Μαθηματικός Διαγωνισμός

Ηράκλειο, 26 Ιουνίου 2000

Τα προβλήματα είναι διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά δυσκολίας.

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί x, y, z, u που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

2. Έστω c μία κλειστή καμπύλη που περικλείει ένα κυρτό σύνολο στο εσωτερικό της. Θεωρούμε δύο σημεία A και A' πάνω στην c και ένα σημείο K στο εσωτερικό της c και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AA', τέτοιο ώστε $|AK| < \frac{2}{3}|AA'|$. Δείξτε οτι υπάρχει τρίγωνο ABC, εγγεγραμμένο στην c και με μία κορυφή στο A, που έχει για κέντρο βάρους το K.

3. Πάνω σε έναν κυκλικό αυτοκινητόδρομο υπάρχουν n σταθμοί ανεφοδιασμού. Η συνολική ποσότητα βενζίνης που έχουν οι n σταθμοί είναι αρκετή ώστε ένα αυτοκίνητο να μπορεί να διαγράψει όλη την διαδρομή (δηλαδή έναν πλήρη κύκλο) με αυτήν. Θεωρούμε οτι το αυτοκίνητο μπορεί να αποθηκεύσει απεριόριστη ποσότητα βενζίνης. Δείξτε οτι υπάρχει κάποιος από τους n σταθμούς ανεφοδιασμού, τέτοιος ώστε αν το αυτοκίνητο ξεκινήσει από αυτόν θα μπορεί να επιστρέψει σε αυτόν (κινούμενο πάντα προς την ίδια κατεύθυνση).

4. Δείξτε οτι υπάρχουν σταθερές a, b, c τέτοιες ωστε αν P είναι ένα κυρτό πολύγωνο και $\rho(x, y)$ η απόσταση του τυχαίου σημείου (x, y) του επιπέδου από το εσωτερικό του P, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho(x,y)}dxdy = a + bA + cL,$$

όπου A το εμβαδόν και L η περίμετρος του P.

5. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, \ldots, 2n$. Θεωρούμε το άθροισμα

$$S = |a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{2n-1} - a_{2n}|.$$

Ποιός είναι ο μέσος όρος όλων των τιμών που παίρνει η ποσότητα S όταν $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ είναι μια οποιαδήποτε μετάθεση.

6. Έστω f η συνάρτηση $f(x) = 5x(1 - x)$ και συμβολίζουμε με f^n την σύνθεση $f \circ f \circ \ldots \circ f$ με τον εαυτό της n φορές.

1. Βρείτε το $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ για $x \in (-\infty, 0)$.

2. Βρείτε τα $\lim_{n\to\infty} f^n(0)$ και $\lim_{n\to\infty} f^n(4/5)$. Βρείτε επίσης ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να μήν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ στο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

7. (α) Πάνω σε ένα τραπέζι βρίσκονται τοποθετημένα 100 ρολόγια. Τα ρολόγια έχουν όλα την ίδια περίοδο, είναι στρογγυλά με λεπτοδείκτη, μπορούν όμως να είναι τοποθετημένα πάνω στο τραπέζι με οποιοδήποτε τρόπο. Επίσης οι διάμετροι των ρολογιών μπορούν να είναι διαφορετικές. Δείξτε ότι κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου O του τραπεζιού από τα κέντρα των ρολογιών θα είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των αποστάσεων του O από τα άκρα των λεπτοδεικτών.
(β) Αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι τα ρολόγια έχουν όλα την ίδια περίοδο, δείξτε ότι κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των αποστάσεων του O από τα άκρα των λεπτοδεικτών θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από 0.9 φορές το άθροισμα των αποστάσεων του O από τα κέντρα των ρολογιών.

8. Αν $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $f(x)$ των πολυωνύμων

$$x^n + x^{n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

τέτοιος ώστε $|f(x) - p(x)| \leq \epsilon$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε
(i) $a, b \in A$ συνεπάγεται ότι $a + b \in A$, και
(ii) δεν υπάρχει $q \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ που να διαιρεί όλα τα στοιχεία του A.
Δείξτε ότι:
(α) Υπάρχει φυσικός k και στοιχεία $x_1, \ldots, x_k$ του A τα οποία έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1.
(β) Το A περιέχει κάποιο τελικό κομμάτι του $\mathbb{N}$, δηλ., υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $\{M, M+1, M+2, \ldots\} \subseteq A$.

Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι 5 ώρες. Καλή επιτυχία.