτι:

1. Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, τότε

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x\ln a}.$$

2. Για κάθε $a > 0$,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Δείξτε επίσης οτι η a^x είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $\log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Θεώρημα 7.1.5 *Οι συναρτήσεις* $\ln$ *και* $\exp$ *ικανοποιούν τα εξής: για κάθε* $s > 0$,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty \tag{1}$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0. \tag{2}$$

[Δηλαδή, η exp αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x, ενώ η ln αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x.]

Απόδειξη: (1) Δείχνουμε πρώτα οτι $e^x > x$ αν $x > 1$. Αρκεί να δείξουμε οτι $\ln x < x$. Όμως,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x 1dt = x - 1 < x.$$

Αυτή η ανισότητα ήδη δείχνει οτι $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (γιατί;). Τώρα,

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{2}\frac{e^{x/2}}{x/2} \cdot e^{x/2} > \frac{1}{2}e^{x/2}$$

αν $x > 2$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} e^{x/2} = +\infty$, συμπεραίνουμε οτι

$$\frac{e^x}{x} \to +\infty.$$

Έστω τώρα τυχών $s > 0$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $n > s$, οπότε για κάθε $x > 1$ έχουμε $e^x/x^s > e^x/x^n$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$$

όταν $x \to +\infty$. Γράφουμε

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{x/n} \dots e^{x/n}}{x \dots x} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n.$$

Όμως, όταν $x \to +\infty$ έχουμε $x/n \to +\infty$, οπότε το προηγούμενο βήμα δείχνει οτι $e^{x/n}/(x/n) \to +\infty$. Έπεται οτι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = +\infty.$$

(2) Αυτό είναι απλούστερο. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του l'Hospital. Έχουμε

$$\frac{(\ln x)'}{(x^s)'} = \frac{\frac{1}{x}}{sx^{s-1}} = \frac{1}{sx^s} \to 0$$

όταν $x \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0. \qquad \square$$

7.2 Ο «φυσιολογικός» ορισμός

Σε αυτήν την παράγραφο υποθέτουμε οτι ο a^x έχει οριστεί για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ όπως στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου, και δίνουμε μια σύντομη περιγραφή του «φυσιολογικού» τρόπου ορισμού της εκθετικής συνάρτησης a^x: επεκτείνουμε τον ορισμό για άρρητους εκθέτες x.

Ο ορισμός του a^x, $x \notin \mathbb{Q}$ θα βασιστεί στο ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 7.2.1 *Έστω $a > 0$ και (q_n) ακολουθία ρητών αριθμών με $q_n \to 0$. Τότε,*

$$a^{q_n} \to 1.$$

Απόδειξη: Αν $a = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Η περίπτωση $0 < a < 1$ ανάγεται στην $a > 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν οτι $a > 1$. Εύκολα βλέπουμε οτι αν $q, q' \in \mathbb{Q}$ και $q < q'$ τότε $a^q < a^{q'}$. Αφού $-|q_n| \leq q_n \leq |q_n|$, έχουμε

$$a^{-|q_n|} = \frac{1}{a^{|q_n|}} \leq a^{q_n} \leq a^{|q_n|}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν δείξουμε οτι $a^{|q_n|} \to 1$, τότε εφαρμόζοντας το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών θα έχουμε $a^{q_n} \to 1$.

Κάθε $|q_n|$ γράφεται στη μορφή $\frac{1}{\pi_n + s_n}$ όπου $0 \leq s_n < 1$ και $\pi_n = [1/|q_n|]$, αν $q_n \neq 0$. Αφού $q_n = 0 \Rightarrow a^{q_n} = 1$, έπεται οτι

$$a^{|q_n|} = a^{\frac{1}{\pi_n + s_n}} \leq a^{\frac{1}{\pi_n}}$$

αν $|q_n| \neq 0$,

$$a^{|q_n|} = 1$$

αν $q_n = 0$, και $\pi_n = [1/|q_n|] \in \mathbb{N}$ αφού τελικά $|q_n| < 1$.

Γράφουμε $a^{1/\pi_n} = 1 + \gamma_n$ αν $|q_n| \neq 0$. Αρκεί να δείξουμε οτι $\gamma_n \to 0$ (γιατί;). Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε

$$a = (1 + \gamma_n)^{\pi_n} \geq 1 + \pi_n \gamma_n.$$

Άρα,

$$0 \leq \gamma_n < \frac{a}{\pi_n} = \frac{a}{\frac{1}{|q_n|} - 1} \to 0$$

αφού $|q_n| \to 0$. □

Η ιδέα μας για να επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x για άρρητο x είναι η εξής: οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$, επομένως αν μας δώσουν $x \notin \mathbb{Q}$ υπάρχουν (πολλές) ακολουθίες ρητών $q_n \to x$. Θα δείξουμε για μια από αυτές οτι το

$$\lim_n a^{q_n}$$

υπάρχει και θα ορίσουμε

$$a^x = \lim_n a^{q_n}.$$

Για να είναι καλός ο ορισμός, θα πρέπει αν πάρουμε μια άλλη ακολουθία ρητών αριθμών $q_n' \to x$ να ισχύει οτι υπάρχει το $\lim_n a^{q_n'}$ και

$$\lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{q_n}.$$

Αυτό θα δείχνει οτι η τιμή a^x που ορίσαμε είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας ρητών $q_n \to x$.

Θεώρημα 7.2.1 *Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $q_n, q_n' \in \mathbb{Q}$ με $\lim_n q_n = \lim_n q_n' = x$. Αν $a > 0$, τότε*

(α) τα $\lim_n a^{q_n'}$ και $\lim_n a^{q_n}$ υπάρχουν.

(β) $\lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{q_n}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι $a > 1$. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία ρητών $r_n \to x$. Έστω q ρητός με $q > x$. Τότε $a^{r_n} < a^q$, δηλαδή η a^{r_n} είναι άνω φραγμένη. Επίσης, $r_n \leq r_{n+1} \Rightarrow a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}}$, δηλαδή η (a^{r_n}) είναι αύξουσα. Έπεται οτι η a^{r_n} συγκλίνει.

Παίρνουμε τώρα οποιαδήποτε από τις (q_n), (q'_n). Έχουμε $q_n - r_n \to x - x = 0$, οπότε το Λήμμα 7.2.1 δείχνει οτι $a^{q_n - r_n} \to 1$. Τότε,

$$a^{q_n} = a^{q_n - r_n} a^{r_n} \to \lim_n a^{r_n}.$$

Ομοίως,

$$a^{q'_n} \to \lim_n a^{r_n}.$$

Έτσι παίρνουμε τα (α) και (β) ταυτόχρονα, αφού

$$\lim_n a^{q_n} = \lim_n a^{q'_n} = \lim_n a^{r_n}.$$

Το θεώρημα ισχύει κατά προφανή τρόπο όταν $a = 1$. Η περίπτωση $0 < a < 1$ είναι εντελώς ανάλογη με την περίπτωση $a > 1$ (η a^{r_n} θα είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη). □

Για κάθε $a > 0$ ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ θέτοντας

$$a^x := f_a(x) = \lim a^{q_n} \quad \text{όπου} \quad q_n \to x, q_n \in \mathbb{Q}.$$

Ο ορισμός είναι καλός σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.1. Μπορεί κανείς να αποδείξει τα εξής:

- Η $f_a(x) = a^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f'_a(x) = a^x \left(\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right) = c_a a^x.$$

- Η f_a είναι γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$.
- Η f_a είναι επί του $(0, +\infty)$.

Κατόπιν ορίζουμε την $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ως την αντίστροφη της f_a. Τέλος, ελέγχουμε οτι

$$\log'_a(x) = \frac{1}{c_a x}$$

και οτι $c_a = \ln a$ όπου $\ln = (f_a)^{-1}$. Για τις λεπτομέρειες της παραπάνω κατασκευής, βλέπε Σ. Πηχωρίδη (σελ. 113-134).

Οι ιδιότητες $a^{x+y} = a^x a^y$ και $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ελέγχονται εύκολα. Η πρώτη αποδεικνύεται μέσω του ορισμού: υπάρχουν ακολουθίες ρητών $q_n \to x$ και $p_n \to y$. Τότε $q_n + p_n \to x + y$, άρα (από την συνέχεια της a^x)

$$a^{x+y} = a^{\lim(q_n + p_n)} = \lim a^{q_n + p_n} = \lim(a^{q_n} a^{p_n}) = \lim a^{q_n} \cdot \lim a^{p_n} = a^x a^y.$$

Η δεύτερη αποδεικνύεται με βάση το γεγονός οτι η $\log_a$ είναι η αντίστροφη της a^x (άσκηση: βλέπε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.3, όπου ακολουθήσαμε την αντίστροφη πορεία).

7.3 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Δείξτε οτι $a_n \to e$.

2. Δείξτε οτι ο αριθμός e είναι άρρητος.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Δείξτε οτι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε οτι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς μη-αρνητικές συναρτήσεις και έστω $c > 0$. Υποθέτουμε οτι

$$f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε οτι

$$f(x) \leq c \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

6. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e;

7. (α) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε οτι

$$f(1) + \ldots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \ldots + f(n).$$

(β) Παίρνοντας σαν f την $\ln$ στο (α), δείξτε οτι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(γ) Δείξτε οτι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

8. Για ποιούς αριθμούς $a\in(1,+\infty)$ είναι σωστό οτι $x^a\leq a^x$ για κάθε $x>1$;

9. Για ποιούς $a>1$ και $b>0$ η εξίσωση $\log_a x=x^b$ έχει θετική λύση ως προς x;

10. (α) Δείξτε οτι $\sin x\geq\frac{2}{\pi}x$ για κάθε $x\in[0,\pi/2]$.

(β) Δείξτε οτι αν $0<t<1$, τότε
$$\lim_{R\to\infty}R^t\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin x}dx=0.$$

11. Ορίζουμε
$$f(x)=e^{x^2/2}\int_x^{\infty}e^{-t^2/2}dt,\quad x>0.$$

(α) Δείξτε οτι $0<f(x)<1/x$.

(β) Δείξτε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα.

12. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), με $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε οτι για κάθε $t\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τ.ω. $f'(\xi)=tf(\xi)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g(x)=f(x)e^{-tx}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.]