Συναρτησιακή Ανάλυση

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Ανοιξη 2001

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Χώροι με νόρμα

§1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in X$, $a \in \mathbb{K}$.

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Ο αριθμός $\|x\|$ λέγεται *νόρμα* του διανύσματος $x \in X$. Το ζευγάρι $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας *χώρος με νόρμα*.

Στον ίδιο γραμμικό χώρο X μπορεί να θεωρήσουμε διάφορες νόρμες. Όταν μελετάμε μία συγκεκριμένη νόρμα πάνω στον X, θα γράφουμε X αντί του $(X, \|\cdot\|)$.

§2. Η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγει με φυσιολογικό τρόπο μία μετρική d στον X. Αν $x, y \in X$, ορίζουμε

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Επιπλέον, η d είναι συμβιβαστή με την γραμμική δομή του χώρου:

(α) η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(β) η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(ax, ay) = |a| d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $a \in \mathbb{K}$.

§3. Θεωρούμε γνωστή την στοιχειώδη θεωρία των μετρικών χώρων. Δίνουμε μόνο κάποιους ορισμούς για να συνεννοηθούμε για τον συμβολισμό.

Η *ανοικτή μπάλα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}.$$

Η *κλειστή μπάλα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}.$$

Η *σφαίρα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$S(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| = r\}.$$

Παρατήρηση: Από το γεγονός ότι η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές έπεται ότι

$$D(x,r) = x + D(0,r) := \{x+z : \|z\| < r\}$$

δηλαδή οι περιοχές του x προκύπτουν με μεταφορά των περιοχών του 0 κατά x. Επίσης, αν $s, r > 0$ τότε

$$D(0,sr) = sD(0,r) := \{sz : z \in D(0,r)\}.$$

Αυτό προκύπτει εύκολα από το ότι η d είναι ομογενής. Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε την ανοικτή (ή την κλειστή) μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα 1, τότε γνωρίζουμε τις περιοχές κάθε σημείου του X. Γράφουμε B_X για την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X:

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

§4. Όπως σε κάθε μετρικό χώρο, ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(x,r) \subseteq A$. Το $B \subseteq X$ λέγεται *κλειστό* αν το $X \setminus B$ είναι ανοικτό.

Αν (x_n) είναι μία ακολουθία στον X και $x \in X$, λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x ως προς τη νόρμα (*συγκλίνει ισχυρά στο* x) αν $\|x_n - x\| \to 0$. Αυτή είναι απλώς η σύγκλιση ως προς την d, επομένως ισχύει οτιδήποτε γνωρίζουμε για την σύγκλιση σε μετρικούς χώρους. Για παράδειγμα, ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο B με $x_n \to x \in X$ έπεται ότι $x \in B$.

Αν $A \subseteq X$, γράφουμε $\mathrm{int}(A)$ για το εσωτερικό, $\overline{A}$ για την κλειστή θήκη, και ∂A για το σύνορο του A. Οι ορισμοί είναι οι γνωστοί.

§5. Μία ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα

$$m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ο X λέγεται *πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) στον X συγκλίνει ισχυρά σε κάποιο $x \in X$.

Χώρος Banach είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα.

§6. Κάθε γραμμικός υπόχωρος Y ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Θεωρούμε απλώς τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον Y. Θα λέμε ότι ο Y είναι *υπόχωρος* του X, και αν είναι κλειστό υποσύνολο του X θα λέμε ότι ο Y είναι *κλειστός υπόχωρος* του X. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι ένας υπόχωρος Y ενός χώρου Banach X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν είναι κλειστός.

§7. Έστω X χώρος με νόρμα και $D \subseteq X$. Το D λέγεται *πυκνό* στον X αν $\overline{D} = X$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in D$ με $\|x - z\| < \varepsilon$.

Ο X λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subset X$ που είναι πυκνό στον X.

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $r > 0$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{int}(B(x,r)) = D(x,r), \quad \overline{D(x,r)} = B(x,r), \quad \partial D(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r).$$

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι οι απεικονίσεις
$+ : X \times X \to X$ με $(x,y) \mapsto x+y$
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ με $(a,x) \mapsto ax$
$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ με $x \mapsto \|x\|$
είναι συνεχείς (ως προς τις φυσιολογικές μετρικές σε κάθε περίπτωση).

3. Έστω X χώρος Banach και Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι ο Y είναι χώρος Banach αν και μόνο αν είναι κλειστός.

4. Έστω X γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|_1)}$.

5. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $\mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

6. Έστω $B(x_n, r_n)$ μία φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$ για κάθε n.]

7. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

8. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό, συμπαγές, συμμετρικό ως προς το 0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα δ να περιέχεται στο K. Ορίζουμε $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ ορίζεται καλά, και είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

1.2 Το θεώρημα του Baire

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, η *διάμετρος* του A ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Έχουμε $0 \leq \mathrm{diam}(A) \leq +\infty$ και η $\mathrm{diam}(A)$ είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν το A είναι φραγμένο. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

Θεώρημα 1.2.1 (Cantor) *Ο (X,d) είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με* $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, *υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

Απόδειξη: Παρατηρήστε πρώτα ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολο. Από την υπόθεση, αν $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ τότε $d(x,y) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0$, άρα $x = y$.

($\Longrightarrow$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F_n$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\mathrm{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$. Αν $m, n \geq n_0$, τότε $x_m, x_n \in F_{n_0}$. Άρα, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Ο (X,d) είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ με $x_n \to x$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n, x_{n+1}, \ldots \in F_n$, άρα $x = \lim_m x_m \in \overline{F_n} = F_n$. Έπεται ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

($\Longleftarrow$) Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Ορίζουμε $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$. Η (F_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ αν $m \geq n \geq n_0$. Άρα, $\mathrm{diam}(F_n) = \sup\{d(x_m, x_s) : m, s \geq n\} \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε, $d(x, x_n) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Άρα, $x_n \to x$. $\square$

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ είναι απαραίτητη. Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, αν όμως ορίσουμε $F_n = [n, +\infty)$ παίρνουμε μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων με κενή τομή.

Θεώρημα 1.2.2 (Baire) *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και (G_n) μία ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε, το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Για τυχόντα $x \in X$ και $r > 0$, θα δείξουμε ότι $G \cap D(x,r) \neq \emptyset$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\overline{G} = X$.

Θέτουμε $x_0 = x$, $r_0 = r$ και επαγωγικά επιλέγουμε $x_n \in X$ και $0 < r_n < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ έτσι ώστε

$$\overline{D(x_n, r_n)} \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n. \tag{1}$$

Για το πρώτο βήμα παρατηρήστε ότι το G_1 είναι ανοικτό και πυκνό, άρα το $D(x_0, r_0) \cap G_1$ είναι ανοικτό και μη κενό. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_1 \in D(x_0, r_0) \cap G_1$ και ακτίνα $0 < r_1 < 1$ έτσι ώστε $\overline{D(x_1, r_1)} \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1$.

Το επαγωγικό βήμα είναι ακριβώς το ίδιο: το $D(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$ είναι ανοικτό και μη κενό, και αν $x_{n+1} \in D(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$ μπορούμε να βρούμε ακτίνα $0 < r_{n+1} < 1/(n+1)$ έτσι ώστε $\overline{D(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq D(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$.

Η ακολουθία $(\overline{D(x_n,r_n)})$ είναι φθίνουσα λόγω της (1). Αφού $\mathrm{diam}(\overline{D(x_n,r_n)}) \leq 2r_n \to 0$, από το θεώρημα του Cantor υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D(x_n,r_n)}$. Πάλι από την (1), βλέπουμε ότι

$$x \in D(x_0,r_0) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right). \quad \square$$

Ορισμοί (α) Ένα υποσύνολο A του (X,d) λέγεται *πουθενά πυκνό* αν η κλειστή του θήκη έχει κενό εσωτερικό: $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(β) Ένα υποσύνολο B του (X,d) λέγεται *πρώτης κατηγορίας* αν γράφεται σαν ένωση αριθμήσιμων το πλήθος πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X. Σε αντίθετη περίπτωση, το B λέγεται *δευτέρας κατηγορίας*.

Με αυτήν την ορολογία έχουμε την εξής δυϊκή διατύπωση του θεωρήματος του Baire.

Θεώρημα 1.2.3 (Θεώρημα κατηγορίας του Baire) *Κάθε πλήρης μετρικός χώρος (X,d) είναι δευτέρας κατηγορίας στον εαυτό του.*

Απόδειξη: Έστω ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό στον X. Ορίζουμε $G_n = X \setminus \overline{F_n}$. Τότε,

$$\overline{G_n} = X \setminus \mathrm{int}(\overline{F_n}) = X,$$

δηλαδή κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό στον X. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα 1.2.2. $\square$

Ασκήσεις

1. Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, Y μετρικός χώρος, και $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι αν (F_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, τότε $f(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n f(F_n)$.

2. Έστω X χώρος Banach που έχει άπειρη διάσταση σαν γραμμικός χώρος. Δείξτε ότι η διάσταση του X είναι υπεραριθμήσιμη (θεωρήστε γνωστό ότι κάθε υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση είναι κλειστός).

3. Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. [*Υπόδειξη:* Σταθεροποιήστε $\varepsilon > 0$ και θεωρήστε τα σύνολα $A_m = \{x \geq 1 : |f(nx)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq m\}$.]

4. (Osgood) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))$ είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχουν $[a,b] \subseteq [0,1]$ και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\forall t \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq M.$$

(Δηλαδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$.)

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α) Θεωρούμε μία αρίθμηση I_m των ανοικτών διαστημάτων με άκρα ρητούς αριθμούς. Αν $x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\omega(x) = \inf_{x \in I_m} \{\mathrm{diam}(f(I_m))\}.$$

(παίρνουμε το inf πάνω από όλα τα διαστήματα I_m που περιέχουν το x). Δείξτε οτι $\omega(x) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x.

(β) Δείξτε ότι αν $q > 0$ ρητός, τότε το

$$\{x \in \mathbb{R} : \omega(x) < q\}$$

είναι ανοικτό σύνολο.

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής, είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(δ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας το σύνολο των σημείων συνεχείας να είναι ακριβώς το $\mathbb{Q}$.

1.3 Ανισότητες

Έστω X γραμμικός χώρος και C κυρτό υποσύνολο του X. Μία συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$

για κάθε $x, y \in C$ και $t \in (0,1)$. Η f λέγεται *γνήσια κυρτή* αν οποτεδήποτε έχουμε ισότητα στην (1) έπεται ότι $x = y$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, *γνήσια κοίλη*) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνήσια κυρτή).

Ανισότητα του Jensen *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in C$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \ldots + t_m = 1$, τότε*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i) \leq f(t_1x_1 + \ldots + t_mx_m). \tag{2}$$

Αν επιπλέον η f είναι γνήσια κοίλη, τότε ισότητα έχουμε αν και μόνο αν $x_1 = \ldots = x_m$.

Απόδειξη: Με επαγωγή ως προς m δείχνουμε ταυτόχρονα ότι $t_1x_1 + \ldots + t_mx_m \in C$ και ισχύει η (2). Για $m = 2$ αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό του κυρτού συνόλου και της κοίλης συνάρτησης.

Έστω ότι $m \geq 3$ και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει αν $k < m$. Γράφουμε

$$t_1x_1 + \ldots + t_mx_m = t_1x_1 + s\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} x_j,$$

όπου $s = t_2 + \ldots + t_m$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\sum_{j=2}^m \frac{t_j}{s} x_j \in C$ γιατί $\sum_{j=2}^m (t_j/s) = 1$. Επίσης, $t_1 + s = 1$ άρα $\sum_{j=1}^m t_j x_j \in C$. Αφού η f είναι κοίλη,

$$f\left(\sum_{j=1}^m t_j x_j\right) \geq t_1 f(x_1) + s f\left(\sum_{j=2}^m \frac{t_j}{s} x_j\right)$$

και από την επαγωγική υπόθεση,

$$f\left(\sum_{j=2}^m \frac{t_j}{s} x_j\right) \geq \sum_{j=2}^m \frac{t_j}{s} f(x_j).$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, παίρνουμε

$$f\left(\sum_{j=1}^m t_j x_j\right) \geq t_1 f(x_1) + s \sum_{j=2}^m \frac{t_j}{s} f(x_j),$$

δηλαδή το ζητούμενο. Ελέγξτε μόνοι σας την περίπτωση της γνήσια κοίλης συνάρτησης. $\square$

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνήσια κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \ldots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^m t_j \ln a_j \leq \ln(t_1 a_1 + \ldots + t_m a_m). \tag{3}$$

Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \ldots a_m^{t_m} \leq t_1 a_1 + \ldots + t_m a_m \tag{4}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \ldots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \ldots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \ldots a_m} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_m}{m}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μία άμεση συνέπεια της (4).

Ανισότητα του Young *Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $a = b$. □

Ορισμός Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*.

Ανισότητα του Hölder *Έστω* $a_1, \ldots, a_m$ *και* $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ *και* p, q *συζυγείς εκθέτες. Τότε,*

$$\left|\sum_{j=1}^m a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το δεξιό μέλος δεν μηδενίζεται, αλλιώς η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε επίσης αρχικά ότι

$$\sum_{j=1}^m |a_j|^p = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^m a_j b_j\right| &\leq \sum_{j=1}^m |a_j||b_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{|a_j|^p}{p} + \frac{|b_j|^q}{q}\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^m |a_j|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^m |b_j|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Για την γενική περίπτωση, θέτουμε $t = \left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p}$, $s = \left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{j=1}^m |a_j/t|^p = \sum_{j=1}^m |b_j/s|^q = 1$$

και εφαρμόστε την προηγούμενη ανισότητα. Εξετάστε πότε ισχύει ισότητα. □

Στην περίπτωση $p = q = 2$ παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left|\sum_{j=1}^m a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^2\right)^{1/2}.$$

Ανισότητα του Minkowski *Έστω* $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ *και* $1 \leq p < +\infty$. *Τότε,*

$$\left(\sum_{j=1}^m |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Αν $p=1$ η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Υποθέτουμε ότι $p>1$ και ότι $\sum |a_j+b_j|^p>0$ (αλλιώς, η ανισότητα είναι προφανής). Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Γράφουμε

$$\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p \leq \sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^{p-1}|a_j| + \sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^{p-1}|b_j|$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder με εκθέτες p και q για καθένα από τα δύο αθροίσματα. Παρατηρώντας ότι $q(p-1)=p$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p \quad &\leq \quad \left(\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j+b_j|^p\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}\right).$$

Διαιρώντας με $\left(\sum |a_j+b_j|^p\right)^{1/q}$ και χρησιμοποιώντας την $1-(1/q)=1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατηρήσεις

(α) Η ανισότητα του Minkowski επεκτείνεται και σε άπειρες ακολουθίες. Αν (a_j), (b_j) είναι δύο ακολουθίες στο $\mathbb{K}$ και $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p<+\infty$, $\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p<+\infty$, τότε η σειρά $\sum_{j=1}^\infty |a_j+b_j|^p$ συγκλίνει και

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |a_j+b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

(β) Οι ανισότητες Hölder και Minkowski ισχύουν και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Έστω $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $f,g:\Omega\to\mathbb{K}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και p,q συζυγείς εκθέτες.

Ανισότητα Hölder Αν οι $|f|^p$ και $|g|^q$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left|\int_\Omega fg\, d\mu\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Ανισότητα Minkowski Αν οι $|f|^p$ και $|g|^p$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε η $|f+g|^p$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Η απόδειξη της ανισότητας Hölder είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της αντίστοιχης ανισότητας για πεπερασμένες ακολουθίες. Για να δείξετε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη αρκεί το ολοκλήρωμα της $|fg|$ να είναι πεπερασμένο, κάτι που είναι συνέπεια της ανισότητας που θα δείξετε. Για να δείξετε ότι η $|f+g|^p$ είναι ολοκληρώσιμη στην ανισότητα Minkowski, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \\ &\leq [2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}]^p = 2^p \max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\} \\ &\leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p), \quad x\in\Omega. \end{aligned}$$

Κατόπιν, ακολουθήστε την απόδειξη της ανισότητας Minkowski για πεπερασμένες ακολουθίες.

Ασκήσεις

1. Έστω $a_1,\dots,a_m>0$ με $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ και $x_1,\dots,x_m>0$. Για κάθε $t\neq 0$ ορίζουμε

$$M_t(\vec{x},\vec{a}) = \left(a_1x_1^t+\dots+a_mx_m^t\right)^{1/t},$$

ενώ για $t=0$ θέτουμε

$$M_0(\vec{x},\vec{a}) = x_1^{a_1}\dots x_m^{a_m}.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} M_t(\vec{x},\vec{a}) = M_0(\vec{x},\vec{a})$$

και ότι η $M_t(\vec{x},\vec{a})$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t.

2. Με το συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι αν $x_k=\max\{x_1,\dots,x_m\}$, τότε

$$a_k^{1/t}x_k \leq M_t(\vec{x},\vec{a}) \leq x_k$$

για κάθε $t>0$. Ποιό είναι το $\lim_{t\to+\infty} M_t(\vec{x},\vec{a})$; Βρείτε το $\lim_{t\to-\infty} M_t(\vec{x},\vec{a})$. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $M_t(\vec{x},\vec{a})$.

3. Δείξτε ότι αν η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m>0$, τότε

$$(x_1+\dots+x_m)f\left(\frac{y_1+\dots+y_m}{x_1+\dots+x_m}\right) \leq \sum_{i=1}^m x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Δείξτε ότι η $f(x)=(1+x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ όταν $p\geq 1$, και συμπεράνετε ότι

$$((x_1+\dots+x_m)^p+(y_1+\dots+y_m)^p)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^m (x_i^p+y_i^p)^{1/p}.$$

1.4 Κλασικοί χώροι Banach

1. Νόρμες στον $\mathbb{K}^n$.

(α) Έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

και συμβολίζουμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ με ℓ_p^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα - η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski. Στην περίπτωση $p = 2$ παίρνουμε τον Ευκλείδειο χώρο ℓ_2^n.

(β) Αν $p = \infty$, ορίζουμε

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

και συμβολίζουμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με ℓ_∞^n. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης. Στην περίπτωση του ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, ο έλεγχος της πληρότητας μπορεί να γίνει και άμεσα.

2. Χώροι ακολουθιών

(α) Έστω $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο όλων των άπειρων ακολουθιών $x = (x_n)$ για τις οποίες $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$. Ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα (η τριγωνική ανισότητα είναι ακριβώς η ανισότητα του Minkowski). Ο χώρος που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο θα συμβολίζεται με ℓ_p.

Πρόταση 1.4.1 *Ο ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον ℓ_p. Αν $x^{(k)} = (x_n^{(k)})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p,$$

άρα η ακολουθία $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\mathbb{K}$. Επομένως, υπάρχει $x_n \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $x_n^{(k)} \to x_n$ καθώς $k \to \infty$.

Ορίζουμε $x = (x_n)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p < \varepsilon$ για κάθε $k, l \geq k_0$. Ειδικότερα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $k, l \geq k_0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|^p < \varepsilon^p.$$

Αφήνοντας το $l \to \infty$, βλέπουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $k \geq k_0$,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p.$$

Αφήνοντας τώρα το $N \to \infty$ βλέπουμε ότι $\|x^{(k)} - x\|_p \leq \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι $x^{(k)} - x \in \ell_p \Longrightarrow x \in \ell_p$ και $x^{(k)} \to x$ ισχυρά στον ℓ_p. □

(β) Στην περίπτωση $p = \infty$ μπορούμε να ορίσουμε τις εξής απειροδιάστατες γενικεύσεις του ℓ_∞^n.

(β1) Τον χώρο ℓ_∞ όλων των φραγμένων ακολουθιών, με νόρμα την

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

(β2) Τον χώρο c_0 όλων των μηδενικών ακολουθιών, με νόρμα πάλι την

$$\|x\|_0 = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον ℓ_∞. Επίσης, ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, ο ℓ_∞ είναι πλήρης (θα δείξουμε κάτι πολύ γενικότερο). Άρα, οι ℓ_∞, c_0 είναι χώροι Banach.

(γ) Οι χώροι ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ και c_0 είναι διαχωρίσιμοι. Δείχνουμε αυτόν τον ισχυρισμό για τον ℓ_p.

Πρόταση 1.4.2 *Για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο ℓ_p είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (η μιγαδική περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη). Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{y = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots) : N \in \mathbb{N}, y_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Το D είναι αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι $\overline{D} = \ell_p$. Έστω $x = (x_n) \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$.

Η σειρά $\sum_n |x_n|^p$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, N$ μπορούμε να βρούμε ρητό οσοδήποτε κοντά στον x_n. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ρητούς y_n , $n = 1, \ldots, N$ που να ικανοποιούν την

$$|x_n - y_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2N}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Προσθέτοντας, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Ορίζουμε $y = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$. Τότε, $y \in D$ και

$$\begin{aligned} \|x-y\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\ &< \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού τα $x \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, έπεται το ζητούμενο. $\square$

(δ) Ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος. Γενικά, για να δείξουμε ότι ένας μετρικός χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος χρησιμοποιούμε συνήθως τον εξής ισχυρισμό.

Λήμμα 1.4.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε $x_i, i \in I$ στον X και $a > 0$ που ικανοποιούν την*

$$\forall i, j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow d(x_i, x_j) \geq a.$$

Τότε, για κάθε πυκνό $D \subseteq X$ έχουμε $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(D)$.

Απόδειξη: Οι μπάλες $D(x_i, a/2)$, $i \in I$ είναι ξένες. Αν το D είναι πυκνό, σε κάθε $D(x_i, a/2)$ υπάρχει κάποιο $d_i \in D$. Αν $i \neq j$, τότε $d_i \neq d_j$ αφού $D(x_i, a/2) \cap D(x_j, a/2) = \emptyset$. Άρα, η $f : I \to D$ με $f(i) = d_i$ είναι ένα προς ένα. Δηλαδή, το D έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το I. $\square$

Στην περίπτωση του ℓ_∞, θεωρούμε το σύνολο $A = \{x = (x_n) : x_n \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε ακολουθία με όρους 0 ή 1 είναι φραγμένη, άρα $A \subseteq \ell_\infty$.

Παρατηρούμε ότι αν $x = (x_n), y = (y_n) \in A$ και $x \neq y$, τότε $\|x - y\|_\infty = 1$. Σύμφωνα με το λήμμα, αν D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞, τότε το D έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το A. Όμως, το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor δείχνει ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. Έπεται ότι ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

3. Χώροι φραγμένων συναρτήσεων

Έστω A τυχόν μη κενό σύνολο. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $B(A)$ όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$ με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in A\}.$$

Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα. Στην περίπτωση $A = \mathbb{N}$, ο χώρος $B(A)$ συμπίπτει με τον ℓ_∞. Παρατηρήστε ότι $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $t \in A$ να ισχύει $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $B(A)$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Πρόταση 1.4.3 *Ο $B(A)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy στον $B(A)$. Για κάθε $t \in A$ έχουμε

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

άρα η $(f_n(t))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{K}$. Επομένως, υπάρχει το $\lim_n f_n(t)$. Ορίζουμε $f : A \to \mathbb{K}$ με $f(t) = \lim_n f_n(t)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και κάθε $t \in A$ να ισχύει

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $m \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in A\} \leq \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό αποδεικνύει ταυτόχρονα ότι $f \in B(A)$ και ότι $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. $\square$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι K είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $C(K)$ ο γραμμικός χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{K}$. Θεωρούμε τον $C(K)$ σαν υπόχωρο του $B(K)$.

Πρόταση 1.4.4 *Ο $C(K)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(K)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $f_n \in C(K)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Η f_n είναι συνεχής στο συμπαγές K, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: $d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$.

Αν λοιπόν $x, y \in K$ και $d(x, y) < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| + \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η f είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο K. $\square$

Σαν πόρισμα παίρνουμε ότι ο $C(K)$ είναι χώρος Banach για κάθε συμπαγή μετρικό χώρο K. Ειδικότερα, ο $C([a, b])$ είναι χώρος Banach.

4. Χώροι L^p

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{K}$ για τις οποίες

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(\mu)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L^p(\mu)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \quad , \quad a[f] = [af].$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L^p(\mu)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L^p(\mu)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν μ-σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int_\Omega |f|^p d\mu = 0$ τότε $f = 0$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Πρόταση 1.4.5 *Ο $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy στον $L^p(\mu)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) και $f \in L^p(\mu)$ με την ιδιότητα $\|f_{k_n} - f\|_p \to 0$. Έπεται ότι $\|f_n - f\|_p \to 0$ (σε κάθε μετρικό χώρο, μιά ακολουθία Cauchy που έχει συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει).

Επιλέγουμε την (f_{k_n}) έτσι ώστε να ικανοποιείται η

$$\|f_{k_n} - f_{k_m}\|_p < \frac{1}{2^{2n}}$$

για κάθε $n < m$. Η επιλογή των k_n γίνεται ως εξής: αφού η (f_n) είναι Cauchy, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\|f_{k_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2^2}, \qquad k > k_1.$$

Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει $k_2 > k_1$ τέτοιος ώστε

$$\|f_{k_2} - f_k\|_p < \frac{1}{2^{2.2}}, \qquad k > k_2.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ έτσι ώστε

$$\|f_{k_n} - f_k\|_p < \frac{1}{2^{2n}}, \qquad k > k_n.$$

Τότε, αν $n < m$ έχουμε $k_n < k_m$, άρα $\|f_{k_n} - f_{k_m}\|_p < \frac{1}{2^{2n}}$.

Ισχυρισμός Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $f_{k_n} \to f$ μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \big\{\omega \in \Omega : |f_{k_n}(\omega) - f_{k_{n+1}}(\omega)| \ge \frac{1}{2^n}\big\}.$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{2^{np}}\mu(E_n) \le \int_\Omega |f_{k_n}(\omega) - f_{k_{n+1}}(\omega)|^p d\mu < \frac{1}{2^{2np}},$$

άρα $\mu(E_n) < 1/2^{np}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} < +\infty.$$

Θεωρούμε το $Z = \limsup E_n$. Παρατηρήστε ότι

$$\mu(Z) = \mu\left(\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \mu\left(\cup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{np}}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(Z) = 0$.

Έστω $\omega \notin Z$. Τότε, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|f_{k_n}(\omega) - f_{k_{n+1}}(\omega)| < 1/2^n$ για κάθε $n \geq m$. Δηλαδή η $(f_{k_n}(\omega))$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{K}$, επομένως συγκλίνει. Ορίζουμε $f : \Omega \to \mathbb{K}$ με $f(\omega) = \lim f_{k_n}(\omega)$ αν $\omega \notin Z$ και $f(\omega) = 0$ αλλιώς. Η f είναι μετρήσιμη και $f_{k_n} \to f$ μ-σχεδόν παντού. □

Δείχνουμε τώρα ότι $\|f_{k_n} - f\|_p \to 0$ (αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι $f \in L^p(\mu)$). Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $|f_{k_n} - f_{k_m}|^p \to |f_{k_n} - f|^p$ σχεδόν παντού καθώς $m \to \infty$, από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|f_{k_n} - f\|_p^p &= \int_\Omega |f_{k_n} - f|^p d\mu = \int_\Omega \lim_m |f_{k_n} - f_{k_m}|^p d\mu \\
&\leq \liminf_m \int_\Omega |f_{k_n} - f_{k_m}|^p d\mu \\
&= \liminf_m \|f_{k_n} - f_{k_m}\|_p^p \leq \frac{1}{2^{2np}}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\|f_{k_n} - f\|_p^p \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Ο $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ορίζεται ως εξής: αν $f : \Omega \to \mathbb{K}$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση, ορίζουμε το *ουσιώδες άνω φράγμα* της f από την

$$\text{esssup}(f) = \inf\{t > 0 : \mu(\{\omega : |f(\omega)| > t\}) = 0\}.$$

Το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων f για τις οποίες $\text{esssup}(f) < +\infty$ είναι γραμμικός χώρος. Όπως πρίν, ταυτίζουμε τις f και g αν $f = g$ σχεδόν παντού και θεωρούμε τον χώρο $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ των κλάσεων ισοδυναμίας, με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \text{esssup}(f).$$

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα και ο $L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Banach.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις νόρμες $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$ και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{(1/p)-(1/q)} \|x\|_q.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $p > N$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_\infty.$$

2. Δείξτε ότι ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος, ενώ ο $B[a, b]$ όχι.

3. Θα γράφουμε $L^p[0, 1]$ για τον $L^p(\lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0, 1]$.
(α) Δείξτε ότι ο $L^\infty[0, 1]$ είναι χώρος Banach.

(β) Αν $f \in L^\infty[0,1]$, δείξτε ότι $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ καθώς $p \to \infty$.

(γ) Εξετάστε αν ο $L^\infty[0,1]$ είναι διαχωρίσιμος.

4. Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι αν $x \in \ell_p$ τότε $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ και αν $f \in L^q[0,1]$ τότε $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Ειδικότερα, $\ell_p \subseteq \ell_q$ και $L^q[0,1] \subseteq L^p[0,1]$.

5. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n, f \in L^p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ αν και μόνο αν $\|f_n - f\|_p \to 0$.

6. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n \in L^p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $f \in L^p[0,1]$ και $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq [0,1]$ με $\lambda(A) < \delta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$\int_A |f_n|^p dt < \varepsilon.$$

7. Έστω $C^k[0,1]$ ο χώρος όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν k συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{0 \leq s \leq k} \left(\max\{|f^s(t)| : t \in [0,1]\}\right).$$

Δείξτε ότι ο $C^k[0,1]$ είναι χώρος Banach.

8. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\Big\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV([0,1])$ όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV([0,1])$ και ότι ο $(BV([0,1]), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

9. Θεωρούμε τον χώρο $C([0,1])$ με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $0 \leq a < b \leq 1$, το σύνολο $F_{a,b} = \{f \in C[0,1] :$ η f είναι αύξουσα στο $[a,b]\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C([0,1])$ και έχει κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε το «αύξουσα» με «φθίνουσα».

(β) Δείξτε ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που δεν είναι μονότονες σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$ είναι πυκνό στον $C([0,1])$.

10. Έστω $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Δείξτε ότι η απόσταση του x από τον c_0 είναι ίση με

$$d(x, c_0) = \limsup_n |x_n|.$$

11. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με την ιδιότητα ο υπόχωρος $\mathrm{span}(A)$ να είναι πυκνός στον X. Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

12. Έστω $1 \leq p < +\infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$,

$$\sum_{k=n}^\infty |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

1.5 Πλήρωση

§1. Στις ασκήσεις είδαμε ότι ένας χώρος με νόρμα που έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση δεν μπορεί να είναι πλήρης. Τυπικά παραδείγματα είναι τα εξής.

(α) Ο χώρος c_{00} όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών: $x = (x_n) \in c_{00}$ αν υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n = 0$ για κάθε $n \geq N$. Η ακολουθία $e^{(k)}$ όπου $e_n^{(k)} = \delta_{kn}$ είναι βάση του c_{00}. Ο c_{00} είναι υπόχωρος οποιουδήποτε ℓ_p αλλά δεν είναι χώρος Banach με καμμία από τις νόρμες $\|\cdot\|_p$.

(β) Ο χώρος $P[a,b]$ τών πολυωνύμων $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι υπόχωρος του $L^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$ και του $C[a,b]$, δεν είναι όμως χώρος Banach με καμμία από αυτές τις νόρμες: η ακολουθία $\{1, t, t^2, \ldots\}$ είναι βάση του $P[a,b]$, άρα ο $P[a,b]$ έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση.

§2. Ένας γραμμικός χώρος μπορεί να είναι χώρος Banach με κάποια νόρμα, αλλά να μην είναι πλήρης ως προς κάποια άλλη νόρμα. Παραδείγματα:

(γ) Θεωρούμε τον χώρο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (ο οποίος είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$) με νόρμα την

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Για κάθε $n \geq 3$ ορίζουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Αν $n < m$ τότε $\|f_n - f_m\|_1 \leq 1/n$, άρα η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|_1$. Όμως, δεν υπάρχει συνεχής $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Αν υπήρχε τέτοια f, θα έπρεπε να παίρνει την τιμή 1 στο $[1/2, 1]$ και την τιμή 0 στο $[0, 1/2)$ (άσκηση).

(δ) Θεωρούμε τον χώρο c_0 των μηδενικών ακολουθιών, με νόρμα την

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}.$$

Η ακολουθία $(x^{(k)})$ με $x^{(k)} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (k μονάδες και μετά μηδενικά) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|$, αν όμως υπήρχε $x \in c_0$ με $x^{(k)} \to x$, θα έπρεπε να ισχύει $x_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (άσκηση).

§3. Κάθε χώρος με νόρμα X «εμφυτεύεται» ισομετρικά και πυκνά σε έναν χώρο Banach. Η διαδικασία αυτή λέγεται *πλήρωση*.

Ορισμός Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|')$ λέγεται *πλήρωση* του X αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tau : X \to \tilde{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η τ είναι *ισομετρία*, δηλαδή $\|\tau(x)\|' = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

(β) ο $\tau(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.

Πρόταση 1.5.1 *Κάθε χώρος με νόρμα έχει μία πλήρωση.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $[X]$ όλων των ακολουθιών Cauchy (x_n) στον X. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[X]$, θέτοντας

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Το σύνολο $\tilde{X}$ των κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται γραμμικός χώρος ως εξής: αν x^*, y^* είναι οι κλάσεις στις οποίες ανήκουν οι ακολουθίες Cauchy (x_n), (y_n) αντίστοιχα, ορίζουμε $x^* + y^*$ την κλάση της ακολουθίας Cauchy $(x_n + y_n)$ και $a \cdot x^*$, $a \in \mathbb{K}$, την κλάση της (ax_n). Ελέγξτε ότι οι πράξεις ορίζονται καλά και ότι ο $(\tilde{X}, +, \cdot)$ είναι γραμμικός χώρος.

Ορίζουμε νόρμα στον $\tilde{X}$ ως εξής: αν $x^* \in \tilde{X}$ και (x_n) μία ακολουθία Cauchy στην κλάση x^*, θέτουμε

$$\|x^*\|' = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Το όριο αυτό υπάρχει γιατί η ακολουθία $(\|x_n\|)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ακολουθίας Cauchy (x_n) στην x^*. Ελέγξτε τα παραπάνω, καθώς και το ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα.

Τέλος, θεωρούμε την απεικόνιση $\tau : X \to \tilde{X}$, όπου $\tau(x)$ είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(x, x, \ldots, x, \ldots)$. Η τ είναι γραμμική απεικόνιση και $\|\tau(x)\|' = \lim_n \|x\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, ο X εμφυτεύεται «ισομετρικά» στον $\tilde{X}$.

Ισχυρισμός: Ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$.

Απόδειξη: Έστω $x^* \in \tilde{X}$ και (x_n) ακολουθία Cauchy στην κλάση x^*. Τότε,

$$\lim_n \|x^* - \tau(x_n)\|' = \lim_n \lim_m \|x_m - x_n\| = 0,$$

δηλαδή $\tau(x_n) \to x^*$. Αφού το x^* ήταν τυχόν και $\tau(x_n) \in \tau(X)$, ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. □

Μένει να δείξουμε ότι ο $\tilde{X}$ είναι πλήρης. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό επιχείρημα.

Λήμμα 1.5.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και M πυκνό υποσύνολο του X με την ιδιότητα: κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του M συγκλίνει σε στοιχείο του X. Τότε, ο X είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Μπορούμε να βρούμε $m_n \in M$ με $d(x_n, m_n) < 1/n$. Τότε, η (m_n) είναι Cauchy άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $m_n \to x$. Αφού $d(x_n, x) \leq d(x_n, m_n) + d(m_n, x) < 1/n + d(m_n, x)$, βλέπουμε ότι $x_n \to x$. □

Έχουμε ήδη δεί ότι ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. Επίσης, η $(\tau(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν η (x_n) είναι Cauchy, και τότε $\tau(x_n) \to x^* \in \tilde{X}$, όπου x^* η κλάση της (x_n). Σύμφωνα με το Λήμμα, ο $\tilde{X}$ είναι πλήρης. □

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι ο χώρος $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$ δεν είναι πλήρης.

2. Δείξτε ότι ο χώρος c_0 των μηδενικών ακολουθιών με νόρμα την

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{2^n}$$

δεν είναι πλήρης.

3. Δείξτε ότι η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα X είναι μοναδική. Αν X' είναι μία άλλη πλήρωση του X και τ' η ισομετρική εμφύτευση του X στον X', τότε υπάρχει ισομετρία επί $\Phi:\tilde{X}\to X'$ τέτοια ώστε $\Phi(\tau(x))=\tau'(x)$ για κάθε $x\in X$.

Κεφάλαιο 2

Φραγμένοι τελεστές

2.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Μία απεικόνιση $T : X \to Y$ λέγεται *γραμμικός τελεστής* αν

$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Η *εικόνα* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) : x \in X\}$ και ο *πυρήνας* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$. Ο T είναι *γραμμικός ισομορφισμός* αν είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή αν $\mathrm{Im}(T) = Y$ και $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Από την γραμμικότητα του T και τις ιδιότητες της νόρμας έπεται ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής:

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) ο T είναι συνεχής απεικόνιση.

(β) ο T είναι συνεχής στο 0.

(γ) ο T είναι φραγμένος.

Απόδειξη: Αν ο T είναι συνεχής, τότε είναι συνεχής και στο 0.

Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο 0. Για $\varepsilon = 1 > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x)\| \leq 1.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε, $\|(\delta/2\|x\|)x\| \leq \delta$ άρα $\|T((\delta/2\|x\|)x)\| \leq 1$. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$, όπου $M = 2/\delta$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος και δείχνουμε ότι είναι συνεχής. Υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/M$. Τότε, αν $\|x - x_0\| < \delta$ έχουμε

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\| \leq M\delta = \varepsilon. \quad \square$$

Συμβολίζουμε με $B(X, Y)$ το σύνολο τών φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$. Ο $B(X, Y)$ είναι γραμμικός χώρος. Ορίζουμε μία νόρμα στον $B(X, Y)$ ως εξής: αν $T \in B(X, Y)$ θέτουμε

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \ \forall x \in X, \ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, το σύνολο στον ορισμό είναι μη κενό, άρα η $\|T\|$ ορίζεται καλά. Παρατηρούμε επίσης ότι το inf είναι στην πραγματικότητα min. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \quad x \in X.$$

Αυτό φαίνεται ως εξής: παίρνουμε φθίνουσα ακολουθία $M_n \to \|T\|$ με την ιδιότητα

$$\|T(x)\| \leq M_n\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\|T(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} M_n\|x\| = \|T\| \cdot \|x\|.$$

Πρόταση 2.1.1 *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Απόδειξη: Δείχνουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Έστω $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Αν $\|x\| \leq 1$, τότε $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|$. Άρα, $A \leq \|T\|$.

Αντίστροφα, αν $x \neq 0$ τότε $\|(x/\|x\|)\| \leq 1$ άρα

$$\|T(x/\|x\|)\| \leq A \Longrightarrow \|T(x)\| \leq A\|x\|.$$

Από τον ορισμό της $\|T\|$ παίρνουμε $\|T\| \leq A$. $\square$

Πρόταση 2.1.2 *Η απεικόνιση $\|\cdot\| : B(X, Y) \to \mathbb{R}^+$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη: (α) Προφανώς $\|T\| \geq 0$ για κάθε $T \in B(X, Y)$. Αν $\|T\| = 0$, τότε $\|T(x)\| \leq 0 \cdot \|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, οπότε $T(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα, $T = 0$.
(β) Αν $a \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X, Y)$, τότε

$$\begin{aligned} \|aT\| &= \sup\{\|aT(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|a| \cdot \|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= |a| \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = |a| \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

(γ) Αν $T, S \in B(X, Y)$ και $x \in X$, τότε

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x)\| &= \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| + \|S\| \cdot \|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \end{aligned}$$

άρα $T + S \in B(X, Y)$ και $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$. $\square$

Πρόταση 2.1.3 *Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Τότε, ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ αν $n, m \geq n_0$.

Τότε, αν $x \in X$ και $n, m \geq n_0$, έχουμε $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Αυτό δείχνει ότι η $(T_n(x))$ είναι Cauchy στον Y και αφού ο Y είναι πλήρης υπάρχει $y_x \in Y$ με $T_n(x) \to y_x$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = y_x = \lim_n T_n(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Θα δείξουμε ταυτόχρονα ότι $T \in B(X,Y)$ και $\|T - T_n\| \to 0$. Για κάθε $x \in X$ και $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|T(x) - T_n(x)\| &= \|\lim_n (T_m(x) - T_n(x))\| = \lim_n \|T_m(x) - T_n(x)\| \\ &\leq \limsup_n \|T_m - T_n\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon\|x\|. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $(T - T_n) \in B(X,Y)$, άρα $T = (T - T_n) + T_n \in B(X,Y)$. Επίσης, $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|T - T_n\| \to 0$. □

Παρατήρηση: Αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα και αν $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$, τότε

$$\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|T(x)\| \leq (\|S\| \cdot \|T\|)\|x\|,$$

άρα $S \circ T \in B(X,Z)$ και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. Ειδικότερα, αν $T \in B(X,X)$ τότε $T^m \in B(X,X)$ για κάθε m και $\|T^m\| \leq \|T\|^m$.

Ορισμός Κάθε γραμμικός τελεστής $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *γραμμικό συναρτησοειδές*. Ο χώρος $B(X, \mathbb{K})$ όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *δυϊκός χώρος* του X και συμβολίζεται με X^*.

Αφού ο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 2.1.4 *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός χώρος X^* του X είναι χώρος Banach με νόρμα την*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}. \qquad \square$$

Αν X είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε $X^* \neq \emptyset$. Το συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$ με $f(x) = 0$, $x \in K$ είναι φραγμένο.

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα X μπορούμε να ορίσουμε ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ως εξής: θεωρούμε ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων x_n με $\|x_n\| = 1$, την οποία επεκτείνουμε σε βάση του X προσθέτοντας ένα σύνολο διανυσμάτων $\{z_i : i \in I\}$. Ορίζουμε $f(x_n) = n$ και $f(z_i) = 0$, $i \in I$, και επεκτείνουμε γραμμικά. Έτσι παίρνουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές f για το οποίο

$$\sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\} \geq \sup\{|f(x_n)| : n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Το ερώτημα «πόσο πλούσιος είναι ο δυϊκός χώρος» θα μας απασχολήσει αργότερα. Θα δούμε (θεώρημα Hahn-Banach) ότι ο X^* περιέχει πάντα πολλά συναρτησοειδή.

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι αυτό δεν είναι γενικά σωστό για «γραμμικούς μετρικούς χώρους».

Ο χώρος $L^p[0,1]$, $0<p<1$.

Έστω $0<p<1$. Με $L^p[0,1]$ συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας (ταυτίζουμε δύο συναρτήσεις αν είναι σχεδόν παντού ίσες) των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες

$$\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda < +\infty.$$

Αν $f,g\in L^p[0,1]$, ορίζουμε

$$d(f,g) = \int_{[0,1]} |f-g|^p d\lambda.$$

Η d είναι μετρική. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad a,b\geq 0, \quad 0<p<1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές και ότι οι πράξεις του γραμμικού χώρου είναι συνεχείς ως προς την d. Επίσης, μιμούμενοι την απόδειξη της πληρότητας του $L^p(\mu)$, $p\geq 1$, μπορείτε να δείξετε ότι ο $(L^p[0,1],d)$, $0<p<1$ είναι πλήρης.

Θα εξετάσουμε την ύπαρξη συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $F: L^p[0,1]\to\mathbb{R}$.

Λήμμα 2.1.1 *Έστω G μη κενό, ανοιχτό και κυρτό υποσύνολο του $L^p[0,1]$. Τότε, $G=L^p[0,1]$.*

Απόδειξη: Αφού η μετρική d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $0\in G$. Αφού το G είναι ανοιχτό και $0\in G$, υπάρχει $R>0$ με την ιδιότητα

$$\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda < R \Longrightarrow f\in G.$$

Έστω $g\in L^p[0,1]$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε διαμέριση $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ τέτοια ώστε

$$\int_{[x_i,x_{i+1}]} |g|^p d\lambda = \frac{1}{n}\int_{[0,1]} |g|^p d\lambda, \quad i=0,\ldots,n-1.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = ng\chi_{[x_i,x_{i+1}]}, \qquad i=0,\ldots,n-1.$$

Τότε, $g=(g_1+\ldots+g_n)/n$ και

$$\int_{[0,1]} |g_i|^p d\lambda = n^p \int_{[x_i,x_{i+1}]} |g|^p d\lambda = \frac{1}{n^{1-p}}\int_{[0,1]} |g|^p d\lambda.$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο πετυχαίνουμε $g_i \in G$ για κάθε i: αρκεί να επιλέξουμε n για το οποίο

$$\int_{[0,1]} |g|^p d\lambda \leq n^{1-p} R.$$

Αφού το G είναι κυρτό, βλέπουμε ότι

$$g = \frac{g_1 + \ldots + g_n}{n} \in G,$$

και αφού η g ήταν τυχούσα, $G = L^p[0,1]$. $\square$

Πρόταση 2.1.5 *Αν $0 < p < 1$ και $F : L^p[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $F \equiv 0$.*

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $G_\varepsilon = \{f \in L^p[0,1] : |F(f)| < \varepsilon\}$ είναι ανοιχτό, κυρτό και μη κενό γιατί $F(0) = 0$. Από το Λήμμα, $G_\varepsilon = L^p[0,1]$. Δηλαδή,

$$\forall f \in L^p[0,1] \;\; \forall \varepsilon > 0, \quad |F(f)| < \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι $F(f) = 0$ για κάθε $f \in L^p[0,1]$. Δηλαδή, $F \equiv 0$. $\square$

Παραδείγματα τελεστών και συναρτησοειδών

(α) Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε $R, L : \ell_p \to \ell_p$ με

$$R(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots), \quad L(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Ο R (δεξιά μετατόπιση) και ο L (αριστερή μετατόπιση) είναι γραμμικοί τελεστές. Ο R είναι ένα προς ένα αλλά όχι επί, ενώ ο L είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα. Ακόμα, $\|R\| = \|L\| = 1$ και $L \circ R = Id$, ενώ $R \circ L \neq Id$ και $\mathrm{Ker}(R \circ L) = \{x \in \ell_p : x_n = 0, n \geq 2\}$.

(β) Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Για σταθερό $y \in \ell_q$ ορίζουμε $f_y : \ell_p \to \mathbb{K}$ με

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Από την ανισότητα του Hölder έπεται ότι για κάθε $x \in \ell_p$ η σειρά $\sum_n x_n y_n$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f_y(x)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\Big| \leq \|y\|_q \|x\|_p.$$

Άρα $f_y \in \ell_p^*$ και $\|f_y\| \leq \|y\|_q$ (η γραμμικότητα του f_y είναι φανερή).

(γ) Τελείως ανάλογα, αν p και q είναι συζυγείς εκθέτες και $g \in L^q(\mu)$, ορίζουμε $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ με

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f g d\mu.$$

Τότε, $\phi_g \in (L^p(\mu))^*$ και $\|\phi_g\| \leq \|g\|_{L^q(\mu)}$.
(δ) Έστω $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{K}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Τότε, $\delta_t \in (C[0,1])^*$ και $\|\delta_t\| = 1$.

(ε) Έστω X, Y συμπαγείς μετρικοί χώροι και $\tau : Y \to X$ συνεχής. Ορίζουμε $A : C(X) \to C(Y)$ με $(Af)(y) = f(\tau(y))$. Τότε, $A \in B(C(X), C(Y))$ και $\|A\| = 1$.

(ζ) Έστω $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| d\lambda(y) \leq c_1, \quad x - (a.e)$$

$$\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| d\lambda(x) \leq c_2, \quad y - (a.e)$$

όπου c_1, c_2 θετικές απόλυτες σταθερές. Για κάθε $1 \leq p < +\infty$ ορίζουμε $T : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ με

$$(Tf)(x) = \int_{[0,1]} \kappa(x,y) f(y) d\lambda(y).$$

Θα δείξουμε ταυτόχρονα ότι η $(Tf)(x)$ ορίζεται καλά $x - (a.e)$ και ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής. Έχουμε

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &= \Big|\int_{[0,1]} \kappa(x,y) f(y) d\lambda(y)\Big| \leq \int_{[0,1]} |\kappa(x,y)|^{1/q} |\kappa(x,y)|^{1/p} |f(y)| d\lambda(y) \\
&\leq \left(\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| d\lambda(y)\right)^{1/q} \left(\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y)\right)^{1/p} \\
&\leq c_1^{1/q} \left(\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y)\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_{[0,1]} |(Tf)(x)|^p dx \leq c_1^{p/q} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y) d\lambda(x) \\
&= c_1^{p/q} \int_{[0,1]} |f(y)|^p \left(\int_{[0,1]} |\kappa(x,y)| d\lambda(x)\right) d\lambda(y) \\
&\leq c_1^{p/q} c_2 \int_{[0,1]} |f(y)|^p d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|Tf\|_p \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p} \|f\|_p$.
(η) Έστω X ο υπόχωρος του $C[0,1]$ που αποτελείται από τις συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε $D : X \to C[0,1]$ με $Df = f'$. Ο D είναι ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής (άσκηση).

Ισομορφισμοί, ισομετρίες, ισοδύναμες νόρμες

(α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (δηλ. ένα προς ένα και επί) και οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός, υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ τέτοιοι ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{M_2}\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M_1\|x\|, \quad x \in X.$$

Αντίστροφα αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε να ισχύει η $(*)$, τότε ο T είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα.

Λέμε ότι δύο χώροι με νόρμα X και Y είναι *ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$. Οι X και Y λέγονται *ισομετρικά ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad x \in X.$$

Ένας τέτοιος ισομορφισμός λέγεται *ισομετρία*. Παρατηρήστε ότι κάθε ισομετρία διατηρεί τις αποστάσεις: αν $x_1, x_2 \in X$, τότε $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$. Επομένως, δύο ισομετρικά ισομορφικοί χώροι «ταυτίζονται» τόσο σαν γραμμικοί όσο και σαν μετρικοί χώροι.

(β) Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ πάνω στον ίδιο γραμμικό χώρο X λέγονται *ισοδύναμες* αν η ταυτοτική απεικόνιση $Id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ είναι ισομορφισμός. Ισοδύναμα, αν υπάρχουν θετικές σταθερές a, b τέτοιες ώστε

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήσεις 1. Ο ισομορφισμός χώρων με νόρμα και η ισοδυναμία νορμών είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

2. Αν ένας χώρος με νόρμα είναι πλήρης, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε ισοδύναμη νόρμα.

3. Αν $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι δύο ισοδύναμες νόρμες, τότε η ανισότητα $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, $x \in X$, είναι ισοδύναμη με την $aB_2 \subseteq B_1 \subseteq bB_2$, όπου B_i η μοναδιαία μπάλα του $(X, \|\cdot\|_i)$.

Ασκήσεις

1. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{m\to\infty}\left\| x - \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| = 0.$$

Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι πλήρης.

(β) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.

2. Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X,X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty}\|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με

$$S_y(x) = y + T(x).$$

Δείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

3. Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t)f(s)ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$. [*Υπόδειξη:* Αν $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leq s,t \leq 1\}$ και $T : C[0,1] \to C[0,1]$ ο τελεστής που ορίζεται από την

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t)f(s)ds,$$

δείξτε ότι $\|T^n\| \leq M^n/n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

4. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: αν (x_n) ακολουθία στον X με $\|x_n\| \to 0$, τότε η $(T(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

5. Δείξτε ότι ο ℓ_p είναι ισομετρικά ισομορφικός με έναν υπόχωρο του $L_p[0,1]$ για κάθε $p \geq 1$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τον υπόχωρο του $L_p[0,1]$ που παράγεται από τις $f_n = (n(n+1))^{1/p}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.]

6. Στον c_{00} ορίστε νόρμα $\|\cdot\|$ με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$, αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισομορφικοί. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_{00} \to c_{00}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ είναι νόρμα στον c_{00}.]

7. Αν X είναι ένας χώρος με νόρμα και $f \in X^*$, είδαμε ότι

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι μπορεί να συμβεί $|f(x)| < \|f\|$ για κάθε $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή, το sup δεν είναι πάντα max. [*Υπόδειξη:* $c_0^* \simeq \ell_1$.]

8. Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i,j. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε i,j,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}p_i \leq bp_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}p_j \leq cp_i.$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από την

$$T((\xi_i)_i) = (\sum_{j=1}^{\infty} \xi_i a_{ij})_i$$

είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.

9. Αν $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\Big| \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \Big| \leq \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2.$$

Αυτή είναι η ανισότητα του Hilbert. Θα χρειαστείτε το κριτήριο του Schur, και την

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.$$

2.2 Κλασικοί δυϊκοί χώροι

Θεώρημα 2.2.1 *Ο δυϊκός χώρος του ℓ_p, $1 < p < \infty$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη: Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν $y \in \ell_q$, η απεικόνιση $f_y : \ell_p \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leq \|y\|_q$.

Ορίζουμε $T : \ell_q \to \ell_p^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_q$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = |y_k|^{q-1}\text{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε,

$$\|x(N)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \right)^{1/p}$$

και

$$f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^{N} |y_k|^q,$$

οπότε

$$\|f_y\| \geq \frac{f_y(x(N))}{\|x(N)\|_p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geq \|y\|_q$, άρα

$$\|T(y)\|_{\ell_p^*} = \|f_y\| = \|y\|_q.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in \ell_p^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_q$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$).

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = |y_k|^{q-1}\text{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε,

$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^{N} |y_k|^{q-1}\text{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} |y_k|^q$$

και

$$\|x(N)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q\right)^{1/p}$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q = |f(x(N))| \leq \|f\| \cdot \|x(N)\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q\right)^{1/p},$$

δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \leq \|f\|^q$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_q$ και $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y. Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\text{span}\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον ℓ_p και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον ℓ_p. $\square$

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$ και $1 < p < \infty$. Ο δυϊκός χώρος του $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^q(\mu)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη: Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι για κάθε $g \in L^q(\mu)$, η απεικόνιση $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ με

$$\phi_g(f) = \int_\Omega fg d\mu$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|\phi_g\| \leq \|g\|_q$. Ορίζουμε $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ με $T(g) = \phi_g$.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι ισομετρία. Έστω $g \in L^q(\mu)$, $g \neq 0$. Ορίζουμε f με $f(\omega) = |g(\omega)|^{q-1}\text{sign}(g(\omega))$. Τότε, $f \in L^p(\mu)$ και

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |g|^q d\mu.$$

Επομένως,

$$\|T(g)\| = \|\phi_g\| \geq \frac{|\phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $\phi : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ με

$$\nu(A) = \phi(\chi_A).$$

Η ν ορίζεται καλά γιατί $\chi_A \in L^p(\mu)$ (αφού $\mu(\Omega) < \infty$). Επίσης, η ν είναι μέτρο: από την γραμμικότητα του ϕ έπεται ότι η ν είναι πεπερασμένα προσθετική, και αν (A_n) είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_n A_n = \emptyset$, τότε

$$|\nu(A_n)| \leq \|\phi\| \cdot \|\chi_{A_n}\|_p = \|\phi\| \left(\mu(A_n)\right)^{1/p} \to 0.$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$, δηλαδή το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει μ-μετρήσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$\phi(\chi_A) = \nu(A) = \int_A g d\mu = \int_\Omega \chi_A g d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\phi(f) = \int_\Omega f g d\mu$$

για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση f. Θα δείξουμε ότι $g \in L^q(\mu)$. Θεωρούμε μία ακολουθία από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις h_k με $0 \leq h_k \nearrow |g|^q$ και θέτουμε $g_k = h_k^{1/p} \mathrm{sign} g$. Τότε, $\|g_k\|_p^p = \|h_k\|_1$ και

$$\left| \int_\Omega g_k g \right| = |\phi(g_k)| \leq \|\phi\| \cdot \|g_k\|_p,$$

άρα

$$\left| \int_\Omega g_k g d\mu \right| \leq \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p}.$$

Από την άλλη πλευρά, $g_k g = h_k^{1/p}|g| \geq h_k^{1/p} h_k^{1/q} = h_k$. Άρα,

$$\|h_k\|_1 \leq \left| \int_\Omega g_k g d\mu \right| \leq \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p},$$

το οποίο δίνει $\|h_k\|_1 \leq \|\phi\|^q$. Παίρνοντας $k \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, βλέπουμε ότι

$$\int_\Omega |g|^q d\mu = \lim_k \int_\Omega h_k d\mu \leq \|\phi\|^q.$$

Αυτό δείχνει ότι $g \in L^q(\mu)$. Τώρα, τα ϕ_g και ϕ συμφωνούν στις απλές συναρτήσεις οι οποίες είναι πυκνές στον $L^p(\mu)$. Λόγω συνέχειας, $T(g) = \phi_g \equiv \phi$, δηλαδή ο T είναι ισομετρία επί. $\square$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_1.

2. Δείξτε ότι ο ℓ_1^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞.

3. (α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισομορφικοί. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την απεικόνιση $T : c \to c_0$ που ορίζεται ως εξής: αν $x = (a_n)$ με $a_n \to a$, τότε $T(x) = (a, a_1 - a, a_2 - a, \ldots)$.]

(β) Δείξτε ότι οι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισομορφικοί. [*Υπόδειξη:* Αν $S; c_0 \to c$ είναι ισομετρία επί, παρατηρήστε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $S(e_n) \notin c_0$.]

(γ) Δείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_1.

2.3 Χώρος πηλίκο

Έστω X χώρος με νόρμα και Z ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον X ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in Z.$$

Ο χώρος πηλίκο X/Z είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + Z$, το οποίο γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[x] + [y] = [x + y] \quad , \quad a[x] = [ax].$$

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι η κλάση $[0] = Z$.

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X. Ορίζουμε μία συνάρτηση $\|\cdot\|_0 : X/Z \to \mathbb{R}^+$ μέσω της

$$\|[x]\|_0 = \inf\{\|y\| : y \sim x\} = \inf\{\|x + z\| : z \in Z\}.$$

Πρόταση 2.3.1 *Αν ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X, τότε η $\|\cdot\|_0$ είναι νόρμα στον X/Z.*

Απόδειξη: (α) Προφανώς $\|[x]\|_0 \geq 0$, και αν $\|[x]\|_0 = 0$ τότε υπάρχουν $z_n \in Z$ τέτοια ώστε $\|x + z_n\| \to 0$. Δηλαδή,

$$x = \lim_n (-z_n) \in \overline{Z} = Z$$

αφού ο Z είναι κλειστός. Όμως αυτό σημαίνει ότι $[x] = [0]$.

Αντίστροφα, $\|[0]\|_0 = \inf\{\|z\| : z \in Z\} = 0$, αφού ο Z είναι υπόχωρος.

(β) Αν $a \neq 0$, χρησιμοποιώντας την $aZ = Z$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|a[x]\|_0 = \|[ax]\|_0 &= \inf\{\|ax + z\| : z \in Z\} = \inf\{\|ax + az\| : z \in Z\} \\ &= \inf\{|a|\|x + z\| : z \in Z\} = |a|\|[x]\|_0. \end{aligned}$$

(γ) Ομοίως, αφού $Z + Z = Z$,

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\|_0 = \|[x + y]\|_0 &= \inf\{\|x + y = z\| : z \in Z\} \\ &= \inf\{\|x + y + z_1 + z_2\| : z_1, z_2 \in Z\} \\ &\leq \inf\{\|x + z_1\| + \|y + z_2\| : z_1, z_2 \in Z\} \\ &= \inf\{\|x + z_1\| : z_1 \in Z\} + \inf\{\|y + z_2\| : z_2 \in Z\} \\ &= \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0. \quad \square \end{aligned}$$

Ο χώρος $(X/Z, \|\cdot\|_0)$ λέγεται *χώρος πηλίκο* του X (με τον Z). Ο ορισμός της $\|\cdot\|_0$ δικαιολογείται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3.2 *Η φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Z$ με $Q(x) = [x]$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|Q\| \leq 1$.*

Απόδειξη: Η γραμμικότητα του Q ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$\|Q(x)\| = \|[x]\|_0 = \inf\{\|x+z\| : z \in Z\} \leq \|x\|.$$

Άρα, $\|Q\| \leq 1$. □

Πρόταση 2.3.3 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T \in B(X,Y)$ και $Z = \mathrm{Ker}(T)$. Ορίζουμε $T_0 : X/Z \to Y$ με $T_0([x]) = T(x)$. Τότε, ο T_0 είναι ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T_0\| = \|T\|$.*

Απόδειξη: Ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X γιατί ο T είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση. Άρα, ο X/Z ορίζεται καλά. Επίσης, αφού $Z = \mathrm{Ker}(T)$ έχουμε

$$[x] = [x_1] \Longrightarrow x - x_1 \in \mathrm{Ker}(T) \Longrightarrow T(x) = T(x_1),$$

δηλαδή ο T_0 ορίζεται καλά. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T_0 είναι ένα προς ένα, γραμμικός τελεστής. Επίσης, αν $x \in X$ τότε

$$\|T_0([x])\| = \|T_0[x+z]\| = \|T(x+z)\| \leq \|T\| \cdot \|x+z\|$$

για κάθε $z \in Z$, άρα

$$\|T_0([x])\| \leq \|T\| \cdot \|[x]\|_0.$$

Δηλαδή, ο T_0 είναι φραγμένος και $\|T_0\| \leq \|T\|$.

Έστω $0 < \varepsilon < \|T\|$ και $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $\|T(x)\| > \|T\| - \varepsilon$. Τότε, $\|T_0([x])\| = \|T(x)\| > \|T\| - \varepsilon$ και $\|[x]\|_0 \leq \|x\| = 1$. Άρα,

$$\|T_0\| \geq \frac{\|T_0([x])\|}{\|[x]\|_0} > \|T\| - \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|T_0\| \geq \|T\|$. Δηλαδή, $\|T_0\| = \|T\|$. □

Πρόταση 2.3.4 *Έστω X χώρος Banach και Z κλειστός υπόχωρος του X. Τότε, ο X/Z είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $([x_n])$ ακολουθία Cauchy στον X/Z. Θα δείξουμε ότι η $([x_n])$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Αφού η $([x_n])$ είναι Cauchy, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία δεικτών $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ για την οποία

$$\|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\|_0 = \|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\|_0 < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $z_k \in Z$ τέτοια ώστε

$$\|(x_{n_{k+1}} + z_{k+1}) - (x_{n_k} + z_k)\| < \frac{1}{2^k}.$$

Η επιλογή των z_k γίνεται ως εξής: θέτουμε $z_1 = 0$. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $z_1, \ldots, z_k$. Αφού $\|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\|_0 < 1/2^{k+1}$, υπάρχει $y_{k+1} \in Z$ με την ιδιότητα $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{k+1}\| < 1/2^k$. Θέτουμε $z_{k+1} = z_k - y_{k+1}$, οπότε

$$\|(x_{n_{k+1}} + z_{k+1}) - (x_{n_k} + z_k)\| = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Η ακολουθία $(x_{n_k} + z_k)$ είναι Cauchy στον X, επομένως υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $x_{n_k} + z_k \to x_0$. Από την Πρόταση 2.3.2 έπεται ότι $Q(x_{n_k} + z_k) \to Q(x_0)$, δηλαδή $[x_{n_k}] \to [x_0]$. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μία τυπική εφαρμογή των χώρων πηλίκων (θεωρούμε πάλι γνωστό ότι κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα είναι κλειστός).

Εφαρμογή: Έστω X χώρος με νόρμα, Z κλειστός υπόχωρος του X και Y υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X. Τότε, ο $Z + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Απόδειξη: Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Z$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, ο $Q(Y)$ είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X/Z, άρα κλειστός υπόχωρος του X/Z. Αφού η Q είναι συνεχής απεικόνιση, ο $Q^{-1}(Q(Y))$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Όμως,

$$x \in Q^{-1}(Q(Y)) \Longleftrightarrow Q(x) \in Q(Y) \Longleftrightarrow \exists y \in Y : x - y \in Z \Longleftrightarrow x \in Y + Z. \qquad \square$$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.

2. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ισομορφικός με τον Z. Είναι οι X/Y και X/Z ισομορφικοί; [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τους $X = \ell_2$, $Y = \{x \in \ell_2 : x_1 = 0\}$ και $Z = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$.]

3. Έστω X γραμμικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y,z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισομορφικός με τον X.

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισομορφικός με τον Z και ο X/Z είναι ισομορφικός με τον Y.

2.4 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Έστω X γραμμικός χώρος διάστασης n και $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μία βάση του πάνω από το $\mathbb{K}$. Η ℓ_1-νόρμα στον X ορίζεται ως εξής: αν $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in X$, θέτουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Λήμμα 2.4.1 *Η μοναδιαία μπάλα* B_1 *του* $(X, \|\cdot\|_1)$ *είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Έστω $(x^{(k)})$ μία ακολουθία στην B_1. Κάθε $x^{(k)}$ γράφεται στη μορφή

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} e_i$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1$. Ειδικότερα, για κάθε $i \leq n$ και κάθε k, έχουμε $|a_i^{(k)}| \leq 1$.

Αφού η $(a_1^{(k)})$ είναι φραγμένη, έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $a_1 \in \mathbb{K}$. Επιλέγοντας διαδοχικά υπακολουθίες, μπορούμε σε n βήματα να βρούμε αύξουσα ακολουθία δεικτών $m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ με την ιδιότητα: για κάθε $i \leq n$,

$$a_i^{(m_k)} \to a_i \in \mathbb{K}.$$

Ορίζουμε $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Τότε,

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x^{(m_k)}\|_1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i^{(m_k)}| = 0.$$

Δηλαδή, $x^{(m_k)} \to x$. Προφανώς $x \in B_1$, άρα δείξαμε ότι η B_1 είναι ακολουθιακά συμπαγής. □

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω* X *χώρος διάστασης* n. *Οποιεσδήποτε δύο νόρμες στον* X *είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ του Λήμματος. Έστω $\|\cdot\|$ τυχούσα νόρμα στον X. Θα δείξουμε ότι οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα γιατί η ισοδυναμία νορμών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_1 = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$ του $(X, \|\cdot\|_1)$, και τη συνάρτηση $f : S_1 \to \mathbb{R}^+$ με $f(x) = \|x\|$.

Η f είναι συνεχής συνάρτηση: αν $x, y \in S_1$, τότε

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| = \|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot \|e_i\| \leq \left(\max_{i\leq n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
&= \left(\max_{i\leq n} \|e_i\|\right) \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in S_1$ (γιατί $\|x\| = 0 \implies x = 0 \implies x \notin S_1$) και ότι η S_1 είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο της B_1. Άρα η f παίρνει μία γνήσια θετική ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M στην S_1. Δηλαδή, αν $x \in S_1$ έχουμε

$$0 < m \leq \|x\| \leq M.$$

Αφού οι δύο νόρμες είναι θετικά ομογενείς, έπεται ότι

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες. $\square$

Θεώρημα 2.4.2 *Έστω X χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα και Y χώρος με νόρμα. Κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος.*

Απόδειξη: Ορίζουμε στον X μία δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|'$ ως εξής:

$$\|x\|' = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y.$$

(ελέγξτε ότι είναι νόρμα). Οι $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοιοι ώστε

$$m\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα,

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$, άρα ο T είναι φραγμένος. $\square$

Πόρισμα 2.4.1 *Οποιοιδήποτε δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα είναι ισομορφικοί.*

Απόδειξη: Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα διάστασης $\dim X = \dim Y = n$. Αφού οι δύο χώροι έχουν την ίδια διάσταση, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Αφού η διάσταση των X και Y είναι πεπερασμένη, οι T και T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές. Άρα ο T είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα. $\square$

Πόρισμα 2.4.2 *Κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Αν ένας χώρος είναι πλήρης ως προς κάποια νόρμα, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε ισοδύναμη νόρμα. Αν $\dim X = n$, τότε όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο X είναι πλήρης ως προς μία από αυτές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης ως προς την

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| = \max_{i \leq n} |a_i|. \quad \square$$

Πόρισμα 2.4.3 *Σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης, ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Έστω A κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X ως προς κάποια νόρμα $\|\cdot\|$. Θα δείξουμε ότι το A είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Αφού οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες, υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έστω (x_n) ακολουθία στο A. Αφού το A είναι φραγμένο ως προς την $\|\cdot\|$ έχουμε $\|x_n\| \leq M \Longrightarrow \|x\|_1 \leq bM$ για κάθε n. Το σύνολο $(bM)B_1$ είναι συμπαγές από το Λήμμα 2.4.1, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ ως προς την $\|\cdot\|_1$. Όμως τότε,

$$\|x - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{a}\|x - x_{n_k}\|_1 \to 0,$$

άρα $x_{n_k} \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$. Τέλος, $x \in A$ γιατί το A είναι $\|\cdot\|$-κλειστό.

Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο. □

Πόρισμα 2.4.4 *Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X με $\dim Y < \infty$. Από το Πόρισμα 2.4.2, ο Y είναι πλήρης άρα κλειστό υποσύνολο του X (η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο). □

Το Λήμμα του F. Riesz

Είδαμε ότι η μοναδιαία μπάλα ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι συμπαγής. Η συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας χαρακτηρίζει τους χώρους πεπερασμένης διάστασης. Η απόδειξη βασίζεται στο εξής λήμμα.

Λήμμα του Riesz, 1918 *Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρός του.*

(α) Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $x_\varepsilon \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι τουλάχιστον $1-\varepsilon$:

$$d(x_\varepsilon, Y) := \inf\{\|x_\varepsilon - y\| : y \in Y\} \geq 1 - \varepsilon.$$

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι 1, η μέγιστη δυνατή.

Απόδειξη: (α) Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του X, επομένως μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X \setminus Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός,

$$d(x_0, Y) = d > 0.$$

Αφού $d/(1-\varepsilon) > d$, υπάρχει $y_0 \in Y$ τέτοιο ώστε

$$0 \neq \|x_0 - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Θεωρούμε το $x_\varepsilon = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\| \in S_X$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\| \\ &\geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα $d(x_0, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

(β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Για το x_0 στο (α), βρίσκουμε $y_n \in Y$ με $d(x_0, y_n) \to d := d(x_0, Y)$. Η (y_n) είναι φραγμένη στον Y, επομένως έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (y_{n_k}) (τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του Y είναι συμπαγή). Αν $\lim_k y_{n_k} = y_0$, τότε $y_0 \in Y$ και $\|x_0 - y_0\| = d$. Η απόδειξη συνεχίζεται όπως στο (α). □

Πόρισμα 2.4.5 *Έστω $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα X (όλοι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι). Τότε, μπορούμε να βρούμε μοναδιαία διανύσματα $x_n \in X_n$ τέτοια ώστε $d(x_n, X_{n-1}) = 1$, $n \geq 2$.*

Ειδικότερα, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα X μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα με την ιδιότητα $\|x_n - x_m\| \geq 1$ αν $n \neq m$.

Απόδειξη: Βρίσκουμε το x_n εφαρμόζοντας το δεύτερο μέρος του Λήμματος του Riesz για το ζευγάρι $X_{n-1} \subset X_n$, $\dim X_{n-1} < \infty$.

Έστω τώρα απειροδιάστατος χώρος με νόρμα X. Για την κατασκευή της ακολουθίας (x_n), διαλέγουμε τυχόν $x_1 \in S_X$ και ορίζουμε $X_1 = \text{span}\{x_1\}$. Από το Λήμμα του Riesz υπάρχει $x_2 \in S_X$ τέτοιο ώστε $d(x_2, X_1) = 1$. Ορίζουμε $X_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: αν τα $x_1, \ldots, x_n$ έχουν οριστεί, θέτουμε $X_n = \text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και βρίσκουμε $x_{n+1} \in S_X$ τέτοιο ώστε $d(x_{n+1}, X_n) = 1$.

Από την κατασκευή είναι φανερό ότι αν $n < m$ τότε $x_n \in X_{m-1}$ άρα

$$\|x_n - x_m\| \geq d(x_m, X_{m-1}) = 1. \quad \square$$

Μπορούμε τώρα να χαρακτηρίσουμε τους χώρους πεπερασμένης διάστασης ως εξής:

Θεώρημα 2.4.3 *Ένας χώρος με νόρμα έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η μοναδιαία μπάλα του είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Έχουμε δεί ότι αν $\dim X < \infty$ τότε η B_X είναι συμπαγής. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) μοναδιαίων διανυσμάτων με $\|x_n - x_m\| \geq 1$ αν $n \neq m$. Η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα η B_X δεν είναι συμπαγής. □

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα και $0 < \theta < 1$, $A \subset B_X$. Το A λέγεται *θ-δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

2. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και $\varepsilon > 0$.

(α) Αν $x_1, \ldots, x_k \in B_X$ και $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$, δείξτε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ε-δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

[*Υπόδειξη για το (α):* Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1+\varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.]

3. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ τέτοια ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ έχουν ξένα εσωτερικά.

(β) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

1. Το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x+A) = \mu(A)$ για κάθε Borel A και κάθε $x \in X$.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοιχτό $A_0 \subset X$ με $\mu(A_0) < +\infty$.

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα Hahn-Banach

3.1 Γραμμικά συναρτησοειδή και υπερεπίπεδα

Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Λέμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος W του X έχει *πεπερασμένη συνδιάσταση* $k \in \mathbb{N}$ αν $\dim(X/W) = k$. Αν ο X/W έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο* του X.

Παρατήρηση Έχουμε $\dim(X/W) = k$ αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο X/W με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $w \in W$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad x = w + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k.$$

Πράγματι, αν $\dim(X/W) = k$ και $\{[x_1], \ldots, [x_k]\}$ είναι μία βάση του X/W, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ με $[x] = a_1[x_1] + \cdots + a_k[x_k] = [a_1x_1 + \cdots + a_kx_k]$, δηλαδή $x - (a_1x_1 + \cdots + a_kx_k) =: w \in W$. Επίσης,

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0 \Longrightarrow a_1[x_1] + \cdots + a_k[x_k] = [0] \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0,$$

δηλαδή τα $x_1, \ldots, x_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από την ανεξαρτησία των $[x_i]$ έπεται και η μοναδικότητα της παράστασης του x στην $(*)$. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες, καθώς και την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης.

Ειδικότερα, αν $\dim(X/W)$ και x_0 είναι τυχόν στοιχείο του $X \setminus W$, τότε κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = w + ax_0$ όπου $w \in W$ και $a \in \mathbb{K}$.

Οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των μη τετριμμένων γραμμικών συναρτησοειδών:

Πρόταση 3.1.1 *Έστω X γραμμικός χώρος και W υπόχωρος του X. Ο W έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, με $\mathrm{Ker} f = W$.*

Απόδειξη: Έστω $f : X \to \mathbb{K}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker} f$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{K}$ με $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Το $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένο, ένα προς ένα και επί, δηλαδή γραμμικός ισομορφισμός. Άρα, $\dim(X/W) = \dim(\mathbb{K}) = 1$.

Αντίστροφα, αν $\dim(X/W) = 1$, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{K}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{K}$ με $f(x) = T(Q(x))$, όπου $Q(x) = [x] = x + W$ η φυσιολογική απεικόνιση. Το f είναι μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές και $\mathrm{Ker} f = W$. $\square$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε και μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο X.

Πρόταση 3.1.2 *Έστω X χώρος με νόρμα και W υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Τότε, ο W είναι κλειστός υπόχωρος του X ή πυκνός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: Ο $\overline{W}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \overline{W} \setminus W$, τότε οι αρχικές μας παρατηρήσεις δείχνουν ότι κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = w + ax_0$ για κάποια $w \in W$ και $a \in \mathbb{K}$. Αφού $x_0 \in \overline{W}$ και $W \subset \overline{W}$, αυτό σημαίνει ότι $X \subseteq \overline{W}$. Δηλαδή, ο W είναι πυκνός. $\square$

Οι κλειστοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων μη μηδενικών γραμμικών συναρτησοειδών. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 3.1.1 *Έστω X γραμμικός χώρος. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή $f, g : X \to \mathbb{K}$ έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $g = bf$.*

Απόδειξη: Αν $g = bf$, $b \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$.

Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$. Αν $f \equiv 0$, τότε $g \equiv 0$ και $g = 1 \cdot f$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f \neq 0$, οπότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$. Αφού $f(x_0) \neq 0$, έχουμε $g(x_0) \neq 0$. Για κάθε $x \in X$,

$$f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0 \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = bf$ όπου $b = g(x_0)$. $\square$

Πρόταση 3.1.3 *Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, $f \in X^*$ αν και μόνο αν ο $\mathrm{Ker} f$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Αν το f είναι συνεχές, τότε ο $\mathrm{Ker} f$ είναι προφανώς κλειστός. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές και ότι ο $\mathrm{Ker} f$ είναι κλειστός.

Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο $X/\mathrm{Ker} f$ και την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/\mathrm{Ker} f$. Από την Πρόταση 3.1.1, ο $X/\mathrm{Ker} f$ έχει διάσταση 1, άρα υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X/\mathrm{Ker} f \to \mathbb{K}$. Οι Q και T είναι συνεχείς, άρα η $g := T \circ Q : X \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Παρατηρούμε ότι $g(x) = 0$ αν και μόνο αν $Q(x) = [x] = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \mathrm{Ker}f$. Αφού $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}f$, το Λήμμα 3.1.1 δείχνει ότι $f = bg$ για κάποιο $b \neq 0$, $b \in \mathbb{K}$. Η συνέχεια του f έπεται τώρα από την συνέχεια του g. □

Ασκήσεις

1. Έστω X γραμμικός χώρος και W υπόχωρος του X. Δείξτε ότι $\dim(X/W) = k$ αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο $X\backslash W$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $w \in W$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $x = w + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος και $H \subset X$. Δείξτε ότι το H είναι υπερεπίπεδο αν και μόνο αν υπάρχουν $t \in \mathbb{K}$ και μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $H = \{x \in X : f(x) = t\}$.

3.2 Το Λήμμα του Zorn

(α) Έστω P ένα μη κενό σύνολο. Μία σχέση $\leq$ στο P λέγεται *μερική διάταξη* αν ικανοποιεί τα εξής:

(1) για κάθε $a \in P$, $a \leq a$ (ανακλαστική ιδιότητα)
(2) αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)
(3) αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Το P λέγεται *μερικά διατεταγμένο* ως προς την $\leq$. Από τον ορισμό φαίνεται ότι μπορεί στο P να υπάρχουν a και b για τα οποία να μην ισχύει καμμία από τις $a \leq b$ και $b \leq a$ (τότε, λέμε ότι τα a και b *δεν συγκρίνονται*.) Τα a και b *συγκρίνονται* αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.

(β) Ένα μη κενό υποσύνολο C του P λέγεται *ολικά διατεταγμένο* (ή *αλυσίδα*) αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.

(γ) Αν $A \neq \emptyset$, $A \subseteq P$ και $b \in P$, λέμε ότι το b είναι *άνω φράγμα* για το A αν: για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \leq b$. Ένα υποσύνολο A του P μπορεί να έχει ή να μην έχει άνω φράγμα.

(δ) Το $m \in P$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του P αν: για κάθε $a \in P$ με $m \leq a$ ισχύει $m = a$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει στοιχείο του P γνήσια μεγαλύτερο από το m. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο P μπορεί να έχει ή να μην έχει μεγιστικά στοιχεία.

Παραδείγματα (1) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο που δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(2) Έστω $X \neq \emptyset$ και $M = \mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (το *δυναμοσύνολο* του X). Ορίζουμε $\leq$ στο M ως εξής:

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο M (και αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχουν $A, B \in M$ που δεν συγκρίνονται: πάρτε π.χ. A μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του X, και $B = X \setminus A$.) Το M έχει *ένα* (ακριβώς) μεγιστικό στοιχείο, το X.

(3) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, λέμε ότι $x \leq y$ αν $\xi_i \leq \eta_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το M είναι μερικά διατεταγμένο ως προς την $\leq$, και δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(4) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και λέμε ότι $m \leq n$ αν ο m διαιρεί τον n. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ (τα στοιχεία 3 και 7 του $\mathbb{N}$ δεν συγκρίνονται.) Το $A = \{3.2^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία ως προς την $\leq$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ των *πρώτων αριθμών* με την ίδια διάταξη $\leq$, τότε κάθε στοιχείο του P είναι μεγιστικό. Πάλι με την $\leq$, το $\{2, 3, 4, 8\}$ έχει *δύο* μεγιστικά στοιχεία: το 3 και το 8 (ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς.)

Λήμμα του Zorn *Έστω $P \neq \emptyset$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ως προς την $\leq$. Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα $C \subseteq P$ έχει άνω φράγμα στο P. Τότε, το P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Το Λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής και θα το δεχτούμε σαν αξίωμα.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε το σύνολο P όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του X με διάταξη την $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Δείξτε ότι το $(P, \leq)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος του Zorn.]

3.3 Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, και $p : X \to \mathbb{R}$. Το p λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Παρατηρήστε ότι: δεν απαιτούμε το p να παίρνει μη αρνητικές τιμές, ούτε την $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Εύκολα ελέγχονται οι $p(0) = 0$ και $p(-x) \geq -p(x)$.

Παραδείγματα (α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα $f, |f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \limsup \xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞.

Θεώρημα 3.3.1 *(Θεώρημα επέκτασης του Hahn) Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω W γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : W \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W$,*

$$(*) \qquad f(x) \leq p(x).$$

Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε
(α) $\tilde{f}(x) = f(x)$ αν $x \in W$ (το $\tilde{f}$ είναι επέκταση του f),
(β) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήστε ότι δεν υποθέτουμε καμμία τοπολογική δομή για το χώρο X (είναι απλώς ένας γραμμικός χώρος.) Όπως θα δούμε, το ουσιαστικό βήμα της απόδειξης είναι πώς θα επεκτείνουμε το f από έναν υπόχωρο W_1 σε έναν υπόχωρο W_2 που έχει «μία διάσταση παραπάνω», με γραμμικό τρόπο και χωρίς να χαλάσει η $(*)$. Από τη στιγμή που αυτό είναι δυνατό, το Λήμμα του Zorn μάς εξασφαλίζει μιά «μεγιστική επέκταση» $\tilde{f}$, κι αυτή υποχρεούται να έχει πεδίο ορισμού ολόκληρον τον X.

Λήμμα 3.3.1 *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάποιον γραμμικό υπόχωρο W_1 του X ο οποίος περιέχει τον W, έχουμε βρεί $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_1|_W = f$ και $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.*

Έστω $y \in X \setminus W_1$, και $W_2 = \text{span}\{W_1, y\}$. Τότε, υπάρχει $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_2|_{W_1} = f_1$ και $f_2(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_2$.

Απόδειξη: Κάθε $z \in W_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* στη μορφή

$$z = x + \lambda y$$

για κάποια $x \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Η γραμμική επέκταση f_2 που ζητάμε προσδιορίζεται λοιπόν μονοσήμαντα από την τιμή $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλέξουμε σαν $f_2(y)$. Αν θέσουμε $f_2(y) = a$, τότε πρέπει να έχουμε

$$(1) \qquad f_2(z) = f_2(x) + \lambda f_2(y) = f_1(x) + \lambda a,$$

αφού ζητάμε το f_2 να είναι γραμμικό και να επεκτείνει το f_1. Η άλλη ιδιότητα που ζητάμε από το a είναι η εξής: Για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(2) \qquad f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y).$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2), ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$(3) \qquad f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y) \quad , \quad f_1(x) - \lambda a \leq p(x - \lambda y).$$

Επειδή το p είναι θετικά ομογενές και το f_1 γραμμικό στον W_1, η (3) είναι ισοδύναμη με το εξής: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$(4) \qquad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) \quad , \quad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right),$$

και επειδή ο W_1 είναι υπόχωρος, ισοδύναμα ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x') - p(x' - y) \leq a \leq p(x + y) - f_1(x).$$

Μιά τέτοια επιλογή του a είναι δυνατή αν και μόνο αν για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x) + f_1(x') \leq p(x' - y) + p(x + y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(x') &= f_1(x + x') \\ &\leq p(x + x') \\ &= p((x' - y) + (x + y)) \\ &\leq p(x' - y) + p(x + y), \end{aligned}$$

από την υπογραμμικότητα του p, την γραμμικότητα του f_1 στον W_1, την $f_1 \leq p$ στον W_1 και το γεγονός ότι το p ορίζεται σε ολόκληρο τον X. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1: Έστω $\mathcal{W}$ η οικογένεια όλων των ζευγαριών (W_1, f_1) που ικανοποιούν τα εξής:

(α) ο W_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $W \subseteq W_1$.

(β) το $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό, και $f_1|_W = f$.

(γ) $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.

Η $\mathcal{W}$ είναι μη κενή, αφού $(W, f) \in \mathcal{W}$. Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{W}$ θέτοντας $(W_1, f_1) \leq (W_2, f_2)$ αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ και $f_2|_{W_1} = f_1$.

(1) Το $(\mathcal{W}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{C} = \{(W_i, f_i) : i \in I\}$ μιά αλυσίδα στο $(\mathcal{W}, \leq)$. Ορίζουμε $W' = \bigcup_{i \in I} W_i$ και $f' : W' \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

(α) Ο W' είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $W \subseteq W_i \subseteq W'$ για κάθε $i \in I$ (θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $W_i \subseteq W_j$ είτε $W_j \subseteq W_i$, αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(β) Η f' ορίζεται καλά, είναι γραμμική, και $f'(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W'$ (κι εδώ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $f_j|_{W_i} = f_i$ είτε $f_i|_{W_j} = f_j$ αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(γ) Για κάθε $i \in I$, $f'|_{W_i} = f_i$.

Έπεται ότι $(W', f') \in \mathcal{W}$, και το (W', f') είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

(2) Από το Λήμμα του Zorn, το $(\mathcal{W}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο (W_0, f_0). Από το Λήμμα 3.3.1 βλέπουμε ότι $W_0 = X$: Αν όχι, θα παίρναμε $y \in X \setminus W_0$, και ορίζοντας $W_0' = \mathrm{span}\{W_0, y\}$ θα επεκτείναμε το f_0 σε $f_0' : W_0' \to \mathbb{R}$, οπότε το (W_0', f_0') θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από το (W_0, f_0), άτοπο.

Η $\tilde{f} = f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση της f στον X. □

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Η $p : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *ημινόρμα* αν (α) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$.

Παρατηρήστε ότι κάθε ημινόρμα ικανοποιεί τα εξής:

(γ) $p(0) = 0$ και $p(-x) = p(x)$ για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

(δ) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(ε) Το σύνολο $\{x \in X : p(x) = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Το Θεώρημα επέκτασης του Hahn παίρνει την εξής μορφή αν το p είναι ημινόρμα.

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμα. Υποθέτουμε ότι W είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του X, $f : W \to \mathbb{K}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές, και $|f(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in W$. Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $|f(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Θεωρούμε την επέκταση $\tilde{f}$ που μάς εξασφαλίζει το Θεώρημα 3.3.1. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, και από την γραμμικότητα του $\tilde{f}$ και την $p(-x) = p(x)$ βλέπουμε ότι

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Άρα, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$. $\square$

Για την απόδειξη στην μιγαδική περίπτωση, θα χρειαστούμε κάποιες απλές παρατηρήσεις. Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ και $f : X \to \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές, τότε μπορούμε να γράψουμε το f στη μορφή $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$, όπου $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : X \to \mathbb{R}$ είναι προσθετικά και $\mathbb{R}$-ομογενή συναρτησοειδή (δηλαδή, αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $\mathrm{Re}f(ax) = a\mathrm{Re}f(x)$). Επίσης, το f προσδιορίζεται πλήρως από το $\mathrm{Re}f$. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$f(ix) = \mathrm{Re}f(ix) + i\mathrm{Im}f(ix)$$

και

$$f(ix) = if(x) = -\mathrm{Im}f(x) + i\mathrm{Re}f(x),$$

άρα

$$f(x) = \mathrm{Re}f(x) + i\mathrm{Im}f(x) = \mathrm{Re}f(x) - i\mathrm{Re}f(ix).$$

Αντίστροφα, αν $h : X \to \mathbb{R}$ είναι ένα προσθετικό και $\mathbb{R}$-ομογενές συναρτησοειδές, τότε το $g : X \to \mathbb{C}$ με $g(x) = h(x) - ih(ix)$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $\mathrm{Re}g = h$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2 στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Θέτουμε $h = \mathrm{Re}f$. Τότε, το $h : W \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές αν δούμε τον X σαν γραμμικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, και

$$|h(x)| = |\mathrm{Re}f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$$

για κάθε $x \in W$. Από την πραγματική περίπτωση του Θεωρήματος, υπάρχει $\tilde{h} : X \to \mathbb{R}$ προσθετικό και $\mathbb{R}$-ομογενές, με την ιδιότητα $\tilde{h}|_W = h$ και

$$|\tilde{h}(x)| \leq p(x)$$

για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ με $\tilde{f}(x) = \tilde{h}(x) - i\tilde{h}(ix)$. Τότε, το $\tilde{f}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και εύκολα ελέγχουμε ότι $\tilde{f}|_W = f$ (γιατί $\mathrm{Re}(\tilde{f}) = \tilde{h}$ και $\tilde{h}|_W = h = \mathrm{Re} f$).

Μένει να δείξουμε ότι $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$. Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{f}(x) = Re^{i\theta}$. Από την γραμμικότητα του $\tilde{f}$ έχουμε $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = R \in \mathbb{R}$, άρα $\tilde{h}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}(e^{-i\theta}x)$. Τότε,

$$|\tilde{f}(x)| = R = |\tilde{h}(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x),$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα έχουμε την εξής «αναλυτική μορφή» του Θεωρήματος Hahn-Banach.

Θεώρημα 3.3.3 *(Banach) Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.*

Απόδειξη: Έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|$ για κάθε $x \in Y$. Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές:
(α) Για την υπογραμμικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_{Y^*}\|x+y\| \leq \|f\|_{Y^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_{Y^*}\|x\| + \|f\|_{Y^*}\|y\| \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(β) Το p είναι θετικά ομογενές: αν $\lambda > 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \|f\|_{Y^*}\|\lambda x\| = \lambda\|f\|_{Y^*}\|x\| = \lambda p(x).$$

Από το Θεώρημα 3.3.2, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ της f, τέτοια ώστε

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Άρα, $\tilde{f} \in X^*$ και $\|\tilde{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $\tilde{f}|_Y = f$, παίρνουμε

$$\|\tilde{f}\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in Y, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Δηλαδή, $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. □

Η αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach μάς επιτρέπει να δείχνουμε την ύπαρξη φραγμένων συναρτησοειδών με συγκεκριμένες ιδιότητες. Ειδικότερα, δείχνει ότι ο δυϊκός χώρος ενός μη τετριμμένου χώρου με νόρμα περιέχει πολλά συναρτησοειδή. Χαρακτηριστικά αποτελέσματα αυτού του είδους είναι τα εξής.

Θεώρημα 3.3.4 *Έστω $X \neq \{0\}$ χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \mathrm{span}\{x_0\}$ που παράγεται από το x_0 και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Το f είναι γραμμικό, και

$$\|f\|_{W^*} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Από το Θεώρημα 3.3.3, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{W^*} = 1$ και

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|. \quad \Box$$

Πόρισμα 3.3.1 *Έστω X χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,*

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.3.4, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$ με $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

(1) $$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\| = 1$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = \|x\|$. Άρα,

(2) $$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Από τις (1) και (2), $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. Το sup είναι max λόγω του $\tilde{f}$. $\Box$

Παρατήρηση Γνωρίζουμε ήδη ότι $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ για κάθε $f \in X^*$ (αυτό ήταν συνέπεια του *ορισμού* της νόρμας τελεστή.) Το Θεώρημα Hahn-Banach, στη μορφή του Πορίσματος 3.3.1, μάς δίνει τη δυϊκή σχέση $\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|$. Δηλαδή, η νόρμα του x «πιάνεται» σαν τιμή κάποιου f από τη μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου.

Πόρισμα 3.3.2 *Αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$, τότε $x = y$.*

Απόδειξη: $\|x - y\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x-y)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x) - f(y)| = 0$, άρα $x = y$. $\Box$

Σημείωση Λέμε ότι ο X^* *διαχωρίζει* τα σημεία του X: αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο X^* *διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους*:

Θεώρημα 3.3.5 *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν*

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1/\delta$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = 1$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$. Παρατηρούμε ότι
$$\|[x_0]\|_0 = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} = d(x_0, Y) = \delta.$$
Από το Θεώρημα 3.3.4 υπάρχει $g \in (X/Y)^*$ με $\|g\| = 1$ και $g([x_0]) = \delta$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{K}$ με
$$f(x) = \frac{1}{\delta}(g \circ Q)(x).$$
Το f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $f(y) = g([0])/\delta = 0$ αν $y \in Y$. Από τον ορισμό του g,
$$f(x_0) = \frac{g([x_0])}{\delta} = 1.$$
Επίσης,
$$|f(x)| = \frac{1}{\delta}|g(Q(x))| \leq \frac{\|g\| \cdot \|Q\| \cdot \|x\|}{\delta} \leq \frac{\|x\|}{\delta},$$
άρα $\|f\| \leq 1/\delta$. Μένει να δείξουμε ότι $\|f\| \geq 1/\delta$. Παρατηρούμε ότι $f(x_0 + y) = f(x_0) = 1$ για κάθε $y \in Y$. Άρα,
$$\begin{aligned}\|f\| &\geq \sup_{y\in Y} \frac{|f(x_0+y)|}{\|x_0+y\|} = \frac{1}{\inf_{y\in Y}\|x_0+y\|} \\ &= \frac{1}{\|[x_0]\|_0} = \frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μία εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.5.

Θεώρημα 3.3.6 *Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Θα μάς χρειαστεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 3.3.2 *Η $S_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμη ως προς την επαγόμενη μετρική.*

Απόδειξη: Υπάρχει M αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε
$$M_1 = \{g = f/\|f\| : f \in M \setminus \{0\}\}.$$
Το M_1 είναι αριθμήσιμο υποσύνολο της S_{X^*}, και θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Έστω $f \in S_{X^*}$. Υπάρχει ακολουθία $\{h_k\}$ στο M με $h_k \to f$. Άρα, $\|h_k\| \to \|f\| = 1$, δηλαδή, τελικά $h_k \neq 0$. Οι $l_k = h_k/\|h_k\|$ ανήκουν στο M_1, και
$$\begin{aligned}\|f - l_k\| &= \left\| f - \frac{h_k}{\|h_k\|}\right\| \\ &= \left\| f - h_k + h_k\left(1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right)\right\| \\ &\leq \|f - h_k\| + \|h_k\| \left|1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right| \to 0.\end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M_1} = S_{X^*}$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Θεωρούμε $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\| = \sup_{\|x\|=1} |g_n(x)| = 1$, άρα υπάρχει $x_n \in X$, $\|x\| = 1$, τέτοιο ώστε
$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$
Ορίζουμε $Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω ότι $\overline{Y} \neq X$. Τότε, από το Θεώρημα 3.3.5, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\tilde{f}(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\|\tilde{f} - g_n\| \geq |(\tilde{f} - g_n)(x_n)| = |\tilde{f}(x_n) - g_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > \frac{1}{2},$$
άτοπο, γιατί το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Άρα, $\overline{Y} = X$. Όμως, ο $\overline{Y}$ είναι διαχωρίσιμος: οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των x_n με ρητούς συντελεστές είναι πυκνοί στον $\overline{Y}$. Άρα, ο X είναι διαχωρίσιμος. $\square$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι
$$\overline{Y} = \bigcap \{\text{Ker} f : f \in X^* \ , \ Y \subseteq \text{Ker} f\}.$$

3. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα
$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x)$$
για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $f = f_1 + f_2$ και
$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$
[*Υπόδειξη:* Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ με $|\psi(x_1, x_2)| \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$ και $\psi(x, x) = f(x)$.]

4. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης και $X \neq \{0\}$, δείξτε ότι ο Y είναι πλήρης. [*Υπόδειξη:* Πάρτε $x_0 \in S_X$ και $f \in S_{X^*}$ με $|f(x_0)| = 1$. Τότε, για κάθε $y \in Y$ ο τελεστής $T : X \to Y$ με $T_y(x) = f(x)y$ είναι φραγμένος και $\|T_y\| = \|y\|$.]

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $|\cdot|$ είναι μία άλλη νόρμα στον W που είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον W. Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X που είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ στον X και ο περιορισμός της στον W είναι η $|\cdot|$.

6. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(\mathbb{R})$ των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$,
$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n.$$

7. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το
$$N(Y) = \{f \in X^* : \forall y \in Y \ f(y) = 0\}.$$
(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.
(β) Δείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

8. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, δείξτε ότι $f \in X^*$.

3.4 Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμός Σε αυτήν την παράγραφο υποθέτουμε ότι X είναι ένας χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B είναι μη κενά υποσύνολα του X.

(α) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(β) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται γνήσια*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(γ) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται αυστηρά*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) \geq \mu$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Ο όρος «διαχωρίζονται» στο (α) δικαιολογείται από το γεγονός ότι το $\{x \in X : f(x) = \lambda\}$ είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο, το οποίο χωρίζει τον X σε δύο «ημιχώρους» εκ των οποίων ο ένας περιέχει το A και ο άλλος το B. Αναγκαία συνθήκη για τα (β), (γ) είναι η $A \cap B = \emptyset$.

Τα διαχωριστικά θεωρήματα που θα συζητήσουμε αφορούν κυρτά σύνολα, και η απόδειξή τους βασίζεται πολύ ουσιαστικά στο Θεώρημα Hahn-Banach. Γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά με τον όρο «γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach».

Λήμμα 3.4.1 *Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό με $0 \in A$. Ορίζουμε*
$$q_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$
Τότε, το q_A είναι ένα μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε
$$(*), \qquad q_A(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X$$
και
$$(**) \qquad A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}.$$

Απόδειξη: Η q_A ορίζεται καλά: το A είναι ανοιχτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(0, \delta) \subseteq A$. Έπεται ότι αν $0 \neq x \in X$, τότε $(\delta/2\|x\|)x \in A$, άρα

$\frac{2}{\delta}\|x\| \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και το σύνολο αυτό είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης,

$$q_A(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει με $M = 2/\delta$ (αν $x = 0$, τότε $0 \in tA$ για κάθε $t > 0$, άρα $q_A(0) = 0$.)

Δείχνουμε τώρα τις δύο ιδιότητες του υπογραμμικού συναρτησοειδούς: Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 : x \in (t/\lambda)A\} \\ &= \lambda \inf\{(t/\lambda) : t > 0,\ x \in (t/\lambda)A\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sA\} \\ &= \lambda q_A(x). \end{aligned}$$

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s > 0$ τέτοια ώστε $t < q_A(x) + \varepsilon$, $s < q_A(y) + \varepsilon$, και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του A έχουμε

$$tA + sA = (t + s)A,$$

άρα $x + y \in (t + s)A$. Έπεται ότι

$$q_A(x + y) \leq t + s < q_A(x) + q_A(y) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$q_A(x + y) \leq q_A(x) + q_A(y).$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$. Αν $q_A(x) < 1$, τότε υπάρχει r τέτοιο ώστε $q_A(x) < r < 1$ και $x \in rA \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $x \in A$, επειδή το A είναι ανοιχτό υπάρχει $t > 0$ τ.ω $x + tx \in A$, οπότε $q_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$. □

Θεώρημα 3.4.1 *Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό, ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του X που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το $\tilde{f}$ διαχωρίζει το A από το $\{0\}$.*

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in A$. Το $A' = x_0 - A$ είναι ανοιχτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$q(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

και $q(x) < 1$ αν και μόνο αν $x \in A'$. Ειδικότερα, $q(x_0) \geq 1$ γιατί $x_0 \notin A'$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \langle x_0 \rangle$ που παράγει το x_0, και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda q(x_0)$. Η f φράσσεται από το q: αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda x_0) = q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda x_0) < 0 \leq q(\lambda x_0)$.

Από το Θεώρημα 3.3.1, η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, το οποίο ικανοποιεί την $\tilde{f}(x) \leq q(x) \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επίσης,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq q(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|,$$

άρα $|\tilde{f}(x)| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο ($\tilde{f} \in X^*$).

Τέλος, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x_0 - x \in A'$, άρα $q(x_0 - x) < 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0) \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x \in A, \quad \tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0. \quad \square$$

Θεώρημα 3.4.2 *Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B ξένα κυρτά σύνολα, με το A ανοιχτό. Τότε, υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) < \lambda$ αν $a \in A$, και $f(b) \geq \lambda$ αν $b \in B$. Αν το B είναι κι αυτό ανοιχτό, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη: Θέτουμε $G = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το G είναι κυρτό, και αφού $G = \bigcup_{b \in B}(A - b)$, το G είναι ανοιχτό. Από την $A \cap B \neq \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin G$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in G$.

Έστω $a \in A$, $b \in B$. Τότε, $a - b \in G$ άρα $f(a - b) > 0$. Δηλαδή, $f(a) > f(b)$. Υπάρχει λοιπόν $\lambda \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \sup\{f(b) : b \in B\} \leq \lambda \leq \inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Το A έχει υποτεθεί ανοιχτό και κυρτό, άρα το $f(A)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\forall a \in A, \quad f(a) > \lambda \quad , \quad \forall b \in B, \quad f(b) \leq \lambda.$$

Αν και το B είναι ανοιχτό, τότε το $f(B)$ είναι επίσης ανοιχτό διάστημα, άρα $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$, δηλαδή τα A, B διαχωρίζονται γνήσια. $\square$

Τέλος, δείχνουμε ένα διαχωριστικό θεώρημα για ξένα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του X, αν ένα από αυτά είναι συμπαγές. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.4.2 *Έστω X χώρος με νόρμα, K συμπαγές υποσύνολο του X, και A ανοιχτό υποσύνολο του X με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε*

$$K + D(0, r) \subseteq A,$$

όπου $K + D(0, r) = \{x + y : x \in K, \|y\| < r\} = \{x \in X : d(x, K) < r\}$.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in A$ και το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) = x + D(0, r_x) \subseteq A$.

Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} D(x, r_x/2),$$

και αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq D(x_1, r_{x_1}/2) \cup \ldots \cup D(x_m, r_{x_m}/2).$$

Θέτουμε $r = \min\{r_{x_1}/2, \ldots, r_{x_m}/2\}$. Τότε,

$$K + D(0, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + D(0, r_{x_i})) \subseteq A. \quad \square$$

Θεώρημα 3.4.3 *Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B δύο ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του X. Αν το B είναι συμπαγές, τότε τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη: Αφού τα A, B είναι ξένα, το συμπαγές B περιέχεται στο ανοιχτό $X \setminus A$, και από το Λήμμα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B + D(0, r) \subseteq X \setminus A$, απ' όπου παίρνουμε

$$(B + D(0, r/2)) \cap (A + D(0, r/2)) = \emptyset.$$

Τα $A + D(0, r/2)$, $B + D(0, r/2)$ είναι ανοιχτά και κυρτά: κυρτά γιατί τα A, B και $D(0, r/2)$ είναι κυρτά, και ανοιχτά γιατί η $D(0, r/2)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Από το Θεώρημα 3.4.2 διαχωρίζονται γνήσια, άρα το ίδιο ισχύει και για τα υποσύνολά τους A, B. Υπάρχουν λοιπόν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(b) < \lambda < f(a)$$

για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Το B είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $b_0 \in B$ τέτοιο ώστε $f(b) \leq f(b_0)$ για κάθε $b \in B$. Αν $\mu = f(b_0) < \lambda$, τότε

$$B \subseteq \{x : f(x) \leq \mu\} \quad , \quad A \subseteq \{x : f(x) \geq \lambda\},$$

άρα τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά. $\square$

Παρατήρηση: Αν τα A, B υποτεθούν απλώς κλειστά, τότε το Θεώρημα 3.4.3 παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα $A = \{(x, y) : y \leq 0\}$ και $B = \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1\}$. Τα A, B είναι κλειστά, κυρτά και ξένα, αλλά δεν διαχωρίζονται γνήσια.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τον $L^2[-1, 1]$ (το μέτρο είναι το Lebesgue). Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$E_a = \{f \in C[-1, 1] : f(0) = a\}.$$

Δείξτε ότι κάθε E_a είναι κυρτό και πυκνό στον $L^2[-1, 1]$. Αν $a \neq b$, δείξτε ότι τα E_a και E_b δεν διαχωρίζονται από κανένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F : L^2[-1, 1] \to \mathbb{R}$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα του X με την ιδότητα

$$0 \notin \overline{A - B}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Κεφάλαιο 4

Τελεστές σε χώρους Banach

4.1 Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος

Στην Άσκηση §1.2.4 είδαμε το θεώρημα του Osgood: αν $\{f_n\}$ είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την ιδιότητα η $\{f_n(t)\}$ να είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0,1]$, τότε υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ στο οποίο η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η απόδειξη βασίστηκε στο θεώρημα του Baire.

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα αποδεικνύει το εξής.

Πρόταση 4.1.1 *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $\mathcal{F}$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in D(x_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \forall f \in \mathcal{F},\ |f(x)| \leq m\}.$$

(i) Κάθε A_m είναι κλειστό: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$, τότε

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \ |f(x_k)| \leq m$$

και, από την συνέχεια των $f \in \mathcal{F}$ παίρνουμε $f(x_k) \to f(x)$ καθώς $k \to \infty$, άρα

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \ |f(x)| \leq m,$$

δηλαδή $x \in A_m$.
(ii) $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, το $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $f \in \mathcal{F}$, $|f(x)| \leq M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

(iii) Ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το Θεώρημα του Baire μάς εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $D(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $D(x_0, r)$:

$$\forall x \in D(x_0, r)\, \forall f \in \mathcal{F}, \quad |f(x)| \leq m_0. \quad \square$$

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μιά οικογένεια τελεστών $\mathcal{F}$ στον $B(X, Y)$ που έχουν την ιδιότητα το $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ να είναι φραγμένο στον Y για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των $T \in \mathcal{F}$ και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 4.1.1 μάς δίνουν ότι οι νόρμες $\|T\|$, $T \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $\mathcal{F}$ μία οικογένεια από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\forall\, T \in \mathcal{F}, \quad \|T\| \leq M.$$

Απόδειξη: Για κάθε $T \in \mathcal{F}$ ορίζουμε $f_T : X \to \mathbb{R}$ με $f_T(x) = \|T(x)\|$. Κάθε f_T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Αν $x, y \in X$, τότε

$$|f_T(x) - f_T(y)| = |\, \|T(x)\| - \|T(y)\|\, | \leq \|T(x) - T(y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|.$$

Από την υπόθεσή μας για την $\mathcal{F}$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$\sup\{|f_T(x)| : T \in \mathcal{F}\} = \sup\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty$$

δηλαδή το σύνολο $\{f_T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο.

Από την Πρόταση 4.1.1 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $T \in \mathcal{F}$,

$$|f_T(x)| = \|T(x)\| \leq M_1.$$

Έστω $x \in B_X$. Τότε, για κάθε $T \in \mathcal{F}$ έχουμε $\|T(x_0 + rx)\| \leq M_1$ και $\|T(x_0)\| \leq M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + rx \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $T \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \frac{1}{r}\|T(rx)\| = \frac{1}{r}\|T(x_0 + rx) - T(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r}\left(\|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\|\right) \leq \frac{2M_1}{r}. \end{aligned}$$

Αφού το $x \in B_X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T\| \leq M := 2M_1/r$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$. $\square$

Η υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach είναι απαραίτητη όπως δείχνει το εξής παράδειγμα: Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $P[0, 1]$ των πολυωνύμων $p : [0, 1] \to$

$\mathbb{R}$. Αν $p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ (όπου πεπερασμένοι το πλήθος συντελεστές a_k είναι μη μηδενικοί), θέτουμε $\|p\| = \sup_k |a_k|$. Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $P[0,1]$. Ορίζουμε μία ακολουθία συναρτησοειδών $f_n : P[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(p) = f_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Κάθε f_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές και

$$|f_n(p)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq (n+1)\sup_k |a_k| = (n+1)\|p\|,$$

δηλαδή $\|f_n\| \leq n+1$. Ισχύει μάλιστα ισότητα: πάρτε το $p_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$ (τότε, $\|p_n\| = 1$ και $f_n(p_n) = n+1$).

Έστω $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$. Τότε $f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ αν $n \leq m$ και $f_n(p) = \sum_{k=0}^{m} a_k$ αν $n > m$. Δηλαδή, η ακολουθία $(f_n(p))$ είναι τελικά σταθερή. Επομένως, το $\{f_n(p) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.

Όμως οι νόρμες των f_n δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες: $\|f_n\| = n+1 \to \infty$. Το πρόβλημα είναι βέβαια ότι ο X δεν είναι πλήρης. $\square$

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος εφαρμόζεται συχνά στην εξής μορφή (θεώρημα Banach-Steinhaus):

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και (T_n) ακολουθία φραγμένων τελεστών $T_n : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχει το $y_x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \in Y$. Τότε, αν ορίσουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = y_x$, ο T είναι φραγμένος τελεστής και*

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

Απόδειξη: Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο. Άρα, από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x)\| = \|\lim_n T_n(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \liminf_n \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|.$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq M$. Για την ακρίβεια, η απόδειξη δείχνει ότι $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$. $\square$

Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της «αρχής ομοιόμορφου φράγματος» για οικογένειες φραγμένων τελεστών. Στην Πρόταση που ακολουθεί, δεν υποθέτουμε την πληρότητα του πεδίου ορισμού αλλά περιορίζουμε τους τελεστές σε ένα «μικρό» σύνολο.

Πρόταση 4.1.2 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X, και $\mathcal{F}$ οικογένεια φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in K$ το σύνολο $\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε*

$$T(K) \subseteq aB_Y$$

για κάθε $T \in \mathcal{F}$. Δηλαδή, οι εικόνες $T(K)$, $T \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Απόδειξη: Ορίζουμε $A_n = \{x \in X : \forall T \in \mathcal{F}\ \|T(x)\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε A_n είναι κλειστό σύνολο και από την υπόθεσή μας,

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap A_n).$$

Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχει m τέτοιος ώστε το $K \cap A_m$ να έχει μη κενό εσωτερικό στο K. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_0 \in K$ και $r > 0$ έτσι ώστε

$$(*) \qquad K \bigcap (x_0 + rB_X) \subseteq A_m.$$

Επίσης, λόγω της συμπάγειας του K μπορούμε να βρούμε $M > 1$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$K \subseteq x_0 + MrB_X.$$

Έστω $T \in \mathcal{F}$ και $x \in K$. Θεωρούμε το

$$z = \left(1 - \frac{1}{M}\right) x_0 + \frac{1}{M} x.$$

Το K είναι κυρτό, άρα $z \in K$. Επίσης, $z - x_0 = (x - x_0)/M \in rB_X$, δηλαδή $z \in x_0 + rB_X$. Από την $(*)$ έχουμε $\|T(z)\| \leq m$ και $\|T(x_0)\| \leq m$. Αρα, γράφοντας το x σαν $x = Mz - (M-1)x_0$ παίρνουμε

$$\|T(x)\| \leq M\|T(z)\| + (M-1)\|T(x_0)\| \leq (2M-1)m.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $T(K) \subseteq aB_Y$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$, με $a = (2M-1)m$. $\square$

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος δείξτε ότι αν (a_k) είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα για κάθε $b = (b_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ να συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$.

2. Αν $x = (x_i)$ και $y = (y_i)$ είναι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

αν βέβαια η σειρά συγκλίνει. Έστω $1 < p < +\infty$, q ο συζυγής εκθέτης του p και $x^{(n)} = (x_i^{(n)})$ μία ακολουθία στον ℓ_p. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $y \in \ell_q$, $\langle x^{(n)}, y\rangle \to 0$.

(β) Υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε $\|x^{(n)}\|_p \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_i^{(n)} \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(\mu)$, $1 < p < +\infty$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $g \in L^q(\mu)$, $\int_\Omega f_n g d\mu \to 0$.

(β) Ισχύει $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$ και για κάθε $E \in \mathcal{A}$, $\int_E f_n d\mu \to 0$.

4. Έστω X χώρος Banach, (f_n) ακολουθία στον X^* και (ϵ_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\epsilon_n \to 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ με την ιδιότητα $|f_n(x)| \leq K_x \epsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

5. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $y \in Y$ ο $T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

4.2 Το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και το θεώρημα κλειστού γραφήματος

Ορισμός Έστω X και Y μετρικοί χώροι, και $T : X \to Y$ συνάρτηση. Η T λέγεται *ανοιχτή απεικόνιση* αν για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, το $T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y.

Αν $T : X \to Y$ συνεχής, η T δεν είναι απαραίτητα ανοιχτή: για παράδειγμα, η $T : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sin x$ είναι συνεχής, αλλά $T((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης (Schauder) *Έστω X και Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος <u>και επί</u> γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει το εξής:

Πρόταση 4.2.1 *Αν X, Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(D_X(0, 1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y.*

Απόδειξη: Βήμα 1 Θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα $D_X(0, 1/2)$ του X. Αφού

$$kD_X(0, 1/2) = D_X(0, k/2) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ισχύει

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kD_X(0, 1/2).$$

Αφού ο T είναι γραμμικός και επί, παίρνουμε

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(D_X(0,1/2)).$$

Άρα,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(D_X(0,1/2))} = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(D_X(0,1/2))}.$$

Ο Y είναι πλήρης, και κάθε $k\overline{T(D_X(0,1/2))}$ κλειστό. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε το $k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$ να περιέχει μιά μπάλα $D_Y(y_0,\delta)$ στον Y. Δηλαδή,

$$y_0 + D_Y(0,\delta) \subseteq k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}. \tag{1}$$

Βήμα 2 Έστω $y \in D_Y(0,\delta)$. Τότε, $y_0 + y \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x_n \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n) \to y_0 + y.$$

Επίσης, $y_0 \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x'_n \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x'_n) \to y_0.$$

Τότε, $x_n - x'_n \in D_X(0,1)$, και

$$k_0T(x_n - x'_n) = k_0T(x_n) - k_0T(x'_n) \to y.$$

Δηλαδή,

$$y \in k_0\overline{T(D_X(0,1))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(D_X(0,1))} \supseteq D_Y(0,\delta/k_0) = D_Y(0,\delta') \tag{2}$$

στον Y, όπου $\delta' = \delta/k_0$.

Βήμα 3 Είδαμε ότι η κλειστή θήκη της $T(D_X(0,1))$ περιέχει μιά ανοιχτή μπάλα $D_Y(0,\delta')$ στον Y. Μένει να δούμε ότι το ίδιο το $T(D_X(0,1))$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Θεωρούμε την $D_Y(0,\delta'/2)$. Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta'/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2}\overline{T(D_X(0,\delta'/2))} = \overline{T(D_X(0,1/2))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in D_X(0,1/2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta'}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2^2))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in D_X(0,1/2^2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta'}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in D_X(0,1/2^n)$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|y - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Η ακολουθία $z_n = x_1 + \ldots + x_n$ είναι Cauchy στον X: αν $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\| &= \|x_m + \ldots + x_{n+1}\| \leq \|x_m\| + \ldots + \|x_{n+1}\| \\ &< \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $z_n \to x$. Παρατηρούμε ότι

$$\|z_n\| = \|x_1 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \ldots + \|x_n\| < \|x_1\| + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \|x_1\| + \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Δηλαδή, $x \in D_X(0,1)$. Από την $(*)$, $T(z_n) = T(x_1) + \ldots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο T είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(D_X(0,1))$.

Το $y \in D_Y(0,\delta'/2)$ ήταν τυχόν, άρα

$$T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta'/2). \quad \Box$$

Παρατήρηση Μία πολύ χρήσιμη συνέπεια της απόδειξης του Λήμματος είναι η εξής.

Πρόταση 4.2.2 *Έστω X, Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.* $\Box$

Απόδειξη του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης: Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $T(A)$ είναι ανοιχτό: έστω $y \in T(A)$. Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $Tx = y$. Το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x,r) \subseteq A$.

Από την Πρόταση 4.2.1, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$T(D_X(0,r)) = T(rD_X(0,1)) = rT(D_X(0,1)) \supseteq rD_Y(0,\delta) = D_Y(0,\delta r).$$

Αν $y' \in D_Y(y,\delta r)$, τότε $y' - y \in D_Y(0,\delta r)$, άρα υπάρχει $z \in D_X(0,r)$ τέτοιο ώστε $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $x + z \in D_X(x,r)$, και $T(x+z) = y'$. Δηλαδή,

$$T(A) \supseteq T(D_X(x,r)) \supseteq D_Y(y,\delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοιχτό. $\Box$

Μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης είναι το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης.

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη: Ο T^{-1} ορίζεται καλά και είναι γραμμικός τελεστής. Αφού ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση, για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό έχουμε ότι το $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y. Άρα, ο T^{-1} είναι συνεχής. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα κλειστού γραφήματος, το οποίο μάς δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος.

Ορισμός Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το *γράφημα* του T είναι το σύνολο

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Ο T έχει *κλειστό γράφημα* αν ισχύει το εξής:

Αν $x_n \to x$ στον X, $y_n \to y$ στον Y, και $y_n = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $y = T(x)$.

Ισοδύναμα, αν το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με νόρμα π.χ. την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (άσκηση).

Θεώρημα κλειστού γραφήματος *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα $\Gamma(T)$ του T είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $X \times Y$ με νόρμα την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ο $X \times Y$ είναι πλήρης: αν $z_n = (x_n, y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X \times Y$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\varepsilon > \|z_n - z_m\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y.$$

Τότε όμως, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ και $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, δηλαδή οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους X, Y αντίστοιχα. Οι X, Y είναι πλήρεις, άρα υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Όμως τότε, αν $z = (x, y)$, έχουμε

$$\|z - z_n\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Άρα, $z_n \to z$.

Από την υπόθεσή μας, το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$. Αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach, το $\Gamma(T)$ είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $P : \Gamma(T) \to X$ με $P(x, Tx) = x$. Ο P είναι γραμμικός τελεστής, και

$$P(x, Tx) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow (x, Tx) = (0, 0),$$

άρα ο P είναι ένα προς ένα. Προφανώς, ο P είναι επί. Τέλος, ο P είναι φραγμένος:

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y}.$$

Δηλαδή, $\|P\| \leq 1$.

Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $P^{-1} : X \to \Gamma(T)$ με $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y} = \|P^{-1}(x)\|_{X\times Y} \leq M\|x\|_X.$$

Επομένως, ο T είναι φραγμένος. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο παραδείγματα που δείχνουν ότι η υπόθεση της πληρότητας των X και Y στα θεωρήματα αντίστροφης απεικόνισης και κλειστού γραφήματος είναι απαραίτητη.

(α) Θεωρούμε τους χώρους $X = C^1[0,1]$ και $Y = C[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων και συνεχών $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ αντίστοιχα, με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(f) = f'$.

Ο T είναι γραμμικός τελεστής και έχει κλειστό γράφημα: αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$, τότε από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n') στην g έχουμε: για κάθε $t \in [0,1]$,

$$\int_0^t f_n'(s)ds \to \int_0^t g(s)ds,$$

δηλαδή

$$f_n(t) - f(0) \to \int_0^t g(s)ds.$$

Όμως $f_n(t) - f_n(0) \to f(t) - f(0)$, άρα

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

Έπεται ότι $f' = g$, δηλαδή $g = T(f)$.

Όμως ο T δεν είναι φραγμένος τελεστής. Αν $f_n(t) = t^n$, τότε $\|f_n\|_\infty = 1$ ενώ $\|T(f_n)\|_\infty = \|nt^{n-1}\|_\infty = n$. Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται και ο λόγος είναι (αναγκαστικά) ότι ο X δεν είναι πλήρης (στο παράδειγμα αυτό, ο Y είναι πλήρης).

(β) Έστω X απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θεωρούμε μία βάση Hamel $\{e_i : i \in I\}$ του X. Το I είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|e_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε μία δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ με πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς συντελεστές a_i. Θέτουμε

$$\|x\|' = \sum_{i\in I} |a_i|$$

και θεωρούμε τον χώρο $Y = (X, \|\cdot\|')$. Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$. Το γράφημα $\Gamma(I) = \{(x,x) : x \in X\}$ της I είναι κλειστό: έστω ότι $\|x_n - x\| \to 0$ και $\|x_n - y\|' \to 0$. Γενικά,

$$(*) \qquad \|x\| = \|\sum_{i\in I} a_i e_i\| \leq \sum_{i\in I} |a_i| \cdot \|e_i\| = \sum_{i\in I} |a_i| = \|x\|',$$

άρα $\|x_n - y\|' \to 0 \Rightarrow \|x_n - y\| \to 0$, δηλαδή $y = I(x) = x$.

Όμως ο I δεν είναι φραγμένος. Από την $(*)$ ο I^{-1} είναι φραγμένος, αν λοιπόν ο I ήταν φραγμένος, τότε θα ήταν ισομορφισμός. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει, γιατί ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει υποτεθεί διαχωρίσιμος ενώ ο $(X, \|\cdot\|')$ δεν είναι διαχωρίσιμος: παρατηρήστε ότι αν $i \neq j \in I$ τότε $\|e_i - e_j\|' = 2$ και το I είναι υπεραριθμήσιμο.

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται και ο λόγος είναι αναγκαστικά ότι ο Y δεν είναι πλήρης (στο παράδειγμα αυτό, ο X είναι πλήρης). Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση της πληρότητας δεν μπορεί να αφαιρεθεί από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο $I^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος, 1-1 και επί γραμμικός τελεστής αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

Ασκήσεις

1. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L^1[0,2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1[0,1]$ υπάρχει $\tilde{f} \in X$ τέτοια ώστε $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in L^1[0,1]$, υπάρχει $\tilde{f} \in X$ με $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$ και $\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1$.

2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X, με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

3. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ ισχύει $g \circ T \in X^*$.

4. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq K\|y\|$.

(β) Αν $H : \ell_1 \to Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $G : \ell_1 \to X$ τέτοιος ώστε $T \circ G = H$.

5. Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μία ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

6. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$ στον Y, δείξτε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

4.3 Βάσεις Schauder

Ορισμός Έστω X χώρος Banach και (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βάση Schauder* του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{K}$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Αν (x_n) είναι μία βάση Schauder του X, τότε μπορούμε να βλέπουμε τον X σαν «χώρο ακολουθιών» μέσω της ταύτισης $x \longleftrightarrow (a_1(x), a_2(x), \ldots)$. Η βάση μάς παρέχει ένα «σύστημα συντεταγμένων» για τον X.

Έστω ότι η (x_n) είναι βάση Schauder του X. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι ο X είναι διαχωρίσιμος (άσκηση).

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ένα βασικό αποτέλεσμα για χώρους με βάση Schauder σαν εφαρμογή του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης.

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την φυσιολογική «προβολή» $P_n : X \to X$ που ορίζεται μέσω της*

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Τότε, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και $\sup_n \|P_n\| < +\infty$.

Απόδειξη: Κάθε P_n είναι γραμμικός τελεστής και $P_n \circ P_n = P_n$, κάτι που δικαιολογεί τον όρο «προβολή». Πιό γενικά, αν $n < m$ τότε $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n = P_n$. Αυτό που δεν είναι προφανές είναι ότι οι τελεστές P_n είναι φραγμένοι.

Για κάθε $x \in X$ έχουμε $P_n(x) \to x$, άρα το $\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε μία νέα νόρμα $|||\cdot|||$ στον X μέσω της

$$|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα που ικανοποιεί την

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| \leq \sup_n \|P_n(x)\| = |||x|||, \quad x \in X.$$

Ισχυρισμός: Ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω $y^k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i$ μία $|||\cdot|||$-Cauchy ακολουθία στον X. Τότε, οι ακολουθίες $(P_n(y^k))_k$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy στον X ομοιόμορφα ως προς n: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(1) \qquad \forall k_1, k_2 \geq k_0(\varepsilon) \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - P_n(y^{k_2})\| < \varepsilon.$$

Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(P_n(y^k))_k$ βρίσκεται σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης (τον $X_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$), επομένως συγκλίνει σε κάποιο $z_n \in X_n$. Επίσης, λόγω της (1), η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς n. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(2) \qquad \forall k \geq k_0(\varepsilon) \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - z_n\| \leq \varepsilon.$$

Η ακολουθία $(z_n)_n$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε για κάθε $k \geq k_0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε $\|P_n(y^k) - z_n\| < \varepsilon/3$. Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$\|z_n - z_m\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|P_n(y^k) - P_m(y^k)\|$$

αν $k \geq k_0$. Αφού $P_n(y^k) \to y^k$, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $k \geq k_0$ και πάρουμε τα n, m αρκετά μεγάλα, βλέπουμε ότι

$$\|P_n(y^k) - P_m(y^k)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

δηλαδή

$$\|z_n - z_m\| < \varepsilon.$$

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\|z_n - z\| \to 0$. Παρατηρούμε ότι αν $m > n$, τότε

$$P_n(z_m) = P_n(\lim_k P_m(y^k)) = \lim_k P_n(P_m(y^k)) = \lim_k P_n(y^k) = z_n. \tag{3}$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί όλα τα $P_m(y^k)$ ανήκουν στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $(X_m, \|\cdot\|)$ στον οποίο η P_n είναι συνεχής).

Από την (3), υπάρχει ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

(άσκηση). Έπεται ότι

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Τέλος, από την (3) και την (2) παίρνουμε

$$|||z - y^k||| = \sup_n \|z_n - P_n(y^k)\| \to 0$$

όταν $k \to \infty$, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. $\square$

Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$. Η I είναι γραμμικός, 1-1 και επί τελεστής. Αφού $\|x\| \leq |||x|||$ για κάθε $x \in X$, ο I είναι φραγμένος τελεστής. Οι δύο χώροι είναι πλήρεις, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο I^{-1} είναι φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε

$$\sup_n \|P_n(x)\| = |||x||| \leq K\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Άρα, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και

$$\sup_n \|P_n\| \leq K < +\infty. \quad \square$$

Ο αριθμός $M = \sup_n \|P_n\|$ λέγεται *σταθερά της βάσης* (x_i). Από την $P_n \circ P_m = P_n$, $n < m$ παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 4.3.1 *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i). Για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ ισχύει*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq M \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$$

όπου M η σταθερά της βάσης (x_i). $\square$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος Banach και (x_n) βάση Schauder του X. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Ακόμα ισχυρότερα, δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \notin \overline{\mathrm{span}\{x_m : m \neq n\}}.$$

2. Έστω X χώρος Banach και (x_n) ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X. Η (x_n) λέγεται *βασική ακολουθία* αν είναι βάση Schauder για τον υπόχωρο $\overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ που παράγει. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

(β) υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε αν $1 \leq m < n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, τότε

$$\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big\| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|.$$

3. Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και Y υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in Y$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|\lambda x + y\|.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε πεπερασμένο $\varepsilon/2$-δίκτυο $\{y_i\}$ στην S_Y και συναρτησοειδή $f_j \in S_{Y^*}$ με $f_j(x_i) = \delta_{ij}$. Διαλέξτε $x \in \bigcap \mathrm{Ker}(f_j)$.]

4. Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες ασκήσεις δείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει βασική ακολουθία.

4.4 Δεύτερος δυϊκός και αυτοπάθεια

Έστω X χώρος με νόρμα. Έχουμε δεί ότι ο X^* είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για τον $(X^*)^*$, τον χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X^* \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |F(f)|.$$

Για ευκολία γράφουμε $X^{**} := (X^*)^*$. Ο X^{**} λέγεται *δεύτερος δυϊκός* του X.

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τον τρίτο δυϊκό X^{***} του X και ούτω καθεξής. Στη συνέχεια, αν X είναι ένας χώρος με νόρμα θα γράφουμε $x_1, x_2, \ldots$ για τα στοιχεία του X, $x_1^*, x_2^*, \ldots$ για τα στοιχεία του X^*, $x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots$ για τα στοιχεία του X^{**} κλπ.

Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα στοιχείο $\tau(x)$ του X^{**} ως εξής: ορίζουμε $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$, με

$$[\tau(x)](x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*.$$

Λήμμα 4.4.1 *Το $\tau(x)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X^{**}.*

Απόδειξη: Ελέγχουμε πρώτα την γραμμικότητα του $\tau(x)$: Αν $x_1^*, x_2^* \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [\tau(x)](\lambda x_1^* + \mu x_2^*) &= (\lambda x_1^* + \mu x_2^*)(x) \\ &= \lambda x_1^*(x) + \mu x_2^*(x) \\ &= \lambda[\tau(x)](x_1^*) + \mu[\tau(x)](x_2^*). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$|[\tau(x)](x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x\| = \|x\| \, \|x^*\|, \quad x^* \in X^*.$$

Άρα, $\tau(x) \in X^{**}$ και $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$. □

Λήμμα 4.4.2 *Η απεικόνιση $\tau : X \to X^{**}$ με $x \mapsto \tau(x)$ είναι γραμμική ισομετρία. Ειδικότερα, η τ είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη: (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} [\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](x^*) &= x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 x^*(x_1) + \lambda_2 x^*(x_2) \\ &= \lambda_1[\tau(x_1)](x^*) + \lambda_2[\tau(x_2)](x^*) \\ &= [\lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)](x^*). \end{aligned}$$

Άρα, $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)$, δηλαδή η τ είναι γραμμική.

(β) Έστω $x \in X$. Από εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x_0^*\| = 1$ και $x_0^*(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|=1} |[\tau(x)](x^*)| \geq |[\tau(x)](x_0^*)| = |x_0^*(x)| = \|x\|.$$

Δηλαδή, $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|$. Στο προηγούμενο Λήμμα είδαμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Επομένως,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \|x\|,$$

και η τ είναι ισομετρία.

(γ) Προφανώς, $\tau(x) = 0 \Longrightarrow \|\tau(x)\|_{X^{**}} = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Επειδή η τ είναι γραμμική, αυτό δείχνει ότι η τ είναι ένα προς ένα. □

Άμεση συνέπεια των δύο λημμάτων είναι το εξής:

Θεώρημα 4.4.1 *Κάθε χώρος X με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον X^{**} μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την*

$$[\tau(x)](x^*) = x^*(x). \quad \Box$$

Παρατηρήσεις (α) Ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο $\tau(x)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}. Πράγματι, ο X^{**} είναι πλήρης και ο $\tau(X)$ γραμμικός υπόχωρος του X^{**}. Ο $\tau(X)$ είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι πλήρης, όμως ο $\tau(X)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο X είναι πλήρης.

(β) **Ορισμός** Η απεικόνιση τ λέγεται *κανονική εμφύτευση* του X στον X^{**}. Ο X λέγεται *αυτοπαθής* αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η τ είναι επί. Τότε, ο X είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}.

(γ) Η ιδιότητα της αυτοπάθειας *δεν* είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισομετρικού ισομορφισμού ανάμεσα στους X και X^{**}. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε *είναι* ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}, αλλά με πολύ ισχυρό τρόπο: η κανονική εμφύτευση τ είναι ισομετρία επί από τον X στον X^{**}. Ο James (1951) έχει δώσει παράδειγμα χώρου που είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του, χωρίς να είναι αυτοπαθής.

(δ) Υπάρχουν πολλοί μη αυτοπαθείς χώροι. Πρώτα-πρώτα, ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής.

Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Αν ο c_0 ήταν αυτοπαθής, τότε οι c_0 και ℓ_∞ θα ήταν ισομετρικά ισομορφικοί. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού ο c_0 είναι διαχωρίσιμος ενώ ο ℓ_∞ όχι.

Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞^*, δηλαδή ο ℓ_∞^* θα ήταν διαχωρίσιμος. Όμως αυτό θα σήμαινε ότι και ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

Πρόταση 4.4.1 *Ο $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Έχουμε δεί ότι η απεικόνιση $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ που ορίζεται από την

$$[Tg](f) = \int_\Omega fg\, d\mu, \qquad f \in L^p(\mu)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Όμοια, η απεικόνιση $S : L^p(\mu) \to (L^q(\mu))^*$ που ορίζεται από την

$$[Sf](g) = \int_\Omega fg\, d\mu, \qquad g \in L^q(\mu)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\tau : L^p(\mu) \to (L^p(\mu))^{**}$ είναι επί. Έστω λοιπόν $x^{**} \in (L^p(\mu))^{**}$. Δηλαδή, η $x^{**} : (L^p(\mu))^* \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Τότε, η $x^{**} \circ T : L^q(\mu) \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^q(\mu)$, άρα υπάρχει $f \in L^p(\mu)$ τέτοια ώστε

$$x^{**} \circ T = Sf.$$

Θα δείξουμε ότι $\tau(f) = x^{**}$ ελέγχοντας ότι συμφωνούν σε κάθε $x^* \in (L^p(\mu))^*$. Έστω $x^* \in (L^p(\mu))^*$. Υπάρχει $g \in L^q(\mu)$ τέτοια ώστε $x^* = Tg$. Τότε,

$$x^{**}(x^*) = x^{**}(Tg) = (x^{**} \circ T)(g) = [Sf](g) = \int_\Omega fg\, d\mu$$

και

$$[\tau(f)](x^*) = x^*(f) = [Tg](f) = \int_\Omega fg\, d\mu.$$

Άρα $x^{**}(x^*) = [\tau(f)](x^*)$.

Αυτό αποδεικνύει ότι η τ είναι επί, άρα ο $L^p(\mu)$ είναι αυτοπαθής. □

Με τελείως ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το εξής.

Πρόταση 4.4.2 *Ο ℓ_p, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.* □

Δείχνουμε τώρα κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα για τους αυτοπαθείς χώρους και για τον τρόπο με τον οποίο η κανονική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$ μπορεί να μάς δώσει πληροφορίες για τον X.

Πρόταση 4.4.3 *Έστω X χώρος Banach. Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Έστω $\tau : X \to X^{**}$ και $\tau_1 : X^* \to X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tau(X) = X^{**}$. Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$. Ζητάμε $x_0^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Ορίζουμε το x_0^* ως εξής: αν $x \in X$ τότε $\tau(x) \in X^{**}$, οπότε θέτουμε

$$x_0^*(x) := (x_0^{***})(\tau(x)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το x_0^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αφού

$$|x_0^*(x)| = |(x_0^{***})(\tau(x))| \leq \|x_0^{***}\| \cdot \|\tau(x)\| = \|x_0^{***}\| \cdot \|x\|,$$

βλέπουμε ότι $x_0^* \in X^*$ και $\|x_0^*\| \leq \|x_0^{***}\|$.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Άρα,

$$\begin{aligned} [\tau_1(x_0^*)](x^{**}) &= x^{**}(x_0^*) = [\tau(x)](x_0^*) \\ &= x_0^*(x) = x_0^{***}(\tau(x)) \\ &= x_0^{***}(x^{**}). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\tau_1(X^*) = X^{***}$ και ας υποθέσουμε ότι $\tau(X) \neq X^{**}$. Τότε, ο $\tau(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} άρα υπάρχει μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x_0^{***} \in X^{***}$ τέτοιο ώστε $x_0^{***}(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_0^*(x) = [\tau(x)](x_0^*) = [\tau_1(x_0^*)](\tau(x)) = x_0^{***}(\tau(x)) = 0,$$

δηλαδή $x_0^* = 0$. Όμως τότε, $x_0^{***} = \tau_1(x_0^*) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Η Πρόταση που ακολουθεί είναι ειδική περίπτωση της αρχής του ομοιόμορφου φράγματος και δίνει κριτήριο για το πότε ένα σύνολο φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών είναι φραγμένο.

Πρόταση 4.4.4 *Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X^*$. Το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} < +\infty$.*

Απόδειξη: Αν το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x^*\| \leq M$ για κάθε $x^* \in A$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} \leq M\|x\| < +\infty.$$

Το αντίστροφο είναι ειδική περίπτωση της αρχής του ομοιόμορφου φράγματος (Θεώρημα 4.1.1). □

Η δυϊκή πρόταση χρησιμοποιεί την κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Πρόταση 4.4.5 *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subseteq X$. Το A είναι φραγμένο σύνολο αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sup\{|x^*(x)| : x \in A\} < +\infty$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Τότε, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\|\,\|x\| \leq M\|x^*\|, \quad x \in A.$$

Δηλαδή, το $\{x^*(x) : x \in A\}$ είναι φραγμένο.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε το σύνολο $\tau(A) = \{\tau(x) : x \in A\} \subseteq X^{**}$. Το $\tau(A)$ είναι υποσύνολο του δυϊκού του X^* και από την υπόθεσή μας,

$$\sup\{|(\tau(x))(x^*)| : \tau(x) \in \tau(A)\} = \sup\{|x^*(x)| : x \in A\} < +\infty.$$

Αφού ο X^* είναι χώρος Banach, εφαρμόζεται η προηγούμενη Πρόταση (με τους $X^*, X^{**}, \tau(A)$ στην θέση των X, X^*, A αντίστοιχα) και έχουμε ότι το $\tau(A)$ είναι φραγμένο στον X^{**}. Αφού η τ είναι ισομετρία, το A είναι φραγμένο στον X. □

Ασκήσεις

1. Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Δείξτε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x\|$.

Κεφάλαιο 5

Στοιχειώδης θεωρία χώρων Hilbert

5.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μιά συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x,x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, για κάθε $x,y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x,y\rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 5.1.1 (ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x,y \in X$, τότε*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x,y \in X$ και $M = |\langle x,y\rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\langle x,y\rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= |\lambda|^2\langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \overline{\lambda\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x,y\rangle) + \langle y,y\rangle \\ &= r^2\langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\theta-t)}) + \langle y,y\rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta-t)} = -1$. Τότε, παίρνουμε

$$r^2\langle x,x\rangle - 2rM + \langle y,y\rangle \geq 0$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y,y\rangle}/\sqrt{\langle x,x\rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. $\square$

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 5.1.2 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. $\square$

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x, y) \to x + y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

Πρόταση 5.1.3 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\|. \end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle. \quad \square$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X.

Ορισμός Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον X τέτοιο ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x, y \in X$. Δείξτε ότι
(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x+ay\| = \|x-ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x+ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i\neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

5. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

5.2 Καθετότητα

Ορισμός Έστω H χώρος Hilbert. Λέμε ότι τα $x, y \in H$ είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*), και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $x \in H$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του H, λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.

Παρατηρήσεις: (α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός Έστω H χώρος Hilbert, και M γραμμικός υπόχωρος του H. Ορίζουμε

$$M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M, \ \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (άσκηση).

Πρόταση 5.2.1 *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του x στον M.

Απόδειξη: Θέτουμε $\delta = d(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M τέτοια ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2.
\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός), και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}
0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\|\frac{y + y'}{2} - x\|^2 \\
&\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$. $\square$

Πρόταση 5.2.2 *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 5.2.1, $x - P_M(x) \perp M$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M. Τότε, υπάρχει $z \in M$ τέτοιο ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\ &= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

Πόρισμα 5.2.1 *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in H\backslash M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Πόρισμα 5.2.2 *Ένας γραμμικός υπόχωρος F του H είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον F είναι το 0.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο F είναι πυκνός στον H, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο F είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Άρα, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι πυκνός στον H. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Άρα, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$.

Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. □

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω H χώρος Hilbert, και M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Τότε, $H = M \oplus M^\perp$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M,\ x_2 \in M^\perp.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Τότε, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^\perp$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^\perp$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^\perp$$

γιατί οι $M, M^\perp$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Άρα, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ' όπου έπεται η μοναδικότητα του τρόπου γραφής. □

Πόρισμα 5.2.3 *Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο P_M είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.*

Απόδειξη: Αν $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda x_1 + \mu x_1') + (\lambda x_2 + \mu x_2') \in M + M^{\perp},$$

οπότε

$$P_M(\lambda x + \mu x') = \lambda x_1 + \mu x_1' = \lambda P_M(x) + \mu P_M(x'),$$

άρα ο P_M είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο P_M είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Άρα,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1. \quad \square$$

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 5.2.1 *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle y, a\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\|\,\|x\|.$$

Άρα, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leq \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geq \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a\rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). $\square$

Το Θεώρημα του Riesz μάς λέει ότι κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται σαν $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 5.2.2 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M. Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Άρα $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \langle y, \frac{\overline{f(z)}z}{\|z\|^2}\rangle = f_a(y),\end{aligned}$$

όπου $a = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a\rangle = \langle y, a'\rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Άρα, $a = a'$. □

Πόρισμα 5.2.4 *Έστω H χώρος Hilbert πάνω από το $\mathbb{R}$. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι γραμμική ισομετρία επί (ισομετρικός ισομορφισμός).*

Απόδειξη: (α) Για την γραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a+\mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a'\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle x, a'\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a+\mu a'} = \lambda f_a + \mu f_{a'} = \lambda T(a) + \mu T(a').$$

(β) Από το Λήμμα, $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ τέτοιο ώστε $T(a) = f_a = f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. □

Θεώρημα 5.2.3 *Έστω M κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in M^*$. Υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_M = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{M^*}$.*

Απόδειξη: Ο M είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μάς δίνει μοναδικό $w \in M$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in M.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{M^*} = \|w\| = \|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle x, w - u\rangle = 0$ για κάθε $x \in M$, οπότε $w - u = z \in M^{\perp}$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα, και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \Longrightarrow w = u$. Έπεται ότι $g = \tilde{f}$. $\square$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι

(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

3. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

4. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

5. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

6. Στο χώρο $C[-1,1]$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

(α) Αν $F = \{f \in C[-1,1] : \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $F^{\perp}$.

(β) Αν $G = \{f \in C[-1,1] : \int_{0}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $G^{\perp}$ και αποδείξτε ότι $G^{\perp\perp} \neq G$.

7. Σε έναν χώρο Hilbert H δίνεται ένας γραμμικός τελεστής $T : H \to H$ με τις ιδιότητες: $T^2 = T$, $\|T\| \leq 1$. Αν $F = \mathrm{Ker}T$, δείξτε ότι:

(α) $T(H) \subseteq F^{\perp}$.

(β) Ο T είναι η ορθογώνια προβολή στον $F^{\perp}$.

8. Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη: Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

5.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Μιά οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μιά ορθοκανονική οικογένεια στον X, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Ορισμός Έστω H χώρος Hilbert. Μιά μεγιστική (με την έννοια του εγκλεισμού) ορθοκανονική οικογένεια λέγεται *ορθοκανονική βάση* του H. Παρατηρήστε ότι αν μιά ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H τότε

$$H = \overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}}.$$

Αυτό είναι συνέπεια του Πορίσματος 5.2.1. Επίσης, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Zorn μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.

Πρόταση 5.3.1 *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H και για κάθε $x \in H$ έχουμε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_i : i \in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία της βάσης, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$.

Θεωρούμε λοιπόν μία ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα). Ο ισχυρισμός είναι ότι για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|.$$

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Τότε,

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \langle x, e_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Άρα,

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $H = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\| < \varepsilon.$$

Όμως τότε, για κάθε $M > N$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{i=1}^{M} \langle x, e_i\rangle e_i\| &= d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_M\}) \\ &\leq d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_N\}) \\ &\leq \|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n \to x$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n. \qquad \square$$

Πρόταση 5.3.2 *Έστω $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Τότε,*

(α) Ισχύει η ανισότητα του Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle)^2 \leq \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

(β) Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε ισχύει η ισότητα του Parseval

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle)^2 = \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

(γ) Αν η ισότητα του Parseval ισχύει για κάθε $x \in H$, τότε η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.
(δ) Αν $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$, τότε η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

Απόδειξη: (α) Στην απόδειξη της Πρότασης 5.3.1 είδαμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq d^2(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα του Bessel.

(β) Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = d^2(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) \to 0,$$

απ' όπου παίρνουμε την ισότητα του Parseval.

(γ) Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του H, τότε $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}} \neq H$. Τότε, υπάρχει $y \neq 0$ στον H με την ιδιότητα $y \perp e_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Όμως τότε, από την Parseval παίρνουμε

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, e_i\rangle|^2 = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(δ) Έστω ότι $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}} = H$ και ότι η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του H. Επιλέγουμε μη μηδενικό y με την ιδιότητα $y \perp e_i$, $i \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $z_m \in \mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $z_m \to y$. Τότε, έχουμε $\langle y, z_m\rangle = 0$ για κάθε m, άρα

$$\langle y, y\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle z_m, y\rangle = 0,$$

δηλαδή $y = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 5.3.1 (Riesz-Fisher) *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_2.*

Απόδειξη: Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle, \ldots).$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (άρα και ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m\rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m\rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. □

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

2. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.

3. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

4. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Κεφάλαιο 6

Φασματική θεωρία

6.1 Το φάσμα ενός τελεστή

Έστω X ένας χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$. Γράφουμε $B(X)$ για τον χώρο όλων των φραγμένων τελεστών $T : X \to X$. Ο $B(X)$ είναι χώρος Banach. Επιπλέον είναι *άλγεβρα* με πολλαπλασιασμό την σύνθεση τελεστών. Ορίζουμε $T^0 = I$ και $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (n όροι) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε έτσι να μιλάμε για δυνάμεις τελεστών, πολυώνυμα τελεστών κλπ.

Ορισμοί (α) Ένας τελεστής $T \in B(X)$ λέγεται *αντιστρέψιμος* αν υπάρχει $S \in B(X)$ με την ιδιότητα

$$S \circ T = I = T \circ S.$$

Ο S συμβολίζεται με T^{-1}. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ και $\mathrm{Im}(T) = X$.

(β) Το *φάσμα* $\sigma(T)$ ενός τελεστή $T \in B(X)$ είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ο $\lambda I - T$ *δεν* είναι αντιστρέψιμος. Άρα, $\lambda \in \sigma(T)$ αν και μόνο αν είτε $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ ή $\mathrm{Im}(\lambda I - T) \neq X$.

Αν $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, τότε ο λ είναι *ιδιοτιμή* του T και κάθε μη μηδενικό $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του T για την ιδιοτιμή λ (το x ικανοποιεί την $Tx = \lambda x$).

Θα δείξουμε ότι για κάθε $T \in B(X)$ το φάσμα $\sigma(T)$ είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του δίσκου $B(0, \|T\|) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε αρκετά ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Πρόταση 6.1.1 *Έστω $T \in B(X)$ και $\|T\| < 1$. Τότε, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως στον $B(X)$.

Απόδειξη: Η σύγκλιση της σειράς έπεται από την $\|T\| < 1$: Αφού $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ για κάθε k, παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Χρησιμοποιώντας την $\lim_n T^n = 0$, βλέπουμε ότι

$$(I-T)\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) = \lim_{n\to\infty}(I-T)\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) = \lim_{n\to\infty}(I-T^{n+1}) = I.$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T) = I. \qquad \square$$

Πόρισμα 6.1.1 *Έστω $T \in B(X)$. Το $\sigma(T)$ περιέχεται στον $B(0, \|T\|)$ και*

$$(*) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \|(\lambda I - T)^{-1}\| = 0.$$

Απόδειξη: Αν $|\lambda| > \|T\|$, τότε $\|(T/\lambda)\| < 1$ και από την Πρόταση 6.1.1 ο τελεστής $I - (T/\lambda)$, άρα και ο $\lambda I - T$, είναι αντιστρέψιμος. Έπεται ότι $\lambda \notin \sigma(T)$. Επίσης,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - (T/\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

και

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - T)^{-1}\| &\leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^k \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-(\|T\|/|\lambda|)} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε την $(*)$. $\square$

Πρόταση 6.1.2 *Έστω $S, T \in B(X)$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος και ότι $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Τότε ο S είναι αντιστρέψιμος και*

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S-T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S-T\|}.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση της Πρότασης,

$$\|T^{-1}(T-S)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|S-T\| < 1.$$

Από την Πρόταση 6.1.1, ο $I - T^{-1}(T-S)$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\left(I - T^{-1}(T-S)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T^{-1}(T-S)\right)^k.$$

Άρα,

$$S^{-1} = [T-(T-S)]^{-1} = [T(I-T^{-1}(T-S))]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [T^{-1}(T-S)]^k T^{-1},$$

και

$$\begin{aligned}
\|S^{-1} - T^{-1}\| &= \|\sum_{k=0}^{\infty}[T^{-1}(T-S)]^k T^{-1} - T^{-1}\| \\
&= \|\sum_{k=1}^{\infty}[T^{-1}(T-S)]^k T^{-1}\| \\
&\leq \|T^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|T^{-1}\| \cdot \|S-T\|\right)^k \\
&= \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S-T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S-T\|}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Πόρισμα 6.1.2 *Έστω $T \in B(X)$. Το φάσμα $\sigma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ είναι ανοιχτό. Έστω $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε ο $\lambda_0 I - T$ να είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $\varepsilon = 1/\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\| > 0$. Αν $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, τότε

$$\|(\lambda I - T) - (\lambda_0 I - T)\| = |\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1},$$

οπότε η Πρόταση 6.1.2 μάς λέει ότι ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή, $D(\lambda_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. $\square$

Σκοπός μας είναι τώρα να δείξουμε ότι $\sigma(T) \neq \emptyset$. Θα χρειαστούμε το θεώρημα του Liouville για αναλυτικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής με τιμές σε χώρο Banach.

Ορισμός Έστω X χώρος Banach, A ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $F : A \to X$. Η F λέγεται *αναλυτική* αν για κάθε $z_0 \in A$ υπάρχουν $r > 0$ με $D(z_0, r) \subseteq A$ και $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \in X$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \cdot |z - z_0|^k < +\infty$$

και
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z - z_0)^k$$
για κάθε $z \in D(z_0, r)$.

Με αυτόν τον ορισμό, μπορούμε να γενικεύσουμε το θεώρημα του Liouville ως εξής.

Λήμμα 6.1.1 *Έστω X χώρος Banach και $F : \mathbb{C} \to X$ αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|F(z)\| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε, η F είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Για κάθε $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική (ελέγξτε τις δύο συνθήκες του ορισμού). Επιπλέον,
$$\|(x^* \circ F)(z)\| \leq M\|x^*\|$$
για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα, η $x^* \circ F$ είναι φραγμένη ακέραια συνάρτηση. Από το θεώρημα του Liouville, η $x^* \circ F$ είναι σταθερή. Ειδικότερα,
$$x^*(F(z)) = x^*(F(0))$$
για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x^* \in X^*$, από το θεώρημα Hahn-Banach παίρνουμε
$$F(z) = F(0)$$
για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δηλαδή, η F είναι σταθερή. □

Πρόταση 6.1.3 *Αν $T \in B(X)$, τότε $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\sigma(T) = \emptyset$. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος (ειδικότερα, ο T είναι αντιστρέψιμος). Ορίζουμε $F : \mathbb{C} \to B(X)$ με
$$F(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}.$$
Παρατηρούμε ότι αν $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ και $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1}$, τότε από την Πρόταση 6.1.2 ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος και
$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)]^k (\lambda_0 I - T)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 I - T)^{-k-1}(\lambda_0 - \lambda)^k.\end{aligned}$$
Επίσης,
$$\sum_{k=0}^{\infty} \|(\lambda_0 I - T)^{-k-1}\| \cdot |\lambda_0 - \lambda|^k < +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η F είναι αναλυτική. Από το Πόρισμα 6.1.1,

$$\|F(\lambda)\| = \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \to 0$$

όταν $|\lambda| \to \infty$. Άρα, η F είναι $\|\cdot\|$-φραγμένη. Από το Λήμμα 6.1.1, η F είναι σταθερή και αφού $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|F(\lambda)\| = 0$ παίρνουμε $F \equiv 0$ στο $\mathbb{C}$. Αυτό είναι άτοπο: ο μηδενικός τελεστής δεν είναι αντιστρέψιμος! □

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην ακόλουθη περιγραφή του φάσματος.

Θεώρημα 6.1.1 *Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X)$. Το φάσμα $\sigma(T)$ του T είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $B(0, \|T\|)$.* □

Ορισμός Έστω $T \in B(X)$. Η *φασματική ακτίνα* $r(T)$ του T είναι ο αριθμός

$$r(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Έχουμε ήδη δεί ότι το max ορίζεται καλά και ότι $r(T) \leq \|T\|$. Θα δείξουμε τον *τύπο του Gelfand* για την φασματική ακτίνα.

Θεώρημα 6.1.2 *Έστω X χώρος Banach. Για κάθε $T \in B(X)$,*

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}.$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 6.1.2 *Έστω $T \in B(X)$ και $p(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$ ένα πολυώνυμο ($a_m \neq 0$). Θεωρούμε τον τελεστή $p(T) = a_m T^m + \cdots + a_1 T + a_0 I \in B(X)$. Τότε,*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lambda_0 \in \sigma(p(T))$. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(z) - \lambda_0 = a_m(z - \mu_1)\dots(z - \mu_m).$$

Ο τελεστής $p(T) - \lambda_0 I = a_m(T - \mu_1 I)\dots(T - \mu_m I)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, άρα υπάρχει $k \leq m$ για τον οποίο ο $T - \mu_k I$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε, $\mu_k \in \sigma(T)$ και $p(\mu_k) - \lambda_0 = 0$, δηλαδή $\lambda_0 \in p(\sigma(T))$. Άρα, $\sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$.

Αντίστροφα, αν $\lambda_0 = p(\lambda)$ για κάποιον $\lambda \in \sigma(T)$, τότε

$$p(z) - \lambda_0 = p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z),$$

όπου q πολυώνυμο βαθμού $m - 1$. Τότε,

$$(*) \qquad p(T) - \lambda_0 I = (T - \lambda I)q(T) = q(T)(T - \lambda I).$$

Αν είχαμε $\lambda_0 \notin \sigma(p(T))$, τότε ο $p(T) - \lambda_0 I$ θα ήταν αντιστρέψιμος και από την $(*)$ ο $T - \lambda I$ θα ήταν 1-1 και επί, οπότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο $T - \lambda I$ θα ήταν αντιστρέψιμος, άτοπο. Άρα, $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$, και έπεται το Λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2: Από το Λήμμα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sigma(T^k) = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Άρα,

$$r(T^k) = [r(T)]^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Έπεται ότι

$$[r(T)]^k = r(T^k) \leq \|T^k\|$$

για κάθε k, άρα

$$r(T) \leq \liminf_k \|T^k\|^{1/k}.$$

Έστω τώρα $x^* \in X^*$ και $x \in X$. Ορίζουμε $F : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathbb{C}$ με

$$F(\lambda) = x^*((\lambda I - T)^{-1}(x)).$$

Κάθε τέτοια F είναι αναλυτική συνάρτηση και αναπαρίσταται στη μορφή

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^*(T^n(x))}{\lambda^{n+1}}.$$

Αν $R > r(T)$ και C_R είναι ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα R, έχουμε

$$\int_{C_R} \lambda^k F(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{k-n-1} x^*(T^n(x)) d\lambda = 2\pi i x^*(T^k(x))$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Δηλαδή, αν $\|x^*\| \leq 1$ και $\|x\| \leq 1$ τότε

$$\begin{aligned} |x^*(T^k(x))| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \lambda^k F(\lambda) d\lambda \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (2\pi R) \max_{\lambda \in C_R} \left(|\lambda|^k |x^*((\lambda I - T)^1(x))| \right) \\ &\leq R^{k+1} \max_{\lambda \in C_R} \|(\lambda I - T)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Παίρνοντας sup ως προς x^*, x, βλέπουμε ότι

$$\|T^k\|^{1/k} \leq R \left(R \max_{\lambda \in C_R} \|(\lambda I - T)^{-1}\| \right)^{1/k},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\limsup_k \|T^k\|^{1/k} \leq R.$$

Αφού το $R > r(T)$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\limsup_k \|T^k\|^{1/k} \leq r(T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατηρήσεις - παραδείγματα. (α) Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε ο $T \in B(X)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Επομένως, $\lambda \in \sigma(T)$ αν και μόνο αν ο λ είναι ιδιοτιμή του T.

(β) Το φάσμα $\sigma(T)$ δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με το σύνολο των ιδιοτιμών. Ο $T:\ell_2\to\ell_2$ με $T(x_1,x_2,\ldots)=(0,x_1,x_2,\ldots)$ (η δεξιά μετατόπιση) δεν είναι αντιστρέψιμος, άρα $0\in\sigma(T)$. Όμως, $\|Tx\|=\|x\|$ για κάθε $x\in\ell_2$, άρα ο 0 δεν είναι ιδιοτιμή του T.

(γ) Το φάσμα ενός τελεστή μπορεί να είναι υπεραριθμήσιμο. Αν θεωρήσουμε τον $T:\ell_2\to\ell_2$ με $T(x_1,x_2,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots)$ (την αριστερή μετατόπιση), τότε κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$ με $|\lambda|<1$ είναι ιδιοτιμή του T: το $x_\lambda=(1,\lambda,\lambda^2,\ldots)$ ανήκει στον ℓ_2 και $T(x_\lambda)=\lambda x_\lambda$. Άρα, $\{\lambda:|\lambda|<1\}\subseteq\sigma(T)$. Αφού $\|T\|=1$ και το φάσμα είναι κλειστό υποσύνολο του $B(0,\|T\|)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma(T)=B(0,\|T\|).$$

Ασκήσεις

1. Έστω $T\in B(X)$. Δείξτε ότι ο $\exp(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{n!}$ είναι αντιστρέψιμος τελεστής.

2. Δείξτε ότι $\sigma(\exp(T))=\exp(\sigma(T))$.

3. Έστω $T:\ell_2\to\ell_2$ διαγώνιος τελεστής: δηλαδή, για κάποια φραγμένη ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{C}$,

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots).$$

Βρείτε το σύνολο των ιδιοτιμών και το φάσμα του T.

4. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Δείξτε ότι υπάρχει τελεστής $T\in B(X)$ με την ιδιότητα $\sigma(T)=K$.

5. Υποθέτουμε ότι οι $S,T\in B(X)$ αντιμετατίθενται, δηλαδή $S\circ T=T\circ S$. Δείξτε ότι $r(S+T)\le r(S)+r(T)$ και $r(S\circ T)\le r(S)r(T)$.

6. Υποθέτουμε ότι $r(T)<1$. Δείξτε ότι η

$$\|x\|_0=\sum_{n=0}^{\infty}\|T^nx\|$$

είναι νόρμα στον X ισοδύναμη προς την αρχική νόρμα $\|\cdot\|$.

7. Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα

$$a_{m+n}^{m+n}\le a_m^m a_n^n,\quad m,n\in\mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $a_n\to\inf\{a_k:k\in\mathbb{N}\}$. Χρησιμοποιώντας το, δείξτε ότι αν $T\in B(X)$ τότε το $\lim_k\|T^k\|^{1/k}$ υπάρχει.

6.2 Ο συζυγής τελεστής

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και $T:X\to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο *συζυγής* τελεστής του T είναι ο $T^*:Y^*\to X^*$ που ορίζεται από την

$$T^*(y^*)=y^*\circ T.$$

Η Πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι ο T^* είναι όντως φραγμένος γραμμικός τελεστής. Παρατηρήστε ότι η πληρότητα των X και Y δεν είναι απαραίτητη για τον ορισμό του T^*. Στο υπόλοιπο όμως αυτής της παραγράφου υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι χώροι Banach.

Πρόταση 6.2.1 *Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T^* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.*

Απόδειξη: Ο T^* είναι καλά ορισμένος: αν $y^* : Y \to \mathbb{K}$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, τότε το $T^*(y^*) = y^* \circ T : X \to \mathbb{K}$ είναι επίσης γραμμικό και συνεχές.

Ο T^* είναι γραμμικός τελεστής: αν $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ και $a, b \in \mathbb{K}$, τότε

$$T^*(ay_1^* + by_2^*) = (ay_1^* + by_2^*) \circ T = a(y_1^* \circ T) + b(y_2^* \circ T) = aT^*(y_1^*) + bT^*(y_2^*).$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} |y^*(Tx)| \\ &= \sup_{\|y^*\|=1} \sup_{\|x\|=1} |y^*(Tx)| = \sup_{\|y^*\|=1} \|T^*(y^*)\| \\ &= \|T^*\|. \quad \square \end{aligned}$$

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα και $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\emptyset \neq B \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : \forall a \in A \ \ x^*(a) = 0\}$$

και

$${}^\perp B = \{x \in X : \forall b^* \in B \ \ b^*(x) = 0\}.$$

Η επόμενη Πρόταση μάς δίνει μία πρώτη σχέση ανάμεσα σε έναν τελεστή και τον συζυγή του.

Πρόταση 6.2.2 *Έστω X και Y χώροι Banach. Αν $T : X \to Y$ είναι ένας φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp \quad , \quad \mathrm{Ker}(T) = {}^\perp\,\mathrm{Im}(T^*).$$

Απόδειξη: Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y^* \in \mathrm{Ker}(T^*) &\Leftrightarrow y^* \circ T = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \ \ y^*(Tx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathrm{Im}(T), \ \ y^*(z) = 0 \Leftrightarrow y^* \in \mathrm{Im}(T)^\perp. \end{aligned}$$

Για την δεύτερη, γράφουμε

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^*, \ \ y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^*, \ \ (T^*(y^*))(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x^* \in \mathrm{Im}(T^*), \ \ x^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in {}^\perp\,\mathrm{Im}(T^*). \quad \square \end{aligned}$$

Πρόταση 6.2.3 *Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε, η $\mathrm{Im}(T)$ είναι πυκνή στον Y αν και μόνο αν ο T^* είναι 1-1.*

Απόδειξη: Παρατηρήστε πρώτα ότι αν W είναι ένας υπόχωρος του Y, τότε $\overline{W} = Y$ αν και μόνο αν $W^\perp = \{0\}$ (άσκηση). Από την Πρόταση 6.2.2,

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = Y \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T^*) = \{0\},$$

δηλαδή αν και μόνο αν ο T^* είναι 1-1. □

Στη συνέχεια δίνουμε χαρακτηρισμό μέσω του T^* για το πότε ο T είναι επί. Θα χρειαστούμε κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Λήμμα 6.2.1 *Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $c\|y^*\| \leq \|T^*(y^*)\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$, τότε υπάρχει άλλη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε $T(D_X) \supseteq c_1 D_Y$ (D_X και D_Y είναι οι ανοιχτές μοναδιαίες μπάλες των X και Y αντίστοιχα).*

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{T(D_X)} \supseteq cD_Y$. Έστω ότι υπάρχει κάποιο $y_0 \in cD_Y \setminus \overline{T(D_X)}$. Τότε, τα y_0 και $\overline{T(D_X)}$ διαχωρίζονται γνήσια: δηλαδή, υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*(y_0) > 1$ και $y^*(Tx) \leq 1$ για κάθε $x \in D_X$.

Τότε, λόγω συμμετρίας της D_X,

$$\|T^*(y^*)\| = \sup_{x \in D_X} |y^*(Tx)| = \sup_{x \in D_X} y^*(Tx) \leq 1.$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση του Λήμματος, παίρνουμε

$$c\|y^*\| \leq \|T^*(y^*)\| \leq 1 < y^*(y_0) \leq \|y^*\| \cdot \|y_0\|,$$

δηλαδή

$$\|y_0\| > c \Longrightarrow y_0 \notin cD_Y$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\overline{T(D_X)} \supseteq cD_Y$. Τώρα, το τελικό βήμα της απόδειξης του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης δίνει το ζητούμενο με $c_1 = c/2$. □

Πρόταση 6.2.4 *Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Η $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστή στον Y αν και μόνο αν η $\mathrm{Im}(T^*)$ είναι κλειστή στον X^*.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστή στον Y. Από την Πρόταση 6.2.2 έχουμε ${}^\perp\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)$ άρα $\mathrm{Im}(T^*) \subseteq \mathrm{Ker}(T)^\perp$ (άσκηση). Θα δείξουμε ότι ισχύει ισότητα: $\mathrm{Ker}(T)^\perp = \mathrm{Im}(T^*)$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, αφού κάθε $A^\perp$ είναι κλειστό σύνολο.

Έστω $x^* \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$. Ορίζουμε $F : \mathrm{Im}(T) \to \mathbb{K}$ με

$$F(Tx) = x^*(x).$$

Το F είναι καλά ορισμένο, γιατί αν $Tx = Tx'$ τότε $x - x' \in \mathrm{Ker}(T)$ οπότε $x^*(x - x') = 0$.

Από την υπόθεσή μας, ο $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, άρα χώρος Banach. Ο $T : X \to \mathrm{Im}(T)$ είναι φραγμένος και επί τελεστής, οπότε το πρώτο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης μάς εξασφαλίζει ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in \mathrm{Im}(T)$ να υπάρχει $x_y \in X$ με $Tx_y = y$ και $\|x_y\| \leq c\|y\|$. Τότε, για κάθε $y \in \mathrm{Im}(T)$ έχουμε

$$|F(y)| = |F(Tx_y)| = |x^*(x_y)| \leq \|x^*\| \cdot \|x_y\| \leq c\|x^*\| \cdot \|y\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*|_{\mathrm{Im}(T)} = F$. Τότε,

$$T^*(y^*) = y^* \circ T = y^*|_{\mathrm{Im}(T)} \circ T = F \circ T = x^*,$$

δηλαδή $x^* \in \mathrm{Im}(T^*)$. Αφού το $x^* \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\mathrm{Im}(T^*)$ είναι κλειστή στον X^*. Θεωρούμε τον χώρο Banach $Z = \overline{\mathrm{Im}(T)}$ και τον τελεστή $S : X \to Z$ με $S(x) = T(x)$. Η $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(T)$ είναι πυκνή στον Z, άρα ο $S^* : Z^* \to X^*$ είναι 1-1.

Δείχνουμε ότι $\mathrm{Im}(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$. Αν $z^* \in Z^*$, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $y^*|_Z = z^*$. Τότε,

$$T^*(y^*) = y^* \circ T = y^*|_Z \circ T = z^* \circ T = z^* \circ S = S^*(z^*).$$

Αυτό δείχνει την $\mathrm{Im}(S^*) \subseteq \mathrm{Im}(T^*)$. Αντίστροφα, αν $y^* \in Y^*$ τότε $T^*(y^*) = S^*(y^*|_Z)$, άρα $\mathrm{Im}(T^*) \subseteq \mathrm{Im}(S^*)$.

Από την υπόθεσή μας, η $\mathrm{Im}(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$ είναι κλειστή στον X^*, δηλαδή χώρος Banach. Ο $S^* : Z^* \to \mathrm{Im}(S^*)$ είναι φραγμένος, 1-1 και επί, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο $(S^*)^{-1}$ είναι φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $z^* \in Z^*$

$$\|z^*\| = \|(S^*)^{-1}(S^*z^*)\| \leq \frac{1}{c}\|S^*z^*\|.$$

Από το Λήμμα 6.2.1 υπάρχει $c_1 > 0$ τέτοιος ώστε $S(D_X) \supseteq c_1 D_Z$. Έπεται ότι

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S) = Z = \overline{\mathrm{Im}(T)},$$

δηλαδή η $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστή στον Y. □

Θεώρημα 6.2.1 *Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε, ο T είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $c\|y^*\| \leq \|T^*y^*\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$.*

Απόδειξη: Αν ο T είναι επί, τότε η $\mathrm{Im}(T)$ είναι πυκνή στον Y, άρα ο T^* είναι 1-1. Επίσης, η $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστή, άρα η Πρόταση 6.2.4 μάς λέει ότι η $\mathrm{Im}(T^*)$ είναι κλειστή. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για τον $T^* : Y^* \to \mathrm{Im}(T^*)$: ο $(T^*)^{-1}$ είναι φραγμένος τελεστής, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|y^*\| = \|(T^*)^{-1}(T^*y^*)\| \leq \frac{1}{c}\|T^*y^*\|$$

για κάθε $y^* \in Y^*$ (πάρτε $1/c = \|(T^*)^{-1}\|$).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $c\|y^*\| \leq \|T^*y^*\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Τότε ο T^* είναι 1-1 (γιατί;), οπότε η Πρόταση 6.2.3 μάς εξασφαλίζει ότι $\overline{\mathrm{Im}(T)} = Y$.

Θα δείξουμε ότι η $\mathrm{Im}(T^*)$ είναι κλειστή: αν η $(T^*y_n^*)$ είναι συγκλίνουσα, τότε είναι Cauchy. Από την $c\|y_n^* - y_m^*\| \leq \|T^*y_n^* - T^*y_m^*\|$ έπεται ότι η (y_n^*) είναι Cauchy, άρα υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y_n^* \to y^*$. Από τη συνέχεια του T^* έπεται ότι $T^*y_n^* \to T^*y^*$.

Τώρα, η Πρόταση 6.2.4 μάς λέει ότι η $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστή, άρα

$$\mathrm{Im}(T) = \overline{\mathrm{Im}(T)} = Y.$$

Δηλαδή, ο T είναι επί. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μερικές στοιχειώδεις ιδιότητες του συζυγούς τελεστή.

Πρόταση 6.2.5 *Έστω X, Y, Z χώροι Banach, $T, T_1 : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε,*

(i) Αν $a, b \in \mathbb{K}$, $(aT + bT_1)^* = aT^* + b(T_1)^*$.

(ii) $T^{**}|_X = T$.

(iii) Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε ο T^* είναι αντιστρέψιμος και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(iv) $(ST)^* = T^*S^*$.

Απόδειξη: (ii) Ο $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ είναι ο συζυγής του T^*. Δηλαδή, αν $x^{**} \in X^{**}$ τότε $T^{**}(x^{**}) = x^{**} \circ T^*$.

Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} [T^{**}(\tau(x))](y^*) &= [\tau(x)](T^*(y^*)) = [T^*(y^*)](x) \\ &= (y^* \circ T)(x) = y^*(Tx) \\ &= [\tau(Tx)](y^*). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $T^{**}(\tau(x)) = \tau(Tx)$ (εν «συντομία», $T^{**}(x) = T(x)$).

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}T)^{\perp} = Y^{\perp} = \{0\}$$

και

$$^{\perp}\mathrm{Im}T^* = \mathrm{Ker}T = \{0\} \implies \mathrm{Im}T^* = X^*.$$

Άρα, ο T^* είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε τον $(T^*)^{-1} : X^* \to Y^*$. Αν $x^* = T^*y^* \in X^*$ και $y = Tx \in Y$, τότε

$$[(T^*)^{-1}(x^*)](y) = y^*(y) = y^*(Tx) = [T^*(y^*)](x) = x^*(x),$$

ενώ

$$[(T^{-1})^*(x^*)](y) = x^*(T^{-1}y) = x^*(x),$$

επομένως $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\square$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X)$. Ένας υπόχωρος W του X λέγεται αναλλοίωτος για τον T αν $T(W) \subseteq W$. Δείξτε ότι ένας κλειστός υπόχωρος W του X είναι αναλλοίωτος για τον T αν και μόνο αν ο $W^\perp$ είναι αναλλοίωτος για τον T^*.

2. Δείξτε ότι ο $T \in B(X,Y)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $T^* \in B(Y^*, X^*)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

3. Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X)$. Δείξτε ότι $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

6.3 Συμπαγείς τελεστές

Ορισμός Έστω X και Y χώροι Banach. Ένας φραγμένος τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *συμπαγής* αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλαδή, αν το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές).

Εύκολα ελέγχουμε ότι ένας φραγμένος τελεστής $T : X \to Y$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) στον X υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) τέτοια ώστε η (Tx_{k_n}) να συγκλίνει.

Γράφουμε $K(X,Y)$ για το σύνολο των συμπαγών τελεστών $T : X \to Y$ και $K(X)$ για το σύνολο των συμπαγών τελεστών $T : X \to X$.

Για τη μελέτη των συμπαγών τελεστών θα χρειαστούμε κάποια κριτήρια συμπάγειας από την γενική τοπολογία.

Ορισμός Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Το A λέγεται *ολικά φραγμένο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο *ε-δίκτυο* του A. Δηλαδή, αν υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_m \in A$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m D(x_j, \varepsilon)$.

Λήμμα 6.3.1 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Αν το A είναι ολικά φραγμένο, τότε είναι σχετικά συμπαγές.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έστω (x_n) ακολουθία στο A. Αρκεί να δείξουμε ότι η (x_n) έχει Cauchy υπακολουθία (αυτή θα συγκλίνει γιατί ο X είναι πλήρης).

Για $\varepsilon = 1$, υπάρχουν $z_1, \dots z_m \in A$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m D(z_j, 1)$. Υπάρχει $j_0 \leq m$ τέτοιος ώστε άπειροι όροι της ακολουθίας (x_n) να ανήκουν στην $D(z_{j_0}, 1)$. Αυτοί ορίζουν μία υπακολουθία της (x_n) τους όρους της οποίας ονομάζουμε

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}, \dots,$$

με την ιδιότητα: για κάθε k, l

$$d(x_{1k}, x_{1l}) \leq d(x_{1k}, z_{j_0}) + d(z_{j_0}, x_{1l}) < 2.$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/2$ και δουλεύοντας όπως πρίν, βρίσκουμε υπακολουθία $x_{21}, x_{22}, \ldots$ της (x_{1k}) με την ιδιότητα: για κάθε k, l

$$d(x_{2k}, x_{2l}) < 1.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ακολουθία (x_{mk}) που είναι υπακολουθία της $(x_{m-1,k})$ και έχει την ιδιότητα: για κάθε k, l

$$d(x_{mk}, x_{ml}) < \frac{2}{m}.$$

Η διαγώνια υπακολουθία (x_{mm}) της (x_n) είναι Cauchy: πράγματι, αν $m < s$, τότε $d(x_{mm}, x_{ss}) < 2/m$. $\square$

Ορισμός Έστω (K, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο S του $C(K)$ ονομάζεται *ισοσυνεχές* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\rho(x, y) < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in S$.

Θεώρημα 6.3.1 (Ascoli-Arzelá) *Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα $S \subset C(K)$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν είναι φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη: Έστω ότι το S είναι σχετικά συμπαγές. Τότε είναι και ολικά φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Το S περιέχει ένα πεπερασμένο ε-δίκτυο $N = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Δηλαδή, για κάθε $f \in S$ υπάρχει $i \leq n$ τέτοιο ώστε $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $f \in S$ έχουμε

$$\|f\| < \varepsilon + \max \|f_i\|,$$

άρα το S είναι φραγμένο.

Επιπλέον, κάθε f_i είναι συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής στο K. Δηλαδή, για το ίδιο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta_i > 0$ ώστε για κάθε x, y με $d(x, y) < \delta_i$ να ισχύει $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Παίρνουμε $\delta = \min_i \delta_i > 0$. Αν $f \in S$ και $i \leq n$ τέτοιο ώστε $\|f - f_i\| < \varepsilon$, τότε για κάθε x, y με $\rho(x, y) < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

και από αυτό έπεται ότι το S είναι ισοσυνεχές.

Αντίστροφα τώρα, για να δείξουμε ότι το S είναι σχετικά συμπαγές πρέπει για τυχόν $\varepsilon > 0$, να κατασκευάσουμε πεπερασμένο ε-δίκτυο του S. Θεωρούμε το σύνολο $B(K, \mathbb{R})$ όλων των φραγμένων $h : K \to \mathbb{R}$ με απόσταση την

$$\|h - g\| = \sup_{x \in K} |h(x) - g(x)|.$$

Ο $B(K, \mathbb{R})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, και

$$B(K, \mathbb{R}) \supseteq C(K) \supseteq S.$$

Θα βρούμε $h_1, \ldots, h_m \in B(K, \mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $S \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(h_i, 2\varepsilon)$. Το S είναι ισοσυνεχές, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $f \in S$ και για κάθε $x, y \in K$

με $\rho(x,y) < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επίσης ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, άρα ολικά φραγμένος. Επομένως, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_s \in K$ τέτοια ώστε $K = \bigcup D(x_i, \delta)$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} U_1 &= D(x_1,\delta) \\ U_2 &= D(x_2,\delta) \setminus D(x_1,\delta) \\ &\cdots \\ U_i &= D(x_i,\delta) \setminus \bigcup_{j<i} D(x_j,\delta) \\ &\cdots \end{aligned}$$

Το S είναι φραγμένο, άρα υπάρχει διάστημα $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \in I$ για κάθε $x \in K$ και κάθε $f \in S$. Ορίζουμε διαμέριση $a = y_1 < y_2 < \ldots < y_l = b$ του $[a,b]$, με $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$, και θεωρούμε όλες τις $h : K \to \mathbb{R}$ που είναι σταθερές σε κάθε U_i και παίρνουν τιμές στο $\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$. Οι h είναι πεπερασμένες το πλήθος.

Έστω $f \in S$. Για κάθε $i \leq s$ υπάρχει $j(i) \leq l$ τέτοιο ώστε $|f(x_i) - y_j| < \varepsilon$. Τότε, θεωρούμε την $h : K \to \mathbb{R}$ που παίρνει τιμή $y_{j(i)}$ στο U_i. Αν $x \in K$, υπάρχει $i \leq s$ τέτοιο ώστε $x \in U_i$. Τότε,

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - y_{j(i)}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} D(h_i, 2\varepsilon).$$

Τέλος, για κάθε h παίρνουμε $f_h \in S$ με $f_h \in D(h, 2\varepsilon)$. Αν $f \in S$, υπάρχει h τέτοια ώστε $\|f - h\| < 2\varepsilon$ και $\|f_h - h\| < 2\varepsilon$. Από την τριγωνική ανισότητα, $\|f - f_h\| < 4\varepsilon$, δηλαδή $S \subseteq \bigcup_h D(f_h, 4\varepsilon)$. □

Παραδείγματα

(α) Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής με την ιδιότητα $\dim(\mathrm{Im}T) < \infty$. Ένας τέτοιος τελεστής λέγεται *πεπερασμένης τάξης*. Γράφουμε $F(X,Y)$ για το σύνολο των τελεστών $T : X \to Y$ πεπερασμένης τάξης και $F(X)$ για το σύνολο των τελεστών $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης.

Κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγής: αφού ο $Z = \mathrm{Im}(T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $T(B_X) \subseteq \|T\| B_Z$, το $\overline{T(B_X)}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Z (παρατηρήστε ότι ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του Y), άρα συμπαγές. Ειδικότερα, κάθε συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ είναι συμπαγής τελεστής από τον X στο $\mathbb{K}$.

Έστω $T \in F(X,Y)$ και $\{z_1, \ldots, z_m\}$ βάση του $Z = \mathrm{Im}(T)$. Υπάρχουν συναρτησοειδή $y_1^*, \ldots, y_m^* \in Y^*$ τέτοια ώστε $y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$, $i, j \leq m$ (γιατί;). Τότε, για κάθε $x \in X$ το Tx γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $Tx = \sum_{j=1}^m a_j z_j$ και

$$y_i^*(Tx) = \sum_{j=1}^m a_j y_i^*(z_j) = a_i,$$

δηλαδή, αν ορίσουμε $x_j^* = y_j^* \circ T$ έχουμε

$$T(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j^*(x) z_j, \quad x \in X.$$

Γράφουμε $x_j^* \otimes z_j$ για τον τελεστή από τον X στον Y που ορίζεται από την $x \mapsto x_j^*(x) z_j$. Με αυτόν τον συμβολισμό, κάθε τελεστής $T : X \to Y$ πεπερασμένης τάξης αναπαρίσταται στη μορφή

$$T = \sum_{j=1}^{m} x_j^* \otimes z_j$$

για κάποια $x_1^*, \ldots, x_m^* \in X^*$ και $z_1, \ldots, z_m \in Y$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο: κάθε τελεστής αυτής της μορφής είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης.

(β) Θεωρούμε τον $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Αν $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, ορίζουμε έναν τελεστή $T : X \to X$ με

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leq \|K\|_\infty$. Το σύνολο $T(B_X)$ είναι λοιπόν φραγμένο, και επιπλέον ισοσυνεχές υποσύνολο του $C[0,1]$. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τότε λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της K υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ και κάθε $y \in [0,1]$ να έχουμε $|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon$, οπότε για κάθε $f \in B_X$ και $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ έχουμε

$$|(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x_1,y) - K(x_2,y)| dy < \varepsilon.$$

Από το θεώρημα Ascoli-Arzelá, το $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές, άρα ο T είναι συμπαγής τελεστής.

(γ) Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I \in B(X)$. Αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε ο I δεν είναι συμπαγής γιατί η μοναδιαία μπάλα B_X του X δεν είναι (σχετικά) συμπαγές σύνολο.

(δ) Θεωρούμε τον $T : \ell_2 \to \ell_2$ με $T(x) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/2^{n-1}, \ldots)$. Παρατηρούμε ότι αν $y \in T(B_{\ell_2})$, τότε $|y_n| \leq 1/2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $y \in T(B_{\ell_2})$ να ισχύει

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |y_n|^2 < \varepsilon.$$

Έχουμε δεί ότι αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τα σχετικά συμπαγή υποσύνολα του ℓ_2. Επομένως, ο T είναι συμπαγής.

Θεώρημα 6.3.2 *Ο $K(X,Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(X,Y)$. Επιπλέον, αν $T \in K(X,Y)$ και $S \in B(Y,Z)$, $R \in B(W,X)$, τότε $S \circ T \in K(X,Z)$ και $T \circ R \in K(W,Y)$.*

Απόδειξη: (α) Ο $K(X,Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $B(X,Y)$. Έστω $T_1, T_2 \in K(X,Y)$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Αφού ο T_1 είναι συμπαγής, υπάρχει (x_{k_n}) τέτοια ώστε η $T_1 x_{k_n}$ να συγκλίνει, και αφού ο T_2 είναι συμπαγής υπάρχει $(x_{k_{l_n}})$ τέτοια ώστε η $T_2 x_{k_{l_n}}$ να συγκλίνει. Έπεται ότι η $(aT_1 + bT_2)(x_{k_{l_n}})$ συγκλίνει.

(β) Ο $K(X,Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(X,Y)$. Έστω (T_n) ακολουθία συμπαγών τελεστών με $T_n \to T \in B(X,Y)$. Θα δείξουμε ότι το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in B_X$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad T(B_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} D(Tx_j, \varepsilon).$$

Πράγματι, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|T - T_n\| < \varepsilon/3$ και αφού ο T_n είναι συμπαγής υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in B_X$ τέτοια ώστε $T_n(B_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} D(T_n x_j, \varepsilon/3)$. Αν $x \in B_X$, υπάρχει $j \leq m$ τέτοιος ώστε $\|T_n x_j - T_n x\| < \varepsilon/3$. Τότε,

$$\|Tx_j - Tx\| \leq \|T - T_n\| \cdot \|x_j\| + \|T_n x_j - T_n x\| + \|T - T_n\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Από τα (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι ο $K(X,Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(X,Y)$.

(γ) Έστω $T \in K(X,Y)$ και $S \in B(Y,Z)$. Αν (x_n) είναι μία φραγμένη ακολουθία στον X, από την συμπάγεια του T μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) τέτοια ώστε η Tx_{k_n} να συγκλίνει σε κάποιο $y \in Y$. Αφού ο S είναι συνεχής, $(S \circ T)(x_{k_n}) \to S(y)$. Άρα, ο $S \circ T$ είναι συμπαγής.

Έστω $T \in K(X,Y)$ και $R \in B(W,X)$. Έστω (w_n) φραγμένη ακολουθία στον W. Αφού ο R είναι φραγμένος, η (Rw_n) είναι φραγμένη. Αφού ο T είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία (Rw_{k_n}) τέτοια ώστε η $T(Rw_{k_n}) = (T \circ R)(w_{k_n})$ να συγκλίνει. Άρα, ο $T \circ R$ είναι συμπαγής. □

Είδαμε ότι $F(X,Y) \subseteq K(X,Y)$. Αφού ο $K(X,Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(X,Y)$, κάθε τελεστής που «προσεγγίζεται» από τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγής. Ένα γνωστό πρόβλημα στη θεωρία των χώρων Banach ήταν το *πρόβλημα της προσέγγισης*: Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής. Είναι σωστό ότι υπάρχει ακολουθία (T_n) τελεστών πεπερασμένης τάξης με την ιδιότητα $\|T_n - T\| \to 0$; Με άλλα λόγια, είναι σωστό ότι $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$;

Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε συστηματικά από τον Grothendieck, ο οποίος το συνέδεσε με την λεγόμενη *ιδιότητα προσέγγισης*: Λέμε ότι ένας χώρος Banach Y έχει την ιδιότητα προσέγγισης αν για κάθε συμπαγές $K \subseteq Y$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $P : Y \to Y$ πεπερασμένης τάξης τέτοιος ώστε $\|Py - y\| < \varepsilon$ για κάθε $y \in K$. Όπως θα δούμε παρακάτω, αν ο Y έχει την ιδιότητα προσέγγισης, τότε το πρόβλημα της προσέγγισης έχει καταφατική απάντηση: για κάθε χώρο Banach X ισχύει $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$. Αντίστροφα, ο Grothendieck απέδειξε ότι αν για κάθε χώρο Banach X, για κάθε συμπαγή τελεστή $T : X \to Y$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε τελεστή πεπερασμένης τάξης $T_\varepsilon : X \to Y$ με $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$, τότε ο Y έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Η ιδιότητα προσέγγισης με τη σειρά της συνδέεται με την ύπαρξη βάσης Schauder για διαχωρίσιμους χώρους Banach. Όπως θα δούμε παρακάτω, κάθε χώρος με βάση Schauder έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Ο Enflo έδωσε παράδειγμα διαχωρίσιμου (και αυτοπαθούς) χώρου Banach που δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Αυτό αποδεικνύει ταυτόχρονα ότι υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν έχει βάση Schauder και ότι το πρόβλημα της προσέγγισης έχει αρνητική απάντηση.

Λήμμα 6.3.2 *Έστω $T_n, T \in B(X,Y)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $T_n x \to Tx$. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε $T_n \to T$ ομοιόμορφα στο K.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση και το θεώρημα Banach-Steinhaus, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (οπότε και $\|T\| \leq M$).

Έστω $\varepsilon > 0$. Το K είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m D(x_j, \varepsilon)$. Αφού $T_n \to T$ κατά σημείο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $j \leq m$,

$$\|T_n x_j - T x_j\| < \varepsilon.$$

Έστω $x \in K$. Υπάρχει $j \leq m$ τέτοιο ώστε $\|x_j - x\| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leq \|(T_n - T)(x_j)\| + \|(T_n - T)(x - x_j)\| \\ &\leq \varepsilon + \|T_n - T\| \cdot \|x - x_j\| \\ &\leq (1 + 2M)\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sup_{x \in K} \|T_n x - Tx\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

δηλαδή $T_n \to T$ ομοιόμορφα στο K. □

Θεώρημα 6.3.3 *Έστω Y διαχωρίσιμος χώρος με βάση Schauder (π.χ. ο c_0 ή ο ℓ_p, $1 \leq p < \infty$) και X χώρος Banach. Τότε, $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$.*

Απόδειξη: Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ βάση Schauder του Y. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την «προβολή» $P_n : Y \to Y$ με

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Έχουμε δεί ότι οι P_n είναι φραγμένοι τελεστές με $\sup_n \|P_n\| < +\infty$. Επίσης, $P_n y \to y$ για κάθε $y \in Y$.

Έστω $T \in K(X,Y)$. Το $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές και $P_n(y) \to y$ για κάθε $y \in \overline{T(B_X)}$. Από το Λήμμα 6.3.2,

$$\|P_n \circ T - T\| = \sup_{x \in B_X} \|(P_n \circ T)(x) - T(x)\| \leq \sup_{y \in \overline{T(B_X)}} \|P_n y - y\| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Όμως $P_n \circ T \in F(X,Y)$, άρα $T \in \overline{F(X,Y)}$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αφορά τον συζυγή ενός συμπαγούς τελεστή.

Θεώρημα 6.3.4 *Ο $T \in B(X,Y)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο $T^* \in B(Y^*,X^*)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι συμπαγής. Έστω $y_n^* \in B_{Y^*}$. Θα δείξουμε ότι η $(T^* y_n^*)$ έχει Cauchy υπακολουθία (άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, κι αυτό δείχνει ότι ο T^* είναι συμπαγής).

Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{y_n^*|_{\overline{T(B_X)}} : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\overline{T(B_X)}).$$

Το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το S φραγμένο και ισοσυνεχές υποσύνολο του $C(\overline{T(B_X)})$ (άσκηση). Από το θεώρημα Ascoli-Arzelá, το S είναι σχετικά συμπαγές. Άρα, η $y_n^*|_{\overline{T(B_X)}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (επομένως, Cauchy υπακολουθία). Δηλαδή, υπάρχουν $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοιοι ώστε

$$\sup_{x \in B_X} |y_{k_n}^*(Tx) - y_{k_m}^*(Tx)| \to 0$$

καθώς $n,m \to \infty$. Από τον ορισμό του συζυγούς τελεστή, αυτό σημαίνει ότι

$$\|T^*(y_{k_n}^*) - T^*(y_{k_m}^*)\| = \sup_{x \in B_X} |[T^*(y_{k_n}^*)](x) - [T^*(y_{k_m}^*)](x)| \to 0$$

καθώς $n,m \to \infty$. Δηλαδή, η $(T^*(y_{k_n}^*))$ είναι Cauchy.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο T^* είναι συμπαγής. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, ο $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ είναι συμπαγής.

Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Τότε, η $(\tau(x_n))$ είναι φραγμένη, αφού η φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία. Αφού ο T^{**} είναι συμπαγής, υπάρχουν $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοιοι ώστε η $T^{**}(\tau(x_{k_n}))$ να είναι συγκλίνουσα.

Όμως $T^{**}(\tau(x_{k_n})) = \tau(Tx_{k_n})$. Άρα, η $\tau(Tx_{k_n})$ είναι συγκλίνουσα, επομένως Cauchy στον Y^{**}. Αφού η $\tau : Y \to Y^{**}$ είναι ισομετρία, η Tx_{k_n} είναι Cauchy, δηλαδή συγκλίνει. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι συμπαγής. □

Ασκήσεις

1. Έστω $T \in K(X,Y)$, όπου $\dim X = \infty$. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη του $T(S_X) = \{Tx : \|x\| = 1\}$ στον Y περιέχει το 0. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Riesz.

2. Έστω (e_n) ορθοκανονική βάση ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H και $T \in K(H,Y)$, όπου Y χώρος Banach. Δείξτε ότι $Te_n \to 0$.

3. Έστω X χώρος Banach, $T_n \in K(X)$ και $T_n \to T$ στον $B(X)$. Δείξτε ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές. Δείξτε ακόμα ότι αν $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ και $\lambda_n \to \lambda$, τότε $\lambda \in \sigma(T)$.

4. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Δείξτε ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\forall x \in H \quad \langle x_n, x\rangle \to 0 \Longrightarrow Tx_n \to 0.$$

5. Έστω X χώρος Banach και $T, S \in B(X)$.

(α) Δείξτε ότι από την $ST = I$ δεν έπεται ότι $TS = I$.

(β) Αν όμως ο T είναι συμπαγής, δείξτε ότι

$$S(I-T) = I \iff (I-T)S = I,$$

και ότι τότε ο $I - (I-T)^{-1}$ είναι συμπαγής.

6 Θεωρούμε τους τελεστές $S, M : \ell_2 \to \ell_2$ με

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad , \quad M(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots).$$

Ορίζουμε $T = MS$. Δείξτε ότι ο T είναι συμπαγής τελεστής, ο οποίος δεν έχει ιδιοτιμές και το φάσμα του είναι μονοσύνολο. Υπολογίστε την $\|T^k\|$ και την φασματική ακτίνα $r(T)$.

6.4 Συμπαγείς τελεστές σε χώρους Hilbert

Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Τότε, ορίζεται μονοσήμαντα ένας τελεστής $S \in B(H)$ με την ιδιότητα: για κάθε $x, y \in H$,

$$(*) \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz. Για κάθε $y \in H$, η απεικόνιση $f_y(x) = \langle Tx, y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Άρα, υπάρχει μοναδικό $a_y \in H$ με την ιδιότητα $\langle Tx, y\rangle = f_y(x) = \langle x, a_y\rangle$ για κάθε $x \in H$. Ο τελεστής $S : H \to H$ που ορίζεται από την $Sy = a_y$ είναι φραγμένος και γραμμικός. Από τον ορισμό του, ικανοποιεί την $(*)$.

Ονομάζουμε τον S *συζυγή τελεστή* του T και τον συμβολίζουμε με T^*. Όταν μιλάμε για τελεστές σε χώρους Hilbert, η έννοια του συζυγούς τελεστή είναι αυτή που μόλις περιγράψαμε. Η σχέση του με τον «συζυγή του T» που ορίσαμε στην Παράγραφο 6.2 για τελεστές σε γενικούς χώρους με νόρμα είναι η εξής: Ας γράφουμε T^t για τον συζυγή τελεστή $T^t : H^* \to H^*$. Έστω $f, g \in H^*$ με $T^t f = g$. Αν τα f, g αναπαρίστανται από τα $a_f, a_g \in H$, δηλαδή αν

$$f(x) = \langle x, a_f\rangle \quad , \quad g(x) = \langle x, a_g\rangle \quad , \quad x \in H,$$

τότε

$$[T^t(f)](x) = g(x) = \langle x, a_g\rangle$$

και

$$[T^t(f)](x) = f(Tx) = \langle Tx, a_f\rangle = \langle x, T^* a_f\rangle$$

για κάθε $x \in H$, άρα $T^*(a_f) = a_g$. Δηλαδή,

$$T^t(f) = g \implies T^*(a_f) = a_g.$$

Οι βασικές ιδιότητες του συζυγούς τελεστή περιγράφονται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.4.1 *Έστω H χώρος Hilbert, $T, S \in B(H)$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Τότε,*
(α) $(aT + bS)^* = \overline{a}T^* + \overline{b}S^*$.
(β) $(TS)^* = S^*T^*$.
(γ) $T^{**} = T$.
(δ) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
(ε) $\|T^*\| = \|T\|$.

Απόδειξη: Δείχνουμε μόνο τα (δ) και (ε). Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{x \in B_H} \langle Tx, Tx \rangle = \sup_{x \in B_H} \langle x, T^*Tx \rangle \\ &\leq \sup_{x \in B_H} \|x\| \cdot \|T^*Tx\| = \|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T\| \leq \|T^*\|$. Αν βάλουμε τον T^* στη θέση του T και χρησιμοποιήσουμε το (γ) βλέπουμε ότι

$$\|T^*\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|.$$

Άρα, $\|T^*\| = \|T\|$. Επιστρέφοντας στις αρχικές ανισότητες, παίρνουμε και την $\|T\|^2 = \|T^*T\|$. □

Ορισμός Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Ο T λέγεται *αυτοσυζυγής* (ή ερμιτιανός) αν $T^* = T$. Δηλαδή, αν

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

για κάθε $x, y \in H$. Παρακάτω περιγράφουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αυτοσυζυγών τελεστών.

Πρόταση 6.4.2 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|T^n\| = \|T\|^n.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.4.1 έχουμε

$$\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T^2\|.$$

(i) Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι $\|T^n\| = \|T\|^n$ αν $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, κάθε T^m είναι αυτοσυζυγής, άρα αν $\|T^m\| = \|T\|^m$ τότε

$$\|T^{2m}\| = \|(T^m)^2\| = (\|T^m\|)^2 = (\|T\|^m)^2 = \|T\|^{2m}.$$

(ii) Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε το εξής: αν $\|T^m\| = \|T\|^m$ και $n < m$, τότε $\|T^n\| = \|T\|^n$. Όμως,

$$\|T\|^m = \|T^m\| = \|T^{m-n}T^n\| \leq \|T^{m-n}\| \cdot \|T^n\| \leq \|T\|^{m-n}\|T^n\|.$$

Αυτό δείχνει την $\|T\|^n \leq \|T^n\|$, ενώ η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής. □

Παρατήρηση Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Για κάθε $x \in H$,

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle},$$

άρα $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.4.3 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_H} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A = \sup_{x\in B_H} |\langle Tx, x\rangle|$. Για κάθε $x \in H$ έχουμε $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2$, απ' όπου βλέπουμε εύκολα ότι $A \leq \|T\|$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $z \in H$ και $a > 0$. Θέτουμε $v = az$, $u = Tz/a$ και γράφουμε

$$\|Tz\|^2 = \langle Tz, Tz\rangle = \langle T(az), Tz/a\rangle = \langle Tv, u\rangle.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι αυτοσυζυγής και ότι $\langle Tv, u\rangle \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι

$$4\langle Tv, u\rangle = \langle T(v+u), v+u\rangle - \langle T(v-u), v-u\rangle,$$

άρα

$$\begin{aligned} 4\|Tz\|^2 &\leq |\langle T(v+u), v+u\rangle| + |\langle T(v-u), v-u\rangle| \\ &\leq A\|v+u\|^2 + A\|v-u\|^2 = 2A\|v\|^2 + 2A\|u\|^2 \\ &= 2Aa^2\|z\|^2 + 2Aa^{-2}\|Tz\|^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν $a = \|Tz\|/\|z\|$. Γι' αυτήν την τιμή του a παίρνουμε

$$4\|Tz\|^2 \leq 4A\|z\| \cdot \|Tz\|,$$

το οποίο αποδεικνύει την $\|T\| \leq A$. □

Πρόταση 6.4.4 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Όλες οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές. Αν $\lambda \neq \mu$ είναι ιδιοτιμές του T και x_λ, x_μ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε $x_\lambda \perp x_\mu$.*

Απόδειξη: Έστω λ ιδιοτιμή του T και $x \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα της λ. Τότε,

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Αφού $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda\langle x_\lambda, x_\mu\rangle &= \langle Tx_\lambda, x_\mu\rangle = \langle x_\lambda, Tx_\mu\rangle \\ &= \langle x_\lambda, \mu x_\mu\rangle = \overline{\mu}\langle x_\lambda, x_\mu\rangle \\ &= \overline{\mu}\langle x_\lambda, x_\mu\rangle. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $(\lambda - \mu)\langle x_\lambda, x_\mu\rangle = 0$ και αφού $\lambda \neq \mu$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.4.5 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε,*

$$\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \inf_{\|x\|=1} \|(\lambda I - T)(x)\| = 0.$$

Απόδειξη: Ισοδύναμα, ζητάμε να δείξουμε ότι ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε $\|(\lambda I - T)(x)\| \geq a\|x\|$ για κάθε $x \in H$.

Η μία κατεύθυνση είναι απλή: αν υποθέσουμε ότι ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\|x\| = \|(\lambda I - T)^{-1}((\lambda I - T)x)\| \leq \|(\lambda I - T)^{-1}\| \cdot \|(\lambda I - T)(x)\|$$

για κάθε $x \in H$, οπότε έχουμε το ζητούμενο με $a = \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε

$$(*) \qquad \|(\lambda I - T)(x)\| \geq a\|x\|$$

για κάθε $x \in H$. Από την $(*)$ είναι φανερό ότι $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}$, δηλαδή ο $\lambda I - T$ είναι 1-1.

Δείχνουμε πρώτα ότι η εικόνα $(\lambda I - T)(H)$ είναι πυκνή στον H. Αν όχι, τότε υπάρχει $y \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$0 = \langle (\lambda I - T)(x), y\rangle = \langle x, (\overline{\lambda} I - T)(y)\rangle$$

για κάθε $x \in H$. Τότε $Ty = \overline{\lambda}y$, δηλαδή ο $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του T. Αφού ο T είναι αυτοσυζυγής, $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$. Όμως τότε, ο $\lambda I - T$ δεν μπορεί να ικανοποιεί την $(*)$ (δεν είναι 1-1).

Τέλος δείχνουμε ότι η εικόνα $(\lambda I - T)(H)$ είναι κλειστή στον H. Ας υποθέσουμε ότι $(\lambda I - T)(x_n) \to y \in H$. Τότε, η $(\lambda I - T)(x_n)$ είναι Cauchy στον H. Από την $(*)$ βλέπουμε εύκολα ότι η (x_n) είναι κι αυτή Cauchy, άρα συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Τότε, $y = (\lambda I - T)(x) \in (\lambda I - T)(H)$.

Από τα παραπάνω, ο $\lambda I - T$ είναι φραγμένος, 1-1 και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Πρόταση 6.4.6 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ με $b \neq 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\langle \lambda x - Tx, x\rangle - \langle x, \lambda x - Tx\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|^2 = 2ib\|x\|^2.$$

Έπεται ότι

$$2|b| \cdot \|x\|^2 \leq |\langle \lambda x - Tx, x\rangle| + |\langle x, \lambda x - Tx\rangle| \leq 2\|\lambda I - T\| \cdot \|x\|^2,$$

οπότε ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος από την Πρόταση 6.4.5. Δηλαδή, $b \neq 0 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T)$. Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. $\square$

Συμβολισμός Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Θέτουμε

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad , \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Πρόταση 6.4.7 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε, $\sigma(T) \subseteq [m, M]$.*

Απόδειξη: Από την προηγούμενη Πρόταση, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $\lambda > M$. Για κάθε $x \in H$ με $\|x\| = 1$,

$$\langle(\lambda I - T)(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \geq \lambda - M.$$

Αφού $\inf_{\|x\|=1} \|(\lambda I - T)(x)\| \geq \lambda - M > 0$, ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος από την Πρόταση 6.4.5.

Όμοια δείχνουμε ότι αν $\lambda < m$ τότε ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. □

Πρόταση 6.4.8 *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε, $m, M \in \sigma(T)$.*

Απόδειξη: Αν $\|x\| = 1$, τότε $0 \leq \langle(T - mI)(x), x\rangle \leq M - m$. Από την Πρόταση 6.4.3 έπεται ότι $\|T - mI\| = M - m$. Επομένως, υπάρχουν $x_n \in H$ με $\|x_n\| = 1$ τέτοια ώστε

$$\langle Tx_n - mx_n, x_n\rangle \to M - m = \|T - mI\|.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - Mx_n\|^2 &= \|(T - mI)(x_n) - (M - m)x_n\|^2 \\
&= \|(T - mI)(x_n)\|^2 - 2(M - m)\langle(T - mI)(x_n), x_n\rangle + (M - m)^2 \\
&\leq \|T - mI\|^2 - 2(M - m)\langle(T - mI)(x_n), x_n\rangle + (M - m)^2 \\
&= (M - m)^2 - 2(M - m)\langle(T - mI)(x_n), x_n\rangle + (M - m)^2 \\
&\to (M - m)^2 - 2(M - m)^2 + (M - m)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $\inf_{\|x\|=1} \|(T - MI)(x)\| = 0$ και αυτό δείχνει ότι $M \in \sigma(T)$. Όμοια δείχνουμε ότι $m \in \sigma(T)$. □

Κάνουμε τώρα την επιπλέον υπόθεση ότι ο $T \in B(H)$ είναι συμπαγής.

Πρόταση 6.4.9 *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $T \in K(H)$. Τότε,*
(α) $0 \in \sigma(T)$.
(β) Αν ο $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του T και $N_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$, τότε $\dim(N_\lambda) < \infty$.

Απόδειξη: (α) Αν $0 \notin \sigma(T)$, τότε $T^{-1} \in B(H)$. Αφού $T \in K(H)$, βλέπουμε ότι $I = T \circ T^{-1} \in K(H)$. Όμως αυτό είναι άτοπο, γιατί $\dim(H) = \infty$ (δείτε την Παράγραφο 6.3).

(β) Έστω ότι $\dim(N_\lambda) = \infty$. Τότε, υπάρχει άπειρη ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον N_λ. Ο T είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία (e_{k_n}) τέτοια ώστε η (Te_{k_n}) να συγκλίνει. Ειδικότερα, η (Te_{k_n}) είναι ακολουθία Cauchy. Όμως, αν $n \neq m$ τότε

$$\|Te_n - Te_m\| = \|\lambda e_n - \lambda e_m\| = \sqrt{2}|\lambda|,$$

δηλαδή η (Te_n) δεν μπορεί να έχει υπακολουθία Cauchy. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $\dim(N_\lambda) < \infty$. □

Πρόταση 6.4.10 *Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Αν $\lambda \in \sigma(T)$ και $\lambda \neq 0$, τότε ο λ είναι ιδιοτιμή του T.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.4.5 υπάρχουν $x_n \in H$ με $\|x_n\| = 1$, τέτοια ώστε $Tx_n - \lambda x_n \to 0$. Αφού ο T είναι συμπαγής, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) και $y \in H$ τέτοια ώστε
$$Tx_{k_n} \to y.$$
Τότε, $\lambda x_{k_n} \to y$ άρα
$$\lambda T x_{k_n} \to Ty.$$
Από τις δύο σχέσεις έπεται ότι $Ty = \lambda y$. Επίσης $\|y\| = |\lambda| > 0$, άρα $y \neq 0$. Δηλαδή, ο λ είναι ιδιοτιμή του T (με ιδιοδιάνυσμα το y). □

Πόρισμα 6.4.1 *Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Ο T έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

Απόδειξη: Αν $T \equiv 0$, τότε ο 0 είναι ιδιοτιμή του T.

Αν $\|T\| > 0$, τότε από την Πρόταση 6.4.2 η φασματική ακτίνα του T είναι ίση με
$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|.$$
Άρα, υπάρχει μη μηδενικό $\lambda \in \sigma(T)$ κι αυτό είναι αναγκαστικά ιδιοτιμή του T από την Πρόταση 6.4.10 (η ύπαρξη μη μηδενικού $\lambda \in \sigma(T)$ εξασφαλίζεται και από την Πρόταση 6.4.8, αφού $\max\{|m|, |M|\} = \|T\| > 0$ και $m, M \in \sigma(T)$). □

Πρόταση 6.4.11 *Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Έστω M κλειστός υπόχωρος του H αναλλοίωτος από τον T (δηλαδή, $T(M) \subseteq M$). Τότε,*

(α) Ο $M^\perp$ είναι αναλλοίωτος από τον T.

(β) Αν $T_1 = T|_M : M \to M$ και $T_2 = T|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$, τότε οι T_1, T_2 είναι συμπαγείς και αυτοσυζυγείς. Επιπλέον,
$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$

Απόδειξη: (α) Έστω $y \in M^\perp$. Για κάθε $x \in M$ έχουμε $Tx \in M$, άρα
$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0$$
αφού ο T είναι αυτοσυζυγής. Αυτό δείχνει ότι $Ty \in M^\perp$, δηλαδή $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι οι T_1 και T_2 είναι συμπαγείς και αυτοσυζυγείς. Έστω $\lambda \in \sigma(T_1)$. Τότε,
$$\inf\{\|\lambda x - Tx\| \,:\, x \in H, \|x\| = 1\} \leq \inf\{\|\lambda x - Tx\| \,:\, x \in M, \|x\| = 1\} = 0$$
από την Πρόταση 6.4.5. Άρα, $\lambda \in \sigma(T)$ πάλι από την Πρόταση 6.4.5. Έπεται ότι $\sigma(T_1) \subseteq \sigma(T)$. Όμοια, $\sigma(T_2) \subseteq \sigma(T)$ άρα
$$\sigma(T) \supseteq \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό υποθέτουμε ότι $\lambda \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$. Τότε, από την Πρόταση 6.4.5 υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in M$ και κάθε $z \in M^\perp$,
$$\|\lambda y - Ty\| \geq a\|y\| \quad , \quad \|\lambda z - Tz\| \geq a\|z\|.$$

Έστω $x \in H$. Υπάρχουν $y \in M$ και $z \in M^\perp$ με $x = y + z$. Τότε, χρησιμοποιώντας το (α) βλέπουμε ότι $\lambda y - Ty \in M$ και $\lambda z - Tz \in M^\perp$, άρα

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Tx\|^2 &= \|(\lambda y - Ty) + (\lambda z - Tz)\|^2 \\ &= \|\lambda y - Ty\|^2 + \|\lambda z - Tz\|^2 \\ &\geq a^2(\|y\|^2 + \|z\|^2) = a^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Άρα, ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος, κι αυτό δείχνει ότι

$$\sigma(T) \subseteq \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2). \qquad \square$$

Πρόταση 6.4.12 *Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Το σύνολο των ιδιοτιμών του T είναι αριθμήσιμο και δεν έχει σημεία συσσώρευσης εκτός ίσως από το 0.*

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}.$$

Θα δείξουμε ότι το Λ_ε είναι πεπερασμένο σύνολο. Έστω ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ το Λ_ε περιέχει μία άπειρη ακολουθία $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαφορετικών ανά δύο όρων. Για κάθε n θεωρούμε ιδιοδιάνυσμα e_n της λ_n με $\|e_n\| = 1$. Τότε, αν $n \neq m$ έχουμε $e_n \perp e_m$ άρα

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

Όμως τότε, η (Te_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό είναι άτοπο γιατί ο T είναι συμπαγής.

Παρατηρήστε ότι το σύνολο Λ των μη μηδενικών ιδιοτιμών του T μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\Lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Lambda_{1/m},$$

άρα είναι αριθμήσιμο. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος της Πρότασης.

Έστω $t \neq 0$ σημείο συσσώρευσης του συνόλου των ιδιοτιμών του T. Παίρνοντας $\varepsilon = |t|/2 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το $\Lambda_{|t|/2} \supseteq \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda - t| < \varepsilon\}$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία. Αυτό είναι άτοπο, άρα το σύνολο των ιδιοτιμών του T δεν έχει σημεία συσσώρευσης εκτός ίσως από το 0. $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 6.4.1 *Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Υπάρχει ορθοκανονική βάση του H που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.*

Απόδειξη: Αν λ είναι ιδιοτιμή του T, γράφουμε N_λ για τον ιδιόχωρο $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ που αντιστοιχεί στην λ. Κάθε N_λ είναι κλειστός υπόχωρος του H (και αν $\lambda \neq 0$ τότε ο N_λ έχει πεπερασμένη διάσταση). Θεωρούμε μία ορθοκανονική βάση B_λ του N_λ.

Οι ιδιόχωροι N_λ είναι κάθετοι ανά δύο, άρα το $B = \bigcup B_\lambda$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στον H. Θεωρούμε τον κλειστό υπόχωρο

$$M = \overline{\langle \cup B_\lambda \rangle} = \overline{\langle \cup N_\lambda \rangle}.$$

του H. Αφού $T(N_\lambda) \subseteq N_\lambda$ για κάθε λ, έχουμε

$$T(\langle \cup N_\lambda \rangle) \subseteq \langle \cup N_\lambda \rangle,$$

και λόγω συνέχειας του T, $T(M) \subseteq M$.

Έστω ότι $M \neq H$. Τότε, $M^\perp \neq 0$ και $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ από την Πρόταση 6.4.11. Ο $T|_{M^\perp}$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής, άρα έχει κάποια ιδιοτιμή ρ. Έστω $z \neq 0$ στον $M^\perp$ με $Tz = \rho z$. Από την Πρόταση 6.4.11, $\rho \in \sigma(T)$, άρα

$$z \in N_\rho \subseteq M$$

το οποίο είναι άτοπο: θα είχαμε $0 \neq z \in M \cap M^\perp$.

Δείξαμε ότι $\overline{\langle B \rangle} =: M = H$. Άρα, το B είναι πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον H, το οποίο αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. $\square$

Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Υπάρχουν ορθοκανονική βάση (e_n) του H και ακολουθία (λ_n) στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $Te_n = \lambda_n e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x \in H$ έχουμε*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 6.4.1 υπάρχει ορθοκανονική βάση του H που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Ο H είναι διαχωρίσιμος, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η βάση είναι μία ακολουθία (e_n) με $Te_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε $x \in H$ γράφεται στη μορφή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Άρα, από την συνέχεια και την γραμμικότητα του T,

$$\begin{aligned} T(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle T(e_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \lambda_n e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n. \quad \square \end{aligned}$$

Είναι τώρα εύκολο να υπολογίσουμε τον $(\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(T)$.

Πρόταση 6.4.13 *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in H$*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

όπως στο φασματικό θεώρημα. Αν $\lambda \notin \sigma(T)$, τότε

$$(\lambda I - T)^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n.$$

Απόδειξη: Αφού το $\sigma(T)$ είναι κλειστό και $\lambda \notin \sigma(T)$, έχουμε $d(\lambda, \sigma(T)) = \delta > 0$. Άρα, $|\lambda - \lambda_n| \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν $k < m$, τότε

$$\Big\| \sum_{n=k+1}^{m} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n \Big\|^2 = \sum_{n=k+1}^{m} \frac{\langle x, e_n \rangle^2}{|\lambda - \lambda_n|^2} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=k+1}^{m} \langle x, e_n \rangle^2 \to 0,$$

άρα ο $S : H \to H$ με

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n$$

ορίζεται καλά και

$$\|S(x)\|^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \frac{\|x\|^2}{\delta^2}$$

δηλαδή $S \in B(H)$. Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} S(\lambda e_k - T e_k) &= S((\lambda - \lambda_k) e_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k) \frac{\langle e_k, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n \\ &= e_k \end{aligned}$$

αφού $\langle e_k, e_n \rangle = \delta_{kn}$. Δηλαδή, $[S \circ (\lambda I - T)](e_k) = e_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού οι $S \circ (\lambda I - T)$ και I συμφωνούν σε μία ορθοκανονική βάση του H, παίρνουμε $S \circ (\lambda I - T) = I$. Όμοια ελέγχουμε την $(\lambda I - T) \circ S = I$. Άρα, $S = (\lambda I - T)^{-1}$. □

Ασκήσεις

1. Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Αν $T^n \equiv 0$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, τότε $T \equiv 0$.

2. Έστω $u, v \in H$ με $\|u\| = \|v\| = 1$ και $T = u \otimes v$ ο τελεστής που ορίζεται από την $T(x) = \langle x, u \rangle v$. Βρείτε το $\sigma(T)$.

3. Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα, δείξτε ότι $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του T είναι μη αρνητικές. Δείξτε ότι τότε, υπάρχει αυτοσυζυγής $S \in B(H)$ με $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ και $S^2 = T$.

4. Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Υποθέτουμε ότι κάθε ιδιόχωρος του T είναι μονοδιάστατος. Αν $S \in B(H)$ και $ST = TS$, δείξτε ότι υπάρχουν ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ και φραγμένη ακολουθία $\{\mu_n\}$ στο $\mathbb{C}$ έτσι ώστε

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$

Δείξτε ότι αν $S_1 \in B(H)$ και $TS_1 = S_1T$, τότε $SS_1 = S_1S$.

6.5 Συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $T : X \to X$ συμπαγής τελεστής. Θα δώσουμε περιγραφή του φάσματος $\sigma(T)$.

Θεώρημα 6.5.1 *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $T \in K(X)$. Τότε, $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ όπου η ακολουθία (λ_k) είναι είτε πεπερασμένη ή τείνει στο 0. Κάθε λ_k είναι ιδιοτιμή του T και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος $N_k = \mathrm{Ker}(\lambda_k I - T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μία σειρά από λήμματα (σε όλα υποθέτουμε ότι $T \in K(X)$, όπου X απειροδιάστατος χώρος Banach).

Λήμμα 6.5.1 $0 \in \sigma(T)$

Απόδειξη: Αλλιώς, ο T είναι αντιστρέψιμος. Αν όμως $T^{-1} \in B(X)$, τότε $I = T^{-1} \circ T \in K(X)$ το οποίο είναι άτοπο αφού $\dim(X) = \infty$. □

Λήμμα 6.5.2 *Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του T και $x_1, \ldots, x_m$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους. Τότε, τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη: Με επαγωγή ως προς το m. Έστω ότι $Tx_i = \lambda_i x_i$ και $\sum_{i=1}^m t_i x_i = 0$. Τότε,

$$T\left(\sum_{i=1}^m t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i t_i x_i = 0,$$

άρα

$$\sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) t_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i t_i x_i - \lambda_m \sum_{i=1}^m t_i x_i = 0.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, $(\lambda_i - \lambda_m)t_i = 0$, $i \leq m-1$. Αφού $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, παίρνουμε $t_1 = \ldots = t_{m-1} = 0$. Έπεται ότι $t_m = 0$. □

Λήμμα 6.5.3 *Έστω* $\varepsilon > 0$. *Ο* T *έχει πεπερασμένες το πλήθος ιδιοτιμές* λ *με* $|\lambda| \geq \varepsilon$. *Αν* λ *είναι μία τέτοια ιδιοτιμή, τότε* $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - T)) < \infty$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία (x_n) γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του X με $T(x_n) = \lambda_n x_n$, όπου $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ (επιτρέπονται οι επαναλήψεις στις ιδιοτιμές λ_n).

Ορίζουμε $X_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, η (X_k) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων του X. Από το Λήμμα του Riesz, για κάθε k μπορούμε να βρούμε $y_k \in X_k$ τέτοιο ώστε $\|y_k\| = 1$ και $d(y_k, X_{k-1}) = 1$.

Ορίζουμε $z_k = y_k/\lambda_k$. Τότε $\|z_k\| = \|y_k\|/|\lambda_k| \leq 1/\varepsilon$, δηλαδή η (z_k) είναι φραγμένη ακολουθία.

Παρατηρήστε ότι αν $y_k = c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k$, τότε

$$\begin{aligned} T(z_k) - y_k &= \frac{1}{\lambda_k}(c_1\lambda_1 x_1 + \ldots + c_k\lambda_k x_k) - (c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k} - 1\right) x_i \in X_{k-1}. \end{aligned}$$

Έστω $n > m$. Αφού $T(z_m) \in X_m \subseteq X_{n-1}$ και $T(z_n) - y_n \in X_{n-1}$, παίρνουμε

$$\|T(z_n) - T(z_m)\| = \|y_n - (y_n - T(z_n) + T(z_m))\| \geq d(y_k, X_{n-1}) = 1.$$

Άρα, η $T(z_n)$ δεν έχει Cauchy υπακολουθία. Αυτό είναι άτοπο, γιατί ο T είναι συμπαγής και η (z_k) φραγμένη.

Επομένως, το συνολικό πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του T που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ με $|\lambda| \geq \varepsilon$ είναι πεπερασμένο. Αυτό αποδεικνύει και τους δύο ισχυρισμούς του Λήμματος. □

Πρόταση 6.5.1 *Έστω* X *απειροδιάστατος χώρος Banach και* $T \in K(X)$. *Για κάθε* $\lambda \neq 0$, *ο* $(\lambda I - T)(X)$ *είναι κλειστός υπόχωρος του* X.

Απόδειξη: Έστω $N = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο N έχει πεπερασμένη διάσταση. Αν ο λ δεν είναι ιδιοτιμή του T τότε $N = \{0\}$, ενώ αν ο λ είναι ιδιοτιμή του T τότε εφαρμόζεται το προηγούμενο Λήμμα.

Ισχυρισμός: Μπορούμε να βρούμε κλειστό υπόχωρο M του X με την ιδιότητα $X = N \oplus M$.

Απόδειξη: Θεωρούμε βάση $x_1, \ldots, x_m$ του N και εφαρμόζοντας το θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $x_1^*, \ldots, x_m^* \in X^*$ τέτοια ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Θέτουμε $M = \bigcap_{j=1}^m \mathrm{Ker}(x_j^*)$.

Αν $x \in X$, τότε το $y = x_1^*(x)x_1 + \cdots + x_m^*(x)x_m \in N$ και

$$x_i^*(x - y) = x_i^*(x) - \sum_{j=1}^m x_j^*(x) x_i^*(x_j) = 0$$

για κάθε $i \leq m$, δηλαδή $x - y \in M$. Άρα, $X = N + M$. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι $N \cap M = \{0\}$. □

Θεωρούμε τον $S = (\lambda I - T)|_M : M \to X$. Ο S είναι 1-1 και $S(M) = (\lambda I - T)(X)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο $S(M)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $c > 0$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|\lambda x - Tx\| = \|Sx\| \geq c\|x\|$$

για κάθε $x \in M$. Αν όχι, υπάρχουν $x_n \in M$ με $\|x_n\| = 1$ και $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. Ο T είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} με $Tx_{k_n} \to y \in M$. Τότε, $\lambda x_{k_n} \to y$, άρα $\|y\| = \lim_n \|\lambda x_{k_n}\| = |\lambda| \neq 0$. Επίσης, $\lambda x_{k_n} \to y \Longrightarrow Ty = \lambda \lim_n x_{k_n} = \lambda y$. Άρα, $Sy = \lambda y - Ty = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί ο S είναι 1-1.

Από την $(*)$ βλέπουμε ότι ο $S(M)$ είναι κλειστός. Αν $x_n \in M$ και $Sx_n \to z$, τότε η Sx_n είναι ακολουθία Cauchy και από την $(*)$ η x_n είναι ακολουθία Cauchy. Ο M είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in M$ με $x_n \to x$. Τότε, $z = Sx \in S(M)$. □

Λήμμα 6.5.4 *Έστω $T \in B(X)$. Θέτουμε $S = I - T$ και $Y = S(X)$. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του X. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 \in B_X$ τέτοιο ώστε*

$$d(Tx_0, T(Y)) > 1 - \varepsilon.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση και την Πρόταση 6.5.1 ο Y είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Από το Λήμμα του Riesz υπάρχει $x_0 \in B_X$ τέτοιο ώστε $d(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $y \in Y$. Τότε,

$$\|Tx_0 - Ty\| = \|x_0 - (Sx_0 + y - Sy)\| \geq d(x_0, Y) > 1 - \varepsilon,$$

αφού τα Sx_0, y και Sy ανήκουν στον Y. □

Πρόταση 6.5.2 *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $T \in K(X)$. Κάθε μη μηδενικό $\lambda \in \sigma(T)$ είναι ιδιοτιμή του T.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$. Θέτουμε $S = I - T$. Για την απόδειξη της Πρότασης αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$ τότε ο S είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο S είναι 1-1, σύμφωνα με το θεώρημς αντίστροφης απεικόνισης αρκεί να δείξουμε ότι ο S είναι επί.

Ορίζουμε $Y_0 = X$, $Y_1 = S(X)$ και γενικά, $Y_{k+1} = S(Y_k)$. Για κάθε k έχουμε

$$Y_{k+1} = S^{k+1}(X) = S^k(S(X)) \subseteq S^k(X) = Y_k.$$

Δηλαδή, η (Y_k) είναι φθίνουσα ακολουθία υποχώρων του X. Επίσης, η Πρόταση 6.5.1 δείχνει ότι κάθε Y_k είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιος ώστε $Y_n = Y_{n+1}$.

Απόδειξη: Αν όχι, εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.5.4 για τους Y_n και $Y_{n+1} = S(Y_n)$, για κάθε $n \geq 0$ βρίσκουμε $y_n \in B_{Y_n}$ τέτοιο ώστε

$$d(Ty_n, T(Y_{n+1})) > 1/2.$$

Τότε, αν $m > n$ έχουμε $Ty_m \in T(Y_m) \subseteq T(Y_{n+1})$, άρα

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq d(Ty_n, T(Y_{n+1})) > 1/2.$$

Όμως τότε, η (Ty_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο γιατί ο T είναι συμπαγής. □

Ισχυρισμός: $Y_0 = Y_1$.

Απόδειξη: Έστω ότι $Y_0 \neq Y_1$ και m ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $Y_{m-1} \neq Y_m = Y_{m+1}$. Επιλέγουμε τυχόν $u \in Y_{m-1} \setminus Y_m$. Τότε, $Su \in Y_m = Y_{m+1}$ άρα υπάρχει $v \in Y_m$ τέτοιο ώστε $Su = Sv$. Αφού $u \notin Y_m$, έχουμε $u - v \neq 0$ και $S(u - v) = 0$. Αυτό είναι άτοπο γιατί ο S είναι 1-1. □

Άρα $X = Y_0 = Y_1 = S(X)$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο $S = I - T$ είναι επί. Έπεται ότι ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος. □

Από τα Λήμματα 6.5.1 και 6.5.3 και από την Πρόταση 6.5.2 έπεται το Θεώρημα 6.5.1.

6.6 Εφαρμογές στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

Η φασματική θεωρία των συμπαγών τελεστών έχει άμεση σχέση με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Η σχέση αυτή γίνεται φανερή από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 6.6.1 (Fredholm) *Έστω X χώρος Banach και $T \in K(X)$. Για κάθε $\lambda \neq 0$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) Για κάθε $y \in X$, η εξίσωση $Tx - \lambda x = y$ έχει λύση.

(β) Η εξίσωση $Tx - \lambda x = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$. Παρατηρούμε ότι το (α) ισχύει αν και μόνο αν $(I-T)(X) = X$, ενώ το (β) ισχύει αν και μόνο αν ο 1 δεν είναι ιδιοτιμή του T δηλαδή αν και μόνο αν ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 6.5.2).

Αυτό αποδεικνύει την συνεπαγωγή (β)⇒(α): αν ο $I-T$ είναι αντιστρέψιμος τότε είναι επί, δηλαδή $(I - T)(X) = X$.

Για την (α)⇒(β), θα υποθέσουμε ότι $(I - T)(X) = X$ και ότι ο 1 είναι ιδιοτιμή του T και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ορίζουμε

$$N_k = \mathrm{Ker}((I - T)^k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $N_k \subseteq N_{k+1}$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε N_k είναι γνήσιος (προφανώς κλειστός) υπόχωρος του N_{k+1}.

Αφού ο 1 είναι ιδιοτιμή του T, υπάρχει $x_1 \neq 0$ τέτοιο ώστε $(I - T)(x_1) = 0$, δηλαδή $x_1 \in N_1$.

Ο $I - T$ είναι επί, άρα υπάρχει x_2 τέτοιο ώστε $(I - T)(x_2) = x_1$. Αφού $x_1 \neq 0$, έχουμε $x_2 \notin N_1$ και $(I - T)^2(x_2) = (I - T)(x_1) = 0$, δηλαδή $x_2 \in N_2 \setminus N_1$.

Επαγωγικά, βρίσκουμε x_{k+1} τέτοιο ώστε $(I-T)(x_{k+1}) = x_k$ και ελέγχουμε ότι

$$(I-T)^k(x_{k+1}) = x_1 \neq 0 \Longrightarrow x_{k+1} \notin N_k$$

ενώ

$$(I-T)^{k+1}(x_{k+1}) = (I-T)(x_1) = 0 \Longrightarrow x_{k+1} \in N_{k+1}.$$

Δηλαδή, $x_{k+1} \in N_{k+1} \setminus N_k$.

Από το Λήμμα του Riesz, μπορούμε να βρούμε $y_{k+1} \in N_{k+1}$ με $\|y_{k+1}\| = 1$ και $d(y_{k+1}, N_k) > 1/2$. Αν $n > m$, γράφουμε

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - ((I-T)(y_n) + y_m - (I-T)(y_m))\|$$

και παρατηρούμε ότι τα $(I-T)(y_n)$, y_m και $(I-T)(y_m)$ ανήκουν στον N_{n-1}, οπότε

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq d(y_n, N_{n-1}) > 1/2.$$

Όμως τότε, η (Ty_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο γιατί ο T είναι συμπαγής. $\square$

Εφαρμογή: η εξίσωση του Fredholm στον $C[0,1]$.

Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(*) \qquad f(t) - \int_0^1 K(t,s)f(s)ds = g(t), \quad t \in [0,1].$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fredholm μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $g \in C[0,1]$ η $(*)$ έχει μοναδική λύση $f \in C[0,1]$, με την προϋπόθεση ότι η K είναι συνεχής και $\|K\|_\infty < 1$. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Πρόταση 6.6.1 *Έστω $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\|K\|_\infty < 1$. Τότε, για κάθε $g \in C[0,1]$ υπάρχει μοναδική $f \in C[0,1]$ που ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε $t \in [0,1]$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $X = C[0,1]$ και θεωρούμε τον τελεστή $T : X \to X$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds.$$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 6.3, ο T είναι συμπαγής γραμμικός τελεστής. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f - Tf = 0$ έχει μοναδική λύση την $f \equiv 0$ στον X: Έστω ότι υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $Tf = f$. Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|f(t)| = \Big|\int_0^1 K(t,s)f(s)ds\Big| \leq \|K\|_\infty \|f\|,$$

άρα

$$0 < \|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \leq \|K\|_\infty \|f\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\|K\|_\infty \geq 1$, το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεση.

Από το Θεώρημα 6.6.1, η εξίσωση $f - Tf = g$ έχει λύση για κάθε $g \in X$. Αυτό είναι ακριβώς το ζητούμενο (η λύση είναι μοναδική αφού ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος). □

Δίνουμε τώρα μία εφαρμογή του φασματικού θεωρήματος για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές σε χώρους Hilbert. Έστω $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$K(s,t) = \overline{K(t,s)}, \quad t, s \in [0,1].$$

Θεωρούμε τον $H = L^2[0,1]$ και τον τελεστή $T : H \to H$ που ορίζεται από την

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) dt.$$

Οι βασικές ιδιότητες του T δίνονται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.6.2 *Ο T είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής. Αν $f \in L^2[0,1]$, τότε $Tf \in C[0,1]$.*

Απόδειξη: Η συμπάγεια του T και η συνέχεια της Tf αποδεικνύονται όπως στο Παράδειγμα 6.3(β). Ελέγχουμε μόνο το ότι ο T είναι αυτοσυζυγής: αν $f, g \in L^2[0,1]$, τότε

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle &= \int_0^1 (Tf)(s)\overline{g(s)} ds = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t) f(t) \overline{g(s)} dt ds \\
&= \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 K(s,t)\overline{g(s)} ds \right) dt = \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 \overline{K(t,s) g(s)} ds \right) dt \\
&= \int_0^1 f(t) \overline{(Tg)(t)} dt = \langle f, Tg \rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Λήμμα 6.6.1 *Αν $\lambda_n \neq 0$ ιδιοτιμή του T και ϕ_n ιδιοδιάνυσμα του T ως προς την λ_n, τότε $\phi_n \in C[0,1]$.*

Απόδειξη: Προφανές από την προηγούμενη Πρόταση, αφού $\phi_n = (1/\lambda_n) T\phi_n$. □

Λήμμα 6.6.2 *Έστω $Tf = \sum_n \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ η διαγώνια μορφή του T που μάς δίνει το φασματικό θεώρημα. Τότε, για κάθε $s \in [0,1]$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \phi_n(s)|^2 \leq \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt ds.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $K_s : [0,1] \to \mathbb{C}$ με $K_s(t) = K(s,t)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bessel, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n \phi_n(s)|^2 &= \sum_{n=1}^{m} |(T\phi_n)(s)|^2 = \sum_{n=1}^{m} \Big| \int_0^1 K(s,t)\phi_n(t)dt\Big|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{m} |\langle \overline{K_s}, \phi_n\rangle|^2 \leq \|\overline{K_s}\|^2 \\ &= \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Το m ήταν τυχόν, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \phi_n(s)|^2 \leq \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \lambda_n^2 &= \sum_{n=1}^{m} \|\lambda_n \phi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \int_0^1 |\lambda_n \phi_n(s)|^2 ds \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n \phi_n(s)|^2 \right) ds \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt ds,\end{aligned}$$

οπότε αφήνοντας το $m \to \infty$ παίρνουμε την δεύτερη ανισότητα. □

Θεωρούμε τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του T, τις ξαναριθμούμε παίρνοντας υπ' όψιν τις πολλαπλότητές τους, και ονομάζουμε ψ_n τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Τότε, για κάθε $f \in L^2[0,1]$ έχουμε

$$Tf = Th + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle T\psi_n$$

όπου $Th = 0$ ($h = \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \phi_i$ όπου ϕ_i οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 αν ο 0 είναι ιδιοτιμή, αλλιώς $h \equiv 0$). Δηλαδή,

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n.$$

Θεώρημα 6.6.2 *Αν $\lambda \notin \sigma(T)$, τότε για κάθε $g \in C[0,1]$ υπάρχει μοναδική $f \in C[0,1]$ τέτοια ώστε*

$$\lambda f(s) - \int_0^1 K(s,t)f(t)dt = g(s), \quad s \in [0,1].$$

Η f δίνεται από την

$$f(s) = \frac{g(s)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda - \lambda_n)} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n(s).$$

Απόδειξη: Αφού $\lambda \notin \sigma(T)$, ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. Άρα, για κάθε $g \in C[0,1]$ υπάρχει μοναδική $f \in L^2[0,1]$ τέτοια ώστε $\lambda f - Tf = g$. Από την Πρόταση 6.4.13, έχουμε

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, \psi_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} \psi_n(s) + h(s)$$

όπου $Th \equiv 0$. Άρα,

$$(Tf)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, \psi_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} (T\psi_n)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n(s).$$

Γυρίζοντας πίσω στην εξίσωση, παίρνουμε

$$\lambda f(s) = (Tf)(s) + g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n(s) + g(s),$$

δηλαδή,

$$f(s) = \frac{g(s)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda - \lambda_n)} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n(s).$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής, δείχνουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως ομοιόμορφα ως προς s (από το Λήμμα 6.6.1 κάθε ψ_n είναι συνεχής, οπότε η ομοιόμορφη σύγκλιση μάς εξασφαλίζει την συνέχεια της f): Αφού $\lambda \notin \sigma(T)$, υπάρχει $d > 0$ τέτοιος ώστε $|\lambda - \lambda_n| \geq d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{|\lambda|\,|\lambda - \lambda_n|} |\langle g, \psi_n \rangle| \cdot |\psi_n(s)| &\leq \frac{1}{|\lambda| d} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \psi_n(s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda| d} \left(\int_0^1 |K(s,t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda| d} \|K\|_\infty \|g\|_2 < +\infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

(1) $$\lambda f(s) - \int_0^1 (s+t) f(t) dt = g(s)$$

(2) $$\lambda f(s) - \int_0^1 2e^{s+t} f(t) dt = g(s)$$

(3) $$\lambda f(s) - \int_0^{\pi} \{\sin s \cos t + \cos s \sin t\} f(t) dt = g(s)$$

για δοσμένη g. Να γίνει διερεύνηση ως προς λ.

6.7 Αναλλοίωτοι υπόχωροι - το θεώρημα του Lomonosov

Ορισμός Έστω X χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$ και $T \in B(X)$. Ένας κλειστός υπόχωρος M του X λέγεται *αναλλοίωτος υπόχωρος του* T αν $T(M) \subseteq M$.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα του Lomonosov το οποίο δίνει μία μεγάλη κλάση τελεστών που έχουν γνήσιους αναλλοίωτους υπόχωρους.

Θεώρημα 6.7.1 (Lomonosov) *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$ και $T \in B(X)$ συμπαγής τελεστής που δεν είναι πολλαπλάσιο της ταυτοτικής απεικόνισης. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A} = \{S \in B(X) : S \circ T = T \circ S\}.$$

Τότε, υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M του X που είναι αναλλοίωτος για κάθε $S \in \mathcal{A}$. Ειδικότερα, $T(M) \subseteq M$.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|T\| = 1$. Παίρνουμε $x \in X$ με $\|Tx\| > 1$. Αφού $\|T\| = 1$, έχουμε $\|x\| > 1$. Θέτουμε

$$B = \{y \in X : \|y - x\| \leq 1\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\mathcal{A}$ είναι υποάλγεβρα του $B(X)$. Επομένως, για κάθε $z \neq 0$ στον X, το σύνολο

$$M_z := \{Sz : S \in \mathcal{A}\}$$

είναι υπόχωρος του X. Επίσης, αν $S_0 z \in M_z$ βλέπουμε ότι $S(S_0 z) = (SS_0)(z) \in M_z$ για κάθε $S \in \mathcal{A}$, δηλαδή $S(M_z) \subseteq M_z$ για κάθε $S \in \mathcal{A}$. Έπεται ότι ο $\overline{M_z}$ είναι κλειστός αναλλοίωτος υπόχωρος για κάθε $S \in \mathcal{A}$.

Έστω ότι δεν υπάρχει γνήσιος κλειστός αναλλοίωτος υπόχωρος M για το $\mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $z \neq 0$ στον X πρέπει να έχουμε $\overline{M_z} = X$ (γιατί $z \in M_z$ αφού $I \in \mathcal{A}$, άρα ο M_z δεν μπορεί να είναι τετριμμένος). Ειδικότερα, για κάθε $z \neq 0$ έχουμε $M_z \cap D(x, 1) \neq \emptyset$, δηλαδή: για κάθε $z \neq 0$ υπάρχει $S \in \mathcal{A}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|Sz - x\| < 1.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \notin \overline{T(B)}$: πράγματι, αν $\|y - x\| \leq 1$ τότε $\|Ty - Tx\| \leq \|T\| \cdot \|y - x\| \leq 1$, άρα

$$\|Tx\| \leq \|Tx - Ty\| + \|Ty\| \leq 1 + \|Ty\| \Longrightarrow \|Ty\| \geq \|Tx\| - 1.$$

Έπεται ότι για κάθε $z \in \overline{T(B)}$ ισχύει $\|z\| \geq \|Tx\| - 1 > 0$ (κάτι που δεν ισχύει αν $z = 0$).

Από την $(*)$, για κάθε $y \in \overline{T(B)}$ υπάρχουν $S \in \mathcal{A}$ και περιοχή V_y του y τέτοια ώστε $\|Sz - x\| < 1$ για κάθε $z \in V_y$. Όμως ο T είναι συμπαγής, άρα το $\overline{T(B)}$ είναι συμπαγές. Έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $W \subseteq \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $y \in \overline{T(B)}$ υπάρχει $S \in W$ με $\|Sy - x\| < 1$.

Αφού $Tx \in \overline{T(B)}$, υπάρχει $S_1 \in W$ τέτοιος ώστε

$$\|S_1 Tx - x\| < 1.$$

Τότε, $TS_1Tx \in \overline{T(B)}$ άρα υπάρχει $S_2 \in W$ τέτοιος ώστε

$$\|S_2TS_1Tx - x\| < 1.$$

Κάνοντας επαγωγή και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε $S \in W$ αντιμετατίθεται με τον T, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $S_1, \ldots, S_n \in W$ με

$$(**) \qquad \|(S_nS_{n-1}\cdots S_1)T^nx - x\| < 1.$$

Αφού το W είναι πεπερασμένο σύνολο, έχουμε

$$a := \max\{\|S\| : S \in W\} < +\infty.$$

Από την $(**)$ παίρνουμε

$$\|x\| - 1 \leq \|(S_nS_{n-1}\cdots S_1)T^nx\| \leq a^n\|T^nx\| \leq \|(aT)^n\| \cdot \|x\|.$$

Επομένως,

$$r(aT) = \lim_{n\to\infty} \|(aT)^n\|^{1/n} \geq \lim_{n\to\infty}(1 - \|x\|^{-1})^{1/n} = 1.$$

Ο aT είναι συμπαγής και $r(aT) > 0$, άρα ο aT έχει μη μηδενική ιδιοτιμή. Την ίδια ιδιότητα έχει λοιπόν και ο T. Έστω $\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή του T. Ο $M = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Αν $y \in M$ και $S \in \mathcal{A}$, τότε ο S αντιμετατίθεται με τον $\lambda I - T$, άρα

$$(\lambda I - T)(Sy) = S(\lambda y - Ty) = S(0) = 0,$$

δηλαδή $Sy \in M$. Άρα, ο M είναι αναλλοίωτος υπόχωρος για κάθε $S \in \mathcal{A}$, το οποίο είναι άτοπο (υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος M και αποδείξαμε ότι υπάρχει!). $\square$

Συνέπεια του θεωρήματος του Lomonosov είναι ότι κάθε συμπαγής τελεστής έχει γνήσιο αναλλοίωτο υπόχωρο. Για πολλά χρόνια ήταν ανοιχτό το *πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου*: Δίνεται χώρος Banach X. Είναι σωστό ότι κάθε $T \in B(X)$ έχει γνήσιο αναλλοίωτο υπόχωρο;

Το πρόβλημα απαντήθηκε αρνητικά από τον Enflo (1980). Λίγο αργότερα, ο Read (1985) έδωσε άλλα αντιπαραδείγματα στην περίπτωση $X = \ell_1$. Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής και είναι άγνωστο ως τώρα αν η απάντηση στο πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου είναι καταφατική ή αρνητική για την κλάση των αυτοπαθών χώρων. Ειδικότερα, το πρόβλημα είναι ανοιχτό (και κεντρικό) για την κλάση των χώρων Hilbert.

Συναρτησιακή Ανάλυση - 25/5/2001

1. (α) Δείξτε ότι ο $C[0,1]^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y υπόχωρος του X^* με την ιδιότητα: για κάθε $x \neq 0$ στον X υπάρχει $f \in Y$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$. Δείξτε ότι $\overline{Y} = X^*$.

2. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in X$, η απεικόνιση $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x,y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(ii) Για κάθε $y \in Y$, η απεικόνιση $T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x,y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T(x,y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|$$

για κάθε $(x,y) \in X \times Y$.

3. Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: για κάθε $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

4. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $Y \cap Z = \{0\}$. Η «γωνία» $\gamma(Y,Z)$ των Y και Z ορίζεται από την

$$\gamma(Y,Z) = \inf\{\|y - z\| : y \in S_Y,\ z \in S_Z\}.$$

Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

(β) η $P : Y + Z \to Y$ με $P(y+z) = y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(γ) $\gamma(Y,Z) > 0$.

5. (α) Έστω X χώρος Banach και $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει.

(ii) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\left\|\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i x_i\right\| < \delta$ για κάθε επιλογή προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=i_0}^{\infty}$.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον H. Αν, για κάθε επιλογή προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ η $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει, δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$.
(Υπόδειξη: Γενικευμένος κανόνας του παραλληλογράμμου: Για κάθε n,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{-1,1\}^n} \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.)$$

6. Έστω X χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$ και $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν $\lambda \in \partial(\sigma(T))$, τότε ο λ είναι κατά προσέγγιση ιδιοτιμή του T: δηλαδή, υπάρχουν $x_n \in S_X$ τέτοια ώστε $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$.

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε $\lambda_n \notin \sigma(T)$ με $\lambda_n \to \lambda$ και δείξτε ότι $\|(\lambda_n I - T)^{-1}\| \to \infty$.]

7. Έστω X χώρος Banach και $T \in K(X)$. Θέτουμε $S = I - T$ και ορίζουμε

$$N_k = \mathrm{Ker}(S^k) \quad , \quad M_k = \mathrm{Im}(S^k)$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι:

(α) $N_k \subseteq N_{k+1}$ και $M_k \supseteq M_{k+1}$ για κάθε $k \geq 0$.

(β) Οι ακολουθίες υποχώρων $\{N_k\}$ και $\{M_k\}$ είναι τελικά σταθερές.