Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών
Άνοιξη 2002

.

Περιεχόμενα

1 Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes **5**

1.1 Ολοκλήρωμα Riemann 5

1.1.1 Ορισμός 5

1.1.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann 8

1.1.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων 11

1.1.4 Ασκήσεις 13

1.2 Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς αύξουσα συνάρτηση 15

1.2.1 Εισαγωγή 15

1.2.2 Ορισμός του ολοκληρώματος 17

1.2.3 Τα βασικά θεωρήματα για την ύπαρξη του ολοκληρώματος . . 20

1.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος 25

1.2.5 Ολοκλήρωση ως προς αύξουσες συναρτήσεις ειδικής μορφής . 27

1.2.6 Ασκήσεις 30

1.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης 33

1.3.1 Ορισμός και παραδείγματα 33

1.3.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης 37

1.3.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης 39

1.3.4 Θετική και αρνητική κύμανση - Ανάλυση Jordan 41

1.3.5 Ασκήσεις 45

1.4 Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς συνάρτηση με φραγμένη κύμανση 47

1.4.1 Ορισμός του ολοκληρώματος 47

1.4.2 Ιδιότητες του ολοκληρώματος 50

1.4.3 Υπολογισμός του ολοκληρώματος σε ειδικές περιπτώσεις . . . 54

1.4.4 Ολοκλήρωση κατά μέρη 59

1.4.5 Ασκήσεις 60

2 Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue **63**

2.1 Εισαγωγή 63

2.2 Μέτρο Lebesgue 65

2.2.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue 65

2.2.2 Μετρήσιμα σύνολα 69

2.2.3 Το σύνολο του Cantor 76

2.2.4 Παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου 80
2.2.5 Ασκήσεις 81
2.3 Μετρήσιμες συναρτήσεις 84
2.3.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες 84
2.3.2 Ασκήσεις 89
2.4 Ολοκλήρωμα Lebesgue 90
2.4.1 Απλές συναρτήσεις 91
2.4.2 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις 95
2.4.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις 96
2.4.4 Η γενική περίπτωση 103
2.4.5 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann 108
2.4.6 Ασκήσεις 113

Κεφάλαιο 1

Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

1.1 Ολοκλήρωμα Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο υπενθυμίζουμε τον ορισμό του Darboux για το ολοκλήρωμα Riemann, αποδεικνύουμε το κριτήριο του Riemann και δίνουμε παραδείγματα εφαρμογής του. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

1.1.1 Ορισμός

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. **Διαμέριση** του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη. Εξ ορισμού, κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a, b]$).

Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

Η διαμέριση P_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, η **κοινή εκλέπτυνση** των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$.

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Η P διαμερίζει το $[a,b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_k,x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1},x_n]$. Για κάθε $k = 0,1,\ldots,n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, επομένως και σε κάθε υποδιάστημα $[x_k,x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f,P) \leq U(f,P) \tag{1.1}$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα από την (1.1):

Λήμμα 1.1.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2). \tag{1.2}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη της (1.2) θα βασιστεί στον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0,1,\ldots,n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε
>
> $$L(f,P) \leq L(f,P_1) \leq U(f,P_1) \leq U(f,P).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \Longrightarrow \inf B \leq \inf A$). Επομένως,

$$L(f,P_1) - L(f,P) = m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k) \geq 0.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι

$$U(f,P_1) \le U(f,P). \qquad \square$$

Για την απόδειξη του Λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f,P_1) \le L(f,P)$.

Αφού η P προκύπτει από την P_2 με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων, όμοια βλέπουμε ότι $U(f,P) \le U(f,P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f,P) \le U(f,P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f,P_1) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,P_2). \qquad \square$$

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A = \Big\{ L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\}$$

και

$$B = \Big\{ U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\}.$$

Από το Λήμμα 1.1.1 έχουμε: για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει $a \le b$. Άρα, $\sup A \le \inf B$ (άσκηση). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \Big\{ L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \Big\{ U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\}$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ορισμός. Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

1.1.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι πολύπλοκος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να αποφασίσει αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας που ακολουθεί είναι πολύ πιό εύχρηστο:

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,P) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Παραδείγματα: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Riemann για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:

(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \ldots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1\right\}.$$

Η f είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

και

$$U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Αρκεί να πάρουμε $n \in \mathbb{N}$ με $1/n < \varepsilon$ και $P = P_n$.

Από το Θεώρημα 1.1.1 συμπεραίνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αφήνουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \frac{2}{3}$$

και να συμπεράνετε ότι

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

(β) Η συνάρτηση του Dirichlet $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της g ως προς την P. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $g(q_k) = 1$, $g(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq g(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$ και $M_k = 1$. Συνεπώς,

$$L(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$$

και

$$U(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 1.$$

Αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε

$$\underline{\int_0^1} g(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \overline{\int_0^1} g(x)dx = 1.$$

Άρα, η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(γ) Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $h(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq h(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$. Συνεπώς,

$$L(h,P) = 0.$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k > (x_k + x_{k+1})/2$ στο (x_k, x_{k+1}), άρα $M_k \geq h(q_k) > (x_k + x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(h,P) &> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \\ &= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αφού $U(h,P)-L(h,P) > \frac{1}{2}$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$, το κριτήριο του Riemann δεν ικανοποιείται (πάρτε $\varepsilon = 1/3$). Άρα, η h δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(w,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : w(x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $w(x) \geq \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $w(x) = 1/q \geq \varepsilon$ δηλαδή $q \leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ - γιατί;)].

Έστω $z_1 < z_2 \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα διαστήματα $[a_i, b_i]$ με μήκος $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και $a_i \leq z_i \leq b_i$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leq 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(w,P_\varepsilon) &\leq \varepsilon \cdot (a_1 - 0) + 1 \cdot (b_1 - a_1) + \varepsilon \cdot (a_2 - b_1) + \cdots + 1 \cdot (b_N - a_N) \\ &\quad + \varepsilon \cdot (1 - b_N) \\ &\leq \varepsilon \cdot \Big(a_1 + (a_2 - b_1) + \cdots + (a_N - b_{N-1}) + (1 - b_N) \Big) \\ &\quad + N \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(w,P_\varepsilon) - L(w,P_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann η w είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

1.1.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Θα δείξουμε ότι όλες οι μονότονες και όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 1.1.2 *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε αν

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b \right\}$$

είναι η διαμέριση του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, να ισχύει

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_1) + \cdots + f(x_n) \right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n},$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 1.1.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 1.1.3 *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση P_n που αποτελείται από τα σημεία

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Έστω $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ τ.ω.

$$M_k = f(y_k') \quad \text{και} \quad m_k = f(y_k'').$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 1.1.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

1.1.4 Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις αυτής της παραγράφου μπορείτε (και πρέπει) να υποθέσετε γνωστές όλες τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann που αποδεικνύονται στο μάθημα «Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι».

1. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα η $|f|$ να είναι Riemann ολοκληρώσιμη αλλά η f όχι.

2. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που διαφέρουν μόνο σε ένα σημείο $\gamma \in [a,b]$ (δηλαδή, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \neq \gamma$ και $f(\gamma) \neq g(\gamma)$). Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

4. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (γιατί;). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ τέτοια ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_1,b_1]$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a_2 < b_2$ στο (a_1,b_1) τέτοια ώστε $b_2 - a_2 < 1/2$ και

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

(γ) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n,b_n] \subseteq (a_{n-1},b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ τέτοια ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(δ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(ε) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

[*Υπόδειξη:* Από την προηγούμενη άσκηση υπάρχουν σημεία στα οποία η f είναι συνεχής.]

7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \int_0^1 f(x^n)dx.$$

Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

8. Δείξτε ότι η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό του $(0,1]$.

1.2 Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς αύξουσα συνάρτηση

1.2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα ορίσουμε μια έννοια ολοκληρώματος της f ως προς τη ϕ που αποτελεί γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann. Το ολοκλήρωμα αυτό θα συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) \quad \text{ή} \quad \int_a^b f d\phi$$

και θα ονομάζεται **ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της f ως προς τη ϕ**. Στην περίπτωση που $\phi(x) = x$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f d\phi$ συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann της f.

Για να γίνει κατανοητή η ανάγκη μιας τέτοιας γενίκευσης, ξεκινάμε με κάποια παραδείγματα.

(α) Το πρώτο παράδειγμα προέρχεται από τη Μηχανική. Είναι αυτό που χρησιμοποίησε ο ίδιος ο Stieltjes για να εξηγήσει τη σημασία του ολοκληρώματος που εισήγαγε. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$ σαν μια ράβδο και θέλουμε να υπολογίσουμε τη **ροπή** της ράβδου ως προς το σημείο 0.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η μάζα της ίδιας της ράβδου είναι αμελητέα και ότι στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (0,1]$ είναι τοποθετημένες μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_k$ αντίστοιχα. Τότε, η ροπή δίνεται από τον τύπο

$$M = x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_km_k.$$

Στην περίπτωση που η ράβδος είναι ομογενής με πυκνότητα ρ σκεφτόμαστε ως εξής: Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε μικρά τμήματα χρησιμοποιώντας μία διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ του $[0,1]$. Η μάζα κάθε τμήματος $(x_k, x_{k+1}]$ είναι ίση με $\rho(x_{k+1} - x_k)$. Αν η διαμέρισή μας είναι αρκετά λεπτή, μπορούμε να θεωρήσουμε το τμήμα $(x_k, x_{k+1}]$ σαν ένα υλικό σημείο με μάζα $\rho(x_{k+1} - x_k)$ τοποθετημένη στη θέση x_k. Αυτό σημαίνει ότι η ροπή της ράβδου προσεγγίζεται από το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho x_k(x_{k+1} - x_k).$$

Το όριο (με κατάλληλη έννοια) τέτοιων αθροισμάτων καθώς οι διαμερίσεις λεπταίνουν και το πλάτος τους τείνει στο 0 πρέπει να μας δίνει τη ροπή της ράβδου. Όμως, αυτό το όριο είναι το $\int_0^1 \rho x\, dx$. Άρα,

$$M = \int_0^1 \rho x\, dx.$$

Στη γενική περίπτωση η μάζα της ράβδου δεν είναι κατανεμημένη ούτε με τον ένα ούτε με τον άλλο τρόπο. Αν $m(x)$ είναι η μάζα του τμήματος $[0, x]$ και αν θεωρήσουμε μία διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ του $[0, 1]$, τότε η μάζα κάθε τμήματος $(x_k, x_{k+1}]$ θα είναι ίση με $m(x_{k+1}) - m(x_k)$. Σκεπτόμενοι όπως πριν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ροπή της ράβδου προσεγγίζεται από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \big(m(x_{k+1}) - m(x_k)\big).$$

Δηλαδή περιμένουμε ότι, καθώς οι διαμερίσεις λεπταίνουν, τα αθροίσματα αυτά πλησιάζουν κάποιον αριθμό που είναι η ροπή της ράβδου. Σύμφωνα με τον ορισμό που θα δώσουμε, αυτός ο αριθμός θα είναι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\, dm(x).$$

Παρατηρήστε ότι η m είναι αύξουσα συνάρτηση.

(β) Το δεύτερο παράδειγμα προέρχεται από τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με πιθανές τιμές τις $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Τότε, η μέση τιμή της X δίνεται από τον τύπο

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} x_i P(X = x_k).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μία τυχαία μεταβλητή X που δεν είναι αναγκαστικά διακριτή (αλλά ούτε και συνεχής). Το ερώτημα είναι με ποιόν τρόπο θα ορίσουμε τη μέση τιμή της X.

Ας υποθέσουμε ότι το πεδίο τιμών της X περιέχεται στο διάστημα $(a, b]$. Θεωρούμε μία διαμέριση $Q = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ και την διακριτή τυχαία μεταβλητή X_Q που παίρνει τις τιμές $x_1, \ldots, x_n$ με πιθανότητα

$$P(X_Q = x_{k+1}) = P(x_k < X \le x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Είναι λογικό να πούμε ότι η μέση τιμή της X προσεγγίζεται από τη μέση τιμή της X_Q, δηλαδή από το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} P(x_k < X \le x_{k+1}).$$

Αν $F(x) = P(X \leq x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της X, τότε το προηγούμενο άθροισμα είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big).$$

Η κατάσταση μοιάζει τώρα πολύ με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος. Περιμένουμε ότι καθώς επιλέγουμε όλο και πιο πυκνά τα σημεία x_k μέσα στο $[a,b]$, τα παραπάνω αθροίσματα συγκλίνουν σε κάποιον αριθμό. Αυτός ο αριθμός είναι η μέση τιμή της X και είναι ο ίδιος με αυτόν που θα παριστάνει το σύμβολο

$$\int_a^b x\, dF(x).$$

Παρατηρήστε ότι η F είναι αύξουσα (συνεχής από δεξιά) συνάρτηση.

(γ) Στον Απειροστικό Λογισμό χρησιμοποιούμε μερικές φορές το σύμβολο

$$\int_a^b f(x)d\phi(x)$$

για να παραστήσουμε την ποσότητα

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx.$$

Ο ορισμός που θα δώσουμε για το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes συμφωνεί με αυτόν το συμβολισμό. Στην περίπτωση που η ϕ είναι παραγωγίσιμη και που τα δύο ολοκληρώματα έχουν νόημα, το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\phi(x)$ είναι ίσο με το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\phi'(x)dx$.

1.2.2 Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Γενικεύοντας τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann θα δούμε πότε μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **ολοκληρώσιμη ως προς την** ϕ.

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την ϕ για τη διαμέριση P είναι οι αριθμοί

$$U(f,\phi,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big)$$

και

$$L(f,\phi,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)$$

αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι οι διαφορές $\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί (η ϕ έχει υποτεθεί αύξουσα).

Λήμμα 1.2.1 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1,P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f,\phi,P_1)\leq U(f,\phi,P_2). \tag{2.1}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του Λήμματος 1.1.1. Αρκεί να αποδειχθεί το εξής:

> Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n=b\}$ και $x_k<y<x_{k+1}$ για κάποιο $k=0,1,\ldots,n-1$. Αν $P_1=P\cup\{y\}$, τότε
>
> $$L(f,\phi,P)\leq L(f,\phi,P_1)\leq U(f,\phi,P_1)\leq U(f,\phi,P).$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θέτουμε $m_k^{(1)}=\inf\{f(x):x_k\leq x\leq y\}$ και $m_k^{(2)}=\inf\{f(x):y\leq x\leq x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k\leq m_k^{(1)}$ και $m_k\leq m_k^{(2)}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}L(f,\phi,P_1)-L(f,\phi,P) &= m_k^{(1)}\big(\phi(y)-\phi(x_k)\big)+m_k^{(2)}\big(\phi(x_{k+1})-\phi(y)\big)\\ &\quad -m_k\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)\geq 0.\end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$U(f,\phi,P_1)\leq U(f,\phi,P). \qquad \square$$

Ορίζουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα της f ως προς την ϕ** το

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x)=\sup\Big\{L(f,\phi,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα της f ως προς την ϕ** το

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x)=\inf\Big\{U(f,\phi,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}.$$

Από το Λήμμα 1.2.1 έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x)\leq \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x).$$

Ορισμός. Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται **Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x)= \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x).$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της f ως προς την** ϕ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) \quad ή \quad \int_a^b f\,d\phi.$$

Γράφοντας $f \in \mathcal{R}(\phi)$ εννοούμε ότι η f είναι RS-ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ.

Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann εξακολουθεί να ισχύει.

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) < L(f,\phi,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) > U(f,\phi,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,\phi,P) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f,\phi,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) = \underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) \\ &< L(f,\phi,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,\phi,P) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) < \varepsilon.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,\phi,P_\varepsilon) < L(f,\phi,P_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) \leq U(f,\phi,P_\varepsilon) < L(f,\phi,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) \le \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) \le \underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x),$$

δηλαδή η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ. □

1.2.3 Τα βασικά θεωρήματα για την ύπαρξη του ολοκληρώματος

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.1.3, οι συνεχείς και οι μονότονες συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες. Στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων η γενίκευση αυτού του αποτελέσματος δεν παρουσιάζει καμμία δυσκολία.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, επομένως μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε διαμέριση P_n του $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n} < \delta$. Τότε, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ έχουμε

$$M_k - m_k < \varepsilon$$

(βλέπε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,\phi,P_n) - L(f,\phi,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &= \varepsilon\big(\phi(b) - \phi(a)\big). \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$. □

Η κατάσταση είναι διαφορετική όταν μελετάμε την ολοκληρωσιμότητα των μονότονων συναρτήσεων:

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \le x \le 0 \\ 1 & , 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Η ϕ είναι αύξουσα. Παίρνουμε σαν f την ίδια την ϕ. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχούσα διαμέριση

$$P = \{-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = 0 < x_{s+1} < \ldots < x_n = 1\}$$

που περιέχει το 0. Παρατηρούμε ότι $\phi(x_{s+1}) - \phi(x_s) = 1$ και $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) = 0$ αν $k \neq s$. Άρα,

$$U(f, \phi, P) = M_s = 1 \quad \text{και} \quad L(f, \phi, P) = m_s = 0. \tag{2.2}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\overline{\int_{-1}^{1}} f\, d\phi = 1 \quad \text{και} \quad \underline{\int_{-1}^{1}} f\, d\phi = 0, \tag{2.3}$$

σύμφωνα με την παρατήρηση που ακολουθεί. Άρα, $f \notin \mathcal{R}(\phi)$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το πρόβλημα είναι ότι οι f και ϕ έχουν κοινό σημείο ασυνέχειας το 0.

Παρατήρηση: Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε μια διαμέριση Q του $[a, b]$. Τότε,

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\phi(x) = \sup \Big\{ L(f, \phi, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b], Q \subseteq P \Big\}$$

και

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\phi(x) = \inf \Big\{ U(f, \phi, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b], Q \subseteq P \Big\}.$$

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. Η (2.3) προκύπτει από την (2.2) αν πάρουμε σαν Q τη διαμέριση $\{-1, 0, 1\}$.

Στην περίπτωση που η ϕ είναι συνεχής, το Θεώρημα 1.1.2 γενικεύεται χωρίς κανένα πρόβλημα.

Θεώρημα 1.2.3 *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ.*

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\phi(a) < \phi(b)$ (αλλιώς η ϕ είναι σταθερή και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε).

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \geq 2$ χωρίζουμε το διάστημα $[\phi(a), \phi(b)]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Δηλαδή, θεωρούμε τη διαμέριση $\{\phi(a) = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \phi(b)\}$ με

$$y_{k+1} - y_k = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μας δίνει $x_k \in (a,b)$ με $\phi(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Αφού η ϕ είναι αύξουσα και $y_k < y_{k+1}$, έπεται ότι

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[a,b]$ που αποτελείται από αυτά τα σημεία. Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,\phi,P_n) - L(f,\phi,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big)(y_{k+1} - y_k) \\ &= \frac{\phi(b) - \phi(a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \\ &= \frac{\phi(b) - \phi(a)}{n} \cdot (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 1.2.1, η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ. □

Κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 1.2.4 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας και ότι η ϕ είναι συνεχής σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι ασυνεχής. Τότε, η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ.*

Απόδειξη: Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Έστω $A = \{y_1 < \ldots < y_m\}$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε διαμέριση P του $[a,b]$ ως εξής: αφού η ϕ είναι συνεχής σε κάθε y_s, μπορούμε να βρούμε ξένα διαστήματα $[u_s, v_s] \subseteq [a,b]$ με $y_s \in [u_s, v_s]$ και

$$\phi(v_s) - \phi(u_s) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

[Αν $y_s \in (a,b)$ μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $u_s < y_s < v_s$. Αν $y_1 = a$ ή $y_m = b$, τότε $u_1 = y_1 = a$ ή $v_m = y_m = b$ αντίστοιχα.]

Σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[v_s, u_{s+1}]$ και $[a, u_1]$, $[v_m, b]$ αν αυτά δεν εκφυλίζονται, η f είναι συνεχής άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επειδή το πλήθος αυτών των υποδιαστημάτων είναι πεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν τα t, s ανήκουν σε κάποιο από αυτά τα υποδιαστήματα και $|t-s| < \delta$, τότε $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Ορίζουμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ χωρίζοντας καθένα από τα $[v_s, u_{s+1}]$ σε υποδιαστήματα με μήκος μικρότερο από δ. Δηλαδή, τα

$[u_s, v_s]$ είναι υποδιαστήματα της P και κάθε άλλο υποδιάστημα της P έχει μήκος μικρότερο από δ. Έστω I το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ για τα οποία το $[x_k, x_{k+1}]$ είναι υποδιάστημα του πρώτου είδους και J το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ για τα οποία το $[x_k, x_{k+1}]$ είναι υποδιάστημα του δεύτερου είδους. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) &= \sum_{k\in I}(M_k - m_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &\quad + \sum_{k\in J}(M_k - m_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big). \end{aligned}$$

Από την κατασκευή της P, αν $k \in I$ τότε $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) < \varepsilon/m$ ενώ αν $k \in J$ τότε $M_k - m_k < \varepsilon$. Αφού το πλήθος των στοιχείων του I είναι m (όσα και τα σημεία ασυνέχειας της f), παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) &\leq \frac{\varepsilon}{m}\sum_{k\in I}(M_k - m_k) + \varepsilon\sum_{k\in J}\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(\phi(b) - \phi(a)) \\ &= \varepsilon(2M + \phi(b) - \phi(a)). \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, οπότε συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι συνθέτοντας ολοκληρώσιμη με συνεχή συνάρτηση παίρνουμε ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 1.2.5 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ, με $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Έστω $g : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $g \circ f$ είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[m,M]$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [m,M]$ και $|t-s| < \delta$, τότε $|g(t) - g(s)| < \varepsilon$. Μπορούμε να πάρουμε το $\delta < \varepsilon$ (γιατί;). Επίσης, υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε $|g(t)| \leq A$ για κάθε $t \in [m,M]$.

Έχουμε υποθέσει ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$. Επομένως, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ για την οποία

$$U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) < \delta^2.$$

Γράφουμε M_k και m_k για το supremum και το infimum των τιμών της f στο $[x_k, x_{k+1}]$ αντίστοιχα. Επίσης, M_k^* και m_k^* για το supremum και το infimum των τιμών της $g \circ f$ στο $[x_k, x_{k+1}]$ αντίστοιχα. Ορίζουμε

$$A = \{k : M_k - m_k < \delta\} \quad \text{και} \quad B = \{k : M_k - m_k \geq \delta\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \delta\sum_{k\in B}\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) &\leq \sum_{k\in B}(M_k - m_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) \\ &\leq U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) \\ &< \delta^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k\in B}\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)<\delta. \tag{2.4}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $k\in A$ τότε $|f(t)-f(s)|\leq M_k-m_k<\delta$ για κάθε $t,s\in[x_k,x_{k+1}]$, οπότε

$$M_k^*-m_k^*=\sup\{g(f(t)):t\in[x_k,x_{k+1}]\}-\inf\{g(f(s)):s\in[x_k,x_{k+1}]\}\leq\varepsilon, \tag{2.5}$$

ενώ αν $k\in B$ έχουμε την τετριμμένη εκτίμηση

$$M_k^*-m_k^*\leq 2\sup\{g(f(t)):t\in[x_k,x_{k+1}]\}\leq 2A. \tag{2.6}$$

Από τις (2.4), (2.5) και (2.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
U(g\circ f,\phi,P)-L(g\circ f,\phi,P) &= \sum_{k\in A}(M_k^*-m_k^*)\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)\\
&\quad+\sum_{k\in B}(M_k^*-m_k^*)\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)\\
&\leq \varepsilon(\phi(b)-\phi(a))+2A\sum_{k\in B}\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)\\
&< \varepsilon(\phi(b)-\phi(a))+2A\delta\\
&< \varepsilon(\phi(b)-\phi(a)+2A).
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα $g\circ f\in\mathcal{R}(\phi)$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι ομοιόμορφο όριο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 1.2.6 *Έστω $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $f,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n\in\mathcal{R}(\phi)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Τότε, $f\in\mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b f_n d\phi\to\int_a^b f\,d\phi.$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $f_n\to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n\geq n_0(\varepsilon)$ και κάθε $x\in[a,b]$,

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.7) με $\varepsilon=1$ βλέπουμε εύκολα ότι η f είναι φραγμένη: για οποιοδήποτε $n\geq n_0(1)$ ισχύει

$$|f(x)|\leq|f_n(x)|+1$$

για κάθε $x\in[a,b]$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι η f_n είναι φραγμένη (εξ ορισμού, αφού είναι ολοκληρώσιμη).

Έστω $n \geq n_0(\varepsilon)$. Αφού $f_n \in \mathcal{R}(\phi)$, υπάρχει διαμέριση $P = P(n,\varepsilon) = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ για την οποία

$$U(f_n,\phi,P) - L(f_n,\phi,P) < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Αν M_k^n και m_k^n, M_k και m_k είναι τα supremum και infimum των f_n και f αντίστοιχα στο $[x_k,x_{k+1}]$, από την (2.7) συμπεραίνουμε ότι

$$M_k^n - \varepsilon \leq M_k \leq M_k^n + \varepsilon \quad \text{και} \quad m_k^n - \varepsilon \leq m_k \leq m_k^n + \varepsilon$$

για κάθε $k = 0,1,\ldots,n-1$. Έπεται ότι

$$U(f_n,\phi,P) - \varepsilon(\phi(b)-\phi(a)) \leq U(f,\phi,P) \leq U(f_n,\phi,P) + \varepsilon(\phi(b)-\phi(a)) \tag{2.9}$$

και

$$L(f_n,\phi,P) - \varepsilon(\phi(b)-\phi(a)) \leq L(f,\phi,P) \leq L(f_n,\phi,P) + \varepsilon(\phi(b)-\phi(a)). \tag{2.10}$$

Το πρώτο μας συμπέρασμα είναι ότι

$$U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) \leq U(f_n,\phi,P) - L(f_n,\phi,P) + 2\varepsilon(\phi(b)-\phi(a)).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$.

Η (2.9) ισχύει για κάθε διαμέριση Q του $[a,b]$ (γιατί;). Παίρνοντας infimum ως προς Q, έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n d\phi - \int_a^b f\, d\phi \right| \leq \varepsilon(\phi(b)-\phi(a))$$

για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας,

$$\int_a^b f_n d\phi \to \int_a^b f\, d\phi. \qquad \square$$

1.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς αύξουσα συνάρτηση έχει τις ίδιες βασικές ιδιότητες με το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 1.2.7 *(α) Αν $f_1 \in \mathcal{R}(\phi)$ και $f_2 \in \mathcal{R}(\phi)$, τότε $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b (f_1+f_2)d\phi = \int_a^b f_1 d\phi + \int_a^b f_2 d\phi.$$

(β) Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $t \in \mathbb{R}$, τότε $tf \in \mathcal{R}(\phi)$ και

$$\int_a^b (tf)d\phi = t\int_a^b f d\phi.$$

(γ) Αν $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\phi)$ και $f_1(x) \leq f_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f_1 \, d\phi \leq \int_a^b f_2 \, d\phi.$$

(δ) Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ στο $[a,b]$ και αν $a < c < b$, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$ στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$, και

$$\int_a^b f \, d\phi = \int_a^c f \, d\phi + \int_c^b f \, d\phi.$$

(ε) Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ στο $[a,b]$ και αν $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\left| \int_a^b f \, d\phi \right| \leq M\big(\phi(b) - \phi(a)\big).$$

(ζ) Αν $f \in \mathcal{R}(\phi_1)$ και $f \in \mathcal{R}(\phi_2)$, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi_1 + \phi_2)$ και

$$\int_a^b f \, d(\phi_1 + \phi_2) = \int_a^b f \, d\phi_1 + \int_a^b f \, d\phi_2.$$

(η) Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $t > 0$, τότε $f \in \mathcal{R}(t\phi)$ και

$$\int_a^b f \, d(t\phi) = t \int_a^b f \, d\phi.$$

Απόδειξη: Άσκηση.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.5 αποδεικνύουμε εύκολα το εξής.

Θεώρημα 1.2.8 *Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $g \in \mathcal{R}(\phi)$, τότε*

1. $f^2 \in \mathcal{R}(\phi)$.
2. $f \cdot g \in \mathcal{R}(\phi)$.
3. $|f| \in \mathcal{R}(\phi)$ *και* $\left| \int_a^b f \, d\phi \right| \leq \int_a^b |f| \, d\phi$.

Απόδειξη: Για τον πρώτο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι $f^2 = g \circ f$, όπου $g(t) = t^2$. Αφού η g είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.2.5.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι $4f \cdot g = (f+g)^2 - (f-g)^2$. Το συμπέρασμα έπεται από τον προηγούμενο ισχυρισμό και από το Θεώρημα 1.2.7 (α)-(β).

Τέλος, $|f| = h \circ f$, όπου $h(t) = |t|$. Άρα, $|f| \in \mathcal{R}(\phi)$. Η ανισότητα προκύπτει από την $-|f| \leq f \leq |f|$ και από το Θεώρημα 1.2.7 (γ). □

1.2.5 Ολοκλήρωση ως προς αύξουσες συναρτήσεις ειδικής μορφής

Σε αυτήν την τελευταία παράγραφο θα δούμε ποιά μορφή παίρνει (υπό προϋποθέσεις) το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς την ϕ στην περίπτωση που η ϕ είναι «κλιμακωτή» ή παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Ορισμός. Η συνάρτηση $I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται από την

$$I(x)=\begin{cases}0 & , x\leq 0\\ \\ 1 & , x>0.\end{cases}$$

Η I είναι αύξουσα.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, συνεχής στο $s\in(a,b)$. Αν $\phi(x)=I(x-s)$, τότε $f\in\mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b f(x)\,d\phi(x)=f(s).$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο s, άρα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε: αν $x\in[a,b]$ και $|x-s|<\delta$, τότε $|f(x)-f(s)|<\varepsilon$.

Θεωρούμε $x_1<s<x_2$ στο $[a,b]$ με $|x_i-s|<\delta$ $(i=1,2)$ και ορίζουμε τη διαμέριση $Q=\{x_0=a<x_1<x_2<x_3=b\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$U(f,\phi,Q)=M_1\quad \text{και}\quad L(f,\phi,Q)=m_1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$M_1=f(s)+\sup\{f(x)-f(s):x_1\leq x\leq x_2\}\leq f(s)+\varepsilon$$

και

$$m_1=f(s)+\inf\{f(x)-f(s):x_1\leq x\leq x_2\}\geq f(s)-\varepsilon.$$

Άρα,

$$U(f,\phi,Q)-L(f,\phi,Q)=M_1-m_1\leq 2\varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $f\in\mathcal{R}(\phi)$. Επιπλέον,

$$f(s)-\varepsilon\leq L(f,\phi,Q)\leq\int_a^b f\,d\phi\leq U(f,\phi,Q)\leq f(s)+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int_a^b f(x)\,d\phi(x)=f(s).\qquad\square$$

Θεώρημα 1.2.9 *Έστω $\{c_n\}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty.$$

Θεωρούμε ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων $s_n \in (a,b)$ και ορίζουμε την αύξουσα συνάρτηση

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_a^b f \, d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n).$$

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής, άρα $f \in \mathcal{R}(\phi)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ για το οποίο

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

και θεωρούμε τις αύξουσες συναρτήσεις

$$\phi_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n) \quad \text{και} \quad \phi_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes (ως προς ϕ) και την Πρόταση 1.2.1 έχουμε

$$\int_a^b f \, d\phi_1 = \sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f \, d\phi - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) \right| &= \left| \int_a^b f \, d\phi_1 + \int_a^b f \, d\phi_2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) \right| \\
&= \left| \int_a^b f \, d\phi_2 - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n f(s_n) \right| \\
&\leq \left| \int_a^b f \, d\phi_2 \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n |f(s_n)|.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα εξής: η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq A$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f \, d\phi_2 \right| &\leq \int_a^b |f| \, d\phi_2 \leq A(\phi_2(b) - \phi(a)) \\
&\leq A \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < A\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\sum_{n+N+1}^{\infty} c_n|f(s_n)| \leq A \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < A\varepsilon.$$

Άρα,

$$\left| \int_a^b f\, d\phi - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) \right| \leq 2A\varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.2.10 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε, η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ αν και μόνο αν η $f \cdot \phi'$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Σε αυτήν την περίπτωση,*

$$\int_a^b f(x)\, d\phi(x) = \int_a^b f(x)\phi'(x)dx.$$

Απόδειξη: Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ με την ιδιότητα

$$U(\phi', P) - L(\phi', P) < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την ϕ σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ βρίσκουμε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ με

$$\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) = \phi'(t_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{2.12}$$

Θεωρούμε τυχόντα σημεία $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Τότε,

$$I := \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\phi'(t_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Θεωρούμε το άθροισμα

$$II := \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\phi'(s_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|\, I - II \,| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\big(\phi'(t_k) - \phi'(s_k)\big)(x_{k+1} - x_k) \right| \\
&\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k) - \phi'(s_k)|(x_{k+1} - x_k) \\
&\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \big(M_k(\phi') - m_k(\phi')\big)(x_{k+1} - x_k) \\
&= M\big(U(\phi', P) - L(\phi', P)\big) < M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Από την $I \leq II + M\varepsilon$, παίρνοντας supremum ως προς όλες τις επιλογές σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε

$$U(f,\phi,P) \leq U(f\cdot\phi',P) + M\varepsilon. \tag{2.13}$$

Εντελώς ανάλογα,

$$U(f\cdot\phi',P) \leq U(f,\phi,P) + M\varepsilon. \tag{2.14}$$

Η (2.11) ισχύει για κάθε διαμέριση $Q \supseteq P$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις (2.13), (2.14). Παίρνοντας infimum ως προς $Q \supseteq P$ έχουμε

$$\left| \overline{\int_a^b} f\, d\phi - \overline{\int_a^b} f\cdot\phi' \right| \leq M\varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\phi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\phi'(x) dx. \tag{2.15}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\phi(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\phi'(x) dx. \tag{2.16}$$

Οι δύο ισχυρισμοί του θεωρήματος προκύπτουν εύκολα από τις (2.15) και (2.16). $\square$

1.2.6 Ασκήσεις

Σημείωση: Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** χ_A του A είναι η συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\chi_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\chi_A(x) = 0$ αν $x \notin A$.

1. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in (a,b)$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$\phi(x-) = \lim_{y\to x^-} \phi(y) \quad \text{και} \quad \phi(x+) = \lim_{y\to x^+} \phi(y)$$

και $\phi(x-) \leq \phi(x+)$ με γνήσια ανισότητα αν και μόνο αν η ϕ είναι ασυνεχής στο x.
(β) Αν η ϕ είναι ασυνεχής στο $x \in (a,b)$, θέτουμε $I(x) = (\phi(x-), \phi(x+))$. Δείξτε ότι αν $x_1 \neq x_2$ είναι δύο σημεία ασυνέχειας της ϕ στο (a,b), τότε $I(x_1) \cap I(x_2) = \emptyset$.
(γ) Δείξτε ότι η ϕ έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.

2. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε μια διαμέριση Q του $[a,b]$. Τότε,

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\phi(x) = \sup\left\{ L(f,\phi,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b], Q \subseteq P \right\}$$

και
$$\overline{\int_a^b} f(x)d\phi(x) = \inf\Big\{U(f,\phi,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b], Q \subseteq P\Big\}.$$

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάποια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ισχύει
$$U(f,\phi,P) - L(f,\phi,P) < \varepsilon,$$
δείξτε ότι για κάθε επιλογή σημείων $t_k, s_k \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε
$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(s_k) - f(t_k)|\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) < \varepsilon.$$
Αν επιπλέον $f \in \mathcal{R}(\phi)$, δείξτε ότι
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big) - \int_a^b f\, d\phi\right| \leq \varepsilon.$$

4. Αποδείξτε το Θεώρημα 1.2.7.

5. Αν $\int_a^b f\, d\phi = 0$ για κάθε συνεχή $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, δείξτε ότι η ϕ είναι σταθερή.

6. Κατασκευάστε μη σταθερή αύξουσα συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και συνεχή συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ όχι ταυτοτικά μηδενική, έτσι ώστε
$$\int_a^b |f|\, d\phi = 0.$$

7. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φραγμένη συνάρτηση f είναι ασυνεχής μόνο στο σημείο $s \in (a,b)$. Αν η f είναι συνεχής από δεξιά στο s και η ϕ είναι συνεχής από αριστερά στο s, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$.

8. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φραγμένη συνάρτηση f είναι ασυνεχής από δεξιά στο σημείο $s \in (a,b)$. Αν και η ϕ είναι ασυνεχής από δεξιά στο s, τότε $f \notin \mathcal{R}(\phi)$.

9. Θεωρούμε τρεις αύξουσες συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}$:
$$\phi_1 = \chi_{(0,1]} \quad , \quad \phi_2 = \chi_{[0,1]} \quad , \quad \phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}.$$
Έστω $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι:

1. $f \in \mathcal{R}(\phi_1)$ αν και μόνο αν $f(0+) = f(0)$.
2. $f \in \mathcal{R}(\phi_2)$ αν και μόνο αν $f(0-) = f(0)$.
3. $f \in \mathcal{R}(\phi_3)$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο 0.

4. Αν $f \in \mathcal{R}(\phi_3)$ τότε

$$\int_{-1}^{1} f\, d\phi_1 = \int_{-1}^{1} f\, d\phi_2 = \int_{-1}^{1} f\, d\phi_3 = f(0).$$

10. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση του «ακεραίου μέρους» $\phi(x) = [x]$. Υπολογίστε το $\int_1^n f(x) d\phi(x)$ για κάθε $n \geq 2$. Γενικότερα, για κάθε $t > 1$ υπολογίστε την τιμή του

$$\int_1^t f(x) d\phi(x).$$

11. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$ για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

12. Δείξτε το ακόλουθο «θεώρημα μέσης τιμής»: αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) = f(\xi)\big(\phi(b) - \phi(a)\big).$$

13. Έστω $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 d\phi(x) < \varepsilon^2.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε κατάλληλη διαμέριση P του $[a, b]$ και ορίστε

$$g(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1})$$

στο $[x_k, x_{k+1}]$.]

14. Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι $g(x) = G'(x)$ στο $[a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b \phi(x) g(x) dx = G(b)\phi(b) - G(a)\phi(a) - \int_a^b G(x) d\phi(x).$$

[*Υπόδειξη:* Αν P διαμέριση του $[a, b]$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_k, x_{k+1}]$ βρείτε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ τέτοιο ώστε $G(x_{k+1}) - G(x_k) = g(t_k)(x_{k+1} - x_k)$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_{k+1}) g(t_k)(x_{k+1} - x_k) = G(b)\phi(b) - G(a)\phi(a) - \sum_{k=0}^{n-1} G(x_k)\big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big).]$$

1.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

1.3.1 Ορισμός και παραδείγματα

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, ονομάζουμε **κύμανση της ϕ ως προς την P** τον αριθμό

$$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)|. \tag{3.1}$$

Μια πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι «η κύμανση της ϕ μεγαλώνει αν εκλεπτύνουμε τη διαμέριση».

Λήμμα 1.3.1 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και P, Q δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Αν $P \subseteq Q$, τότε*

$$V(\phi, P) \leq V(\phi, Q). \tag{3.2}$$

Απόδειξη: Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ και έστω $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δίνει

$$\begin{aligned}
V(\phi, P) &= \sum_{j=0}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| + |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| + |\phi(y) - \phi(x_k)| + |\phi(x_{k+1}) - \phi(y)| \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\
&= V(\phi, P_1).
\end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση η Q προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων $y_1, \ldots, y_m$, οπότε

$$V(\phi, P) \leq V(\phi, P \cup \{y_1\}) \leq \cdots \leq V(\phi, P \cup \{y_1, \ldots, y_m\}) = V(\phi, Q). \qquad \square$$

Ορισμός. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η **κύμανση** της ϕ στο $[a,b]$ είναι η ποσότητα

$$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\}. \tag{3.3}$$

Αν $V(\phi) < +\infty$ τότε λέμε ότι η ϕ έχει **φραγμένη κύμανση** (αν $V(\phi) = +\infty$, λέμε ότι η ϕ έχει άπειρη κύμανση). Όταν θέλουμε να τονίσουμε το διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η κύμανση της ϕ θα γράφουμε $V(\phi \mid a, b)$.

Μια τεχνική παρατήρηση η οποία συχνά απλουστεύει τον υπολογισμό της κύμανσης είναι η εξής.

Λήμμα 1.3.2 *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω Q διαμέριση του $[a, b]$. Τότε,*

$$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \ \ \textit{διαμέριση του} \ \ [a, b] \ , \ P \supseteq Q\}. \tag{3.4}$$

Απόδειξη: Άσκηση.

Μία από τις συνέπειες του Λήμματος 1.3.2 είναι η «προσθετικότητα της κύμανσης ως προς διαδοχικά υποδιαστήματα»:

Πρόταση 1.3.1 *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in (a, b)$. Τότε,*

$$V(\phi \mid a, b) = V(\phi \mid a, \gamma) + V(\phi \mid \gamma, b). \tag{3.5}$$

Ειδικότερα,

$$V(\phi \mid \gamma, \delta) \leq V(\phi \mid a, b) \tag{3.6}$$

για κάθε $[\gamma, \delta] \subset [a, b]$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη διαμέριση $Q = \{a < \gamma < b\}$ του $[a, b]$. Από το Λήμμα 1.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid a, b) &= \sup\{V(\phi, P) \mid P \ \ \text{διαμέριση του} \ \ [a, b] \ , \ P \supseteq Q\} \\ &= \sup\{V(\phi, P) \mid P \ \ \text{διαμέριση του} \ \ [a, b] \ , \ \gamma \in P\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ που περιέχει το γ είναι της μορφής $P = P_1 \cup P_2$ όπου P_1 διαμέριση του $[a, \gamma]$ και P_2 διαμέριση του $[\gamma, b]$. Επιπλέον, από τον ορισμό της κύμανσης ως προς διαμέριση, ισχύει

$$V(\phi, P \mid a, b) = V(\phi, P_1 \mid a, \gamma) + V(\phi, P_2 \mid \gamma, b). \tag{3.7}$$

Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι διαμερίσεων P_1, P_2 των $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$ αντίστοιχα, δίνει μια διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ του $[a, b]$ η οποία περιέχει το γ. Χρησιμοποιώντας και την (3.7) βλέπουμε ότι

$$\big\{V(\phi, P \mid a, b) \mid \gamma \in P\big\} = \big\{V(\phi, P_1 \mid a, \gamma) + V(\phi, P_2 \mid \gamma, b)\big\} \tag{3.8}$$

(το πρώτο σύνολο είναι πάνω από όλες τις διαμερίσεις P του $[a, b]$ που περιέχουν το γ ενώ το δεύτερο πάνω από όλα τα ζευγάρια διαμερίσεων των $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$). Παίρνοντας supremum και στα δύο μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid a, b) &= \sup_{\gamma \in P} V(\phi, P \mid a, b) = \sup_{P_1} V(\phi, P_1 \mid a, \gamma) + \sup_{P_2} V(\phi, P_2 \mid \gamma, b) \\ &= V(\phi \mid a, \gamma) + V(\phi \mid \gamma, b). \end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι αν γράψουμε το $[a,b]$ σαν ένωση $[a,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\ldots\cup[a_{s-1},a_s]$ οσωνδήποτε διαδοχικών διαστημάτων, τότε

$$V(\phi\mid a,b)=\sum_{i=0}^{s-1}V(\phi\mid a_i,a_{i+1}) \tag{3.9}$$

όπου $a_0=a$ και $a_s=b$. Από την (3.9) έπεται αμέσως η (3.6) (γιατί;). □

Τα παραδείγματα που ακολουθούν εξηγούν τον ορισμό της κύμανσης: είναι ένα μέτρο της ολικής μεταβολής των τιμών της ϕ στο $[a,b]$. Λίγη σκέψη δείχνει ότι οι συναρτήσεις που έχουν φραγμένη κύμανση είναι υποχρεωτικά φραγμένες:

Λήμμα 1.3.3 *Έστω $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$. Αν $V(\phi)<+\infty$ τότε η ϕ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω $x\in(a,b)$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_x=\{a<x<b\}$ του $[a,b]$. Τότε,

$$|\phi(x)-\phi(a)|\leq|\phi(x)-\phi(a)|+|\phi(b)-\phi(x)|=V(\phi,P_x)\leq V(\phi),$$

άρα

$$|\phi(x)|\leq V(\phi)+|\phi(a)|.$$

Έπεται ότι $|\phi(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$, όπου $M=\max\{V(\phi)+|\phi(a)|,|\phi(b)|\}$. □

Παραδείγματα: (α) Αν η $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε

$$V(\phi)=|\phi(b)-\phi(a)|.$$

Για παράδειγμα, αν η ϕ είναι αύξουσα τότε για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ έχουμε

$$V(\phi,P)=\sum_{k=0}^{n-1}|\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}\big(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\big)=\phi(b)-\phi(a).$$

Άρα,

$$V(\phi)=\sup_P V(\phi,P)=\phi(b)-\phi(a).$$

(β) Λέμε ότι η $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι **κατά τμήματα μονότονη** αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $a=a_0<a_1<\ldots<a_s=b$ στο $[a,b]$ ώστε η ϕ να είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[a_i,a_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,s-1$. Από την Πρόταση 1.3.1 και το Παράδειγμα (α),

$$V(\phi\mid a,b)=\sum_{i=0}^{s-1}V(\phi\mid a_i,a_{i+1})=\sum_{i=0}^{s-1}|\phi(a_{i+1})-\phi(a_i)|.$$

Ειδικότερα, η ϕ έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Έστω $\gamma \in (a,b)$ και έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\phi(\gamma) = 1$ και $\phi(x) = 0$ αλλιώς. Η ϕ είναι αύξουσα στο $[a,\gamma]$ και φθίνουσα στο $[\gamma, b]$. Άρα,

$$V(\phi) = |\phi(\gamma) - \phi(a)| + |\phi(b) - \phi(\gamma)| = 2$$

από το Παράδειγμα (β).

(δ) Υπάρχουν φραγμένες συναρτήσεις που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση g του Dirichlet που συναντήσαμε στην §1.1.2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ρητούς q_k και άρρητους α_k με $0 < q_1 < \alpha_1 < \ldots < q_n < \alpha_n < 1$. Αν P είναι η διαμέριση του $[0,1]$ που σχηματίζουν όλα αυτά τα σημεία,

$$V(g) \geq V(g,P) \geq \sum_{k=1}^{n} |g(\alpha_k) - g(q_k)| = n.$$

Αφού $V(g) \geq n$ για κάθε n, η g έχει άπειρη κύμανση.

(ε) Υπάρχουν συνεχείς $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Γράφουμε το $[0,1]$ στη μορφή

$$[0,1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}].$$

Σε κάθε διάστημα $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ ορίζουμε μια «τριγωνική συνάρτηση» ως εξής: θέτουμε $\phi(1/2^n) = 0 = \phi(1/2^{n-1})$, $\phi(3/2^{n+1}) = 1/n$ (ο $3/2^{n+1}$ είναι το μέσο του διαστήματος) και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[1/2^n, 3/2^{n+1}]$ και $[3/2^{n+1}, 1/2^{n-1}]$. Με αυτόν τον τρόπο η ϕ έχει οριστεί και είναι συνεχής στο $(0,1]$.

Θέτουμε $\phi(0) = 0$. Τότε, η ϕ είναι συνεχής και στο 0: παρατηρήστε ότι

$$0 \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow 0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^n} < \ldots < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\right\}.$$

Τότε,

$$V(\phi, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η ϕ έχει άπειρη κύμανση.

(ζ) Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά M. Δηλαδή,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq M \cdot |x - y|$$

για κάθε $x, y \in [a,b]$. Τότε, η ϕ έχει φραγμένη κύμανση: Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, τότε

$$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = M \cdot (b - a).$$

Έπεται ότι
$$V(\phi) \leq M \cdot (b-a) < +\infty.$$
Ειδικότερα, αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη και η ϕ' είναι φραγμένη στο $[a,b]$ τότε η ϕ έχει φραγμένη κύμανση. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής βλέπουμε ότι η ϕ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά
$$M = \sup\{|\phi'(x)| \mid a \leq x \leq b\}.$$

1.3.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Γράφουμε $BV[a,b]$ για το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι το σύνολο $BV[a,b]$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων: είναι γραμμικός χώρος και αν $\phi, \psi \in BV[a,b]$ τότε το γινόμενο $\phi \cdot \psi \in BV[a,b]$.

Πρόταση 1.3.2 *Έστω $\phi, \psi \in BV[a,b]$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε,*

1. *$\phi + \psi \in BV[a,b]$ και $V(\phi+\psi) \leq V(\phi) + V(\psi)$.*
2. *$t \cdot \phi \in BV[a,b]$ και $V(t\cdot\phi) = |t| \cdot V(\phi)$.*
3. *$\phi \cdot \psi \in BV[a,b]$ και $V(\phi\cdot\psi) \leq \|\phi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\phi)$, όπου $\|\phi\|_\infty = \sup\{|\phi(x)| : a \leq x \leq b\}$ και $\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : a \leq x \leq b\}$. Το Λήμμα 1.3.3 δείχνει ότι οι $\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty$ ορίζονται καλά.*

Απόδειξη: Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Από την
$$\begin{aligned} V(\phi+\psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) + \psi(x_{k+1}) - \phi(x_k) - \psi(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| \\ &= V(\phi, P) + V(\psi, P) \end{aligned}$$
έπεται ότι
$$V(\phi+\psi) \leq V(\phi) + V(\psi) < +\infty.$$
Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσετε ότι
$$\begin{aligned} V(t\cdot\phi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |t\cdot\phi(x_{k+1}) - t\cdot\phi(x_k)| \\ &= |t| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \\ &= |t| \cdot V(\phi, P). \end{aligned}$$

Τέλος, με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις και εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
V(\phi\cdot\psi,P) &= \sum_{k=0}^{n-1}|\phi(x_{k+1})\psi(x_{k+1})-\phi(x_k)\psi(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}|\phi(x_{k+1})|\cdot|\psi(x_{k+1})-\psi(x_k)|+\sum_{k=0}^{n-1}|\psi(x_k)|\cdot|\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)| \\
&\leq \|\phi\|_\infty V(\psi,P)+\|\psi\|_\infty V(\phi,P),
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$V(\phi\cdot\psi)\leq\|\phi\|_\infty V(\psi)+\|\psi\|_\infty V(\phi). \qquad \square$$

Στην περίπτωση που η $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, η κύμανση της ϕ δίνεται από το ολοκλήρωμα Riemann της $|\phi'|$:

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\phi\in BV[a,b]$ και*

$$V(\phi)=\int_a^b|\phi'(t)|\,dt. \tag{3.10}$$

Απόδειξη: Η ϕ' έχει υποτεθεί Riemann ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη συνάρτηση. Αυτό αποδεικνύει ότι $\phi\in BV[a,b]$ (η ϕ είναι Lipschitz συνεχής). Επιπλέον η $|\phi'|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος της (3.10) ορίζεται καλά.

Έστω $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$V(\phi)-\varepsilon<V(\phi,P_1)\leq V(\phi) \tag{3.11}$$

και

$$U(|\phi'|,P_2)-L(|\phi'|,P_2)<\varepsilon. \tag{3.12}$$

Αν $P=P_1\cup P_2=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$, τότε οι (3.11) και (3.12) ισχύουν με την P στη θέση των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε $[x_k,x_{k+1}]$ βρίσκουμε $t_k\in(x_k,x_{k+1})$ με

$$|\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)|=|\phi'(t_k)|\cdot(x_{k+1}-x_k).$$

Άρα,

$$V(\phi,P)=\sum_{k=0}^{n-1}|\phi'(t_k)|\cdot(x_{k+1}-x_k). \tag{3.13}$$

Από την (3.12) - βλέπε Άσκηση 3 της §1.2.4 - έχουμε

$$\left| \int_a^b |\phi'(t)|dt - \sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Συνδυάζοντας τις (3.13) και (3.14) παίρνουμε

$$\left| \int_a^b |\phi'(t)|dt - V(\phi, P) \right| < \varepsilon,$$

και από την (3.11) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b |\phi'(t)|dt - V(\phi) \right| < 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. □

1.3.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Από την Πρόταση 1.3.1 η ϕ έχει φραγμένη κύμανση σε κάθε διάστημα $[a, x]$ όπου $x \in [a, b]$ (στην περίπτωση που $x = a$, η κύμανση της ϕ στο $[a, x]$ ορίζεται να είναι ίση με μηδέν). Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση $v_\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$v_\phi(x) = V(\phi \mid a, x). \tag{3.15}$$

Η v_ϕ λέγεται **συνάρτηση ολικής κύμανσης** της ϕ. Από την Πρόταση 1.3.1, έχουμε

$$v_\phi(y) - v_\phi(x) = V(\phi \mid a, y) - V(\phi \mid a, x) = V(\phi \mid x, y) \geq 0$$

αν $x < y$ στο $[a, b]$. Άρα, η v_ϕ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Επίσης, θεωρώντας τη διαμέριση $P_{xy} = \{x < y\}$ του $[x, y]$ έχουμε

$$\phi(y) - \phi(x) \leq |\phi(y) - \phi(x)| \leq V(\phi \mid x, y) = v_\phi(y) - v_\phi(x),$$

δηλαδή

$$v_\phi(x) - \phi(x) \leq v_\phi(y) - \phi(y) \tag{3.16}$$

αν $x < y$ στο $[a, b]$. Άρα, η $v_\phi - \phi$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Από τις (3.15) και (3.16) προκύπτει εύκολα ο εξής χαρακτηρισμός των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση.

Θεώρημα 1.3.2 *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η ϕ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά $\phi = \phi_1 - \phi_2$ δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

Απόδειξη: Έστω $\phi \in BV[a,b]$. Είδαμε ότι οι συναρτήσεις v_ϕ και $v_\phi - \phi$ είναι αύξουσες. Γράφοντας

$$\phi = v_\phi - \big(v_\phi - \phi\big)$$

έχουμε περιγράψει την ϕ σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.

Αντίστροφα, αν $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο αύξουσες συναρτήσεις, τότε $\phi_1, \phi_2 \in BV[a,b]$ και, αφού ο $BV[a,b]$ είναι γραμμικός χωρος, έχουμε $\phi_1 - \phi_2 \in BV[a,b]$. $\square$

Παρατήρηση. Η ανάλυση $\phi = \phi_1 - \phi_2$ δεν είναι μοναδική. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση, τότε $\phi = (\phi_1 + f) - (\phi_2 + f)$ και οι $\phi_1 + f$, $\phi_2 + f$ είναι προφανώς αύξουσες.

Αν η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, τότε οι ϕ_1, ϕ_2 του Θεωρήματος 1.3.2 μπορούν να υποτεθούν συνεχείς. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 1.3.4 *Έστω $\phi \in BV[a,b]$ και έστω $\gamma \in [a,b]$. Η ϕ είναι συνεχής στο γ αν και μόνο αν η v_ϕ είναι συνεχής στο γ.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι τα πλευρικά όρια των ϕ και v_ϕ καθώς $y \to x^+$ ή $y \to x^-$ υπάρχουν: οι μονότονες συναρτήσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα, άρα και οι διαφορές μονότονων συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$ αν και μόνο αν η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο γ (δουλεύοντας όμοια με τα όρια από αριστερά, παίρνουμε το συμπέρασμα).

Η μία κατεύθυνση είναι απλή: είδαμε ότι αν $x < y$ στο $[a,b]$ τότε $|\phi(y) - \phi(x)| \leq v_\phi(y) - v_\phi(x)$. Παίρνοντας όρια καθώς $y \to x^+$ έχουμε

$$v_\phi(x+) - v_\phi(x) \geq |\phi(x+) - \phi(x)|. \tag{3.17}$$

Αν η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά, η (3.17) δείχνει ότι $\phi(x+) = \phi(x)$. Δηλαδή, η ϕ είναι συνεχής από δεξιά.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\phi(\gamma) - \phi(x)| < \varepsilon/2$ αν $\gamma \leq x < \gamma + \delta$. Θεωρούμε διαμέριση $P = \{\gamma = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[\gamma, b]$ με την ιδιότητα

$$V(\phi \mid \gamma, b) < V(\phi, P \mid \gamma, b) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.18}$$

Η (3.18) εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση της P πάρουμε οποιαδήποτε εκλέπτυνσή της. Αν λοιπόν $\gamma < t < \min\{\gamma + \delta, x_1\}$ και $P_t = \{t < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid \gamma, b) - \frac{\varepsilon}{2} &< V(\phi, P \cup \{t\} \mid \gamma, b) \\ &= |\phi(t) - \phi(\gamma)| + V(\phi, P_t \mid t, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + V(\phi \mid t, b). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} v_\phi(t) - v_\phi(\gamma) &= \big(V(\phi \mid a,b) - V(\phi \mid t,b)\big) - \big(V(\phi \mid a,b) - V(\phi \mid \gamma,b)\big) \\ &= V(\phi \mid \gamma,b) - V(\phi \mid t,b) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $0 \leq v_\phi(t) - v_\phi(\gamma) < \varepsilon$ αν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο γ. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 1.3.4 είναι το εξής.

Θεώρημα 1.3.3 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η ϕ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων.* □

1.3.4 Θετική και αρνητική κύμανση - Ανάλυση Jordan

Για κάθε πραγματικό αριθμό a ορίζουμε το θετικό και το αρνητικό μέρος του a, a^+ και a^- αντίστοιχα, ως εξής:

$$a^+ = \max\{a,0\} \quad \text{και} \quad a^- = -\min\{a,0\}. \tag{3.19}$$

Είναι φανερό ότι

$$a^+, a^- \geq 0 \quad , \quad |a| = a^+ + a^- \quad , \quad a = a^+ - a^-. \tag{3.20}$$

Έστω τώρα $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, ορίζουμε

$$V^+(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big)^+ \tag{3.21}$$

και

$$V^-(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\big)^-. \tag{3.22}$$

Ο $V^+(\phi,P)$ ονομάζεται **θετική κύμανση της ϕ ως προς την P** και ο $V^-(\phi,P)$ ονομάζεται **αρνητική κύμανση της ϕ ως προς την P**.

Ο $V^+(\phi,P)$ είναι το άθροισμα των θετικών διαφορών $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)$, ενώ ο $-V^-(\phi,P)$ είναι το άθροισμα των αρνητικών διαφορών $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύουν τα εξής:

1. $V^+(\phi,P) \geq 0$, $V^-(\phi,P) \geq 0$.
2. $V^+(\phi,P) + V^-(\phi,P) = V(\phi,P)$.
3. $V^+(\phi,P) - V^-(\phi,P) = \phi(b) - \phi(a)$.

Ορίζουμε τώρα τη **θετική** και την **αρνητική κύμανση** της ϕ στο $[a,b]$ θέτοντας

$$V^+(\phi \mid a,b) = \sup\{V^+(\phi,P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\} \tag{3.23}$$

και

$$V^-(\phi \mid a,b) = \sup\{V^-(\phi,P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\} \tag{3.24}$$

αντίστοιχα.

Πρόταση 1.3.3 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Τότε, $V^+(\phi \mid a,b) < +\infty$, $V^-(\phi \mid a,b) < +\infty$ και ισχύουν οι σχέσεις*

1. $V^+(\phi \mid a,b) + V^+(\phi \mid a,b) = V(\phi \mid a,b)$,
2. $V^+(\phi \mid a,b) - V^-(\phi \mid a,b) = \phi(b) - \phi(a)$.

Απόδειξη: Από τις $V^+(\phi,P) \leq V(\phi,P)$ και $V^-(\phi,P) \leq V(\phi,P)$ βλέπουμε αμέσως ότι αν $V(\phi) < +\infty$ τότε και

$$V^+(\phi \mid a,b) \leq V(\phi) < +\infty \quad , \quad V^-(\phi \mid a,b) \leq V(\phi) < +\infty.$$

Θα δείξουμε πρώτα τον δεύτερο ισχυρισμό της Πρότασης: Αφού

$$V^+(\phi,P) = V^-(\phi,P) + \phi(b) - \phi(a)$$

για κάθε διαμέριση P, παίρνουμε

$$\begin{aligned} V^+(\phi \mid a,b) &= \sup_P V^+(\phi,P) \\ &= \sup_P \big(V^-(\phi,P) + \phi(b) - \phi(a)\big) \\ &= V^-(\phi \mid a,b) + \phi(b) - \phi(a). \end{aligned}$$

Για τον πρώτο ισχυρισμό, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$V(\phi,P) = V^+(\phi,P) + V^-(\phi,P) \leq V^+(\phi \mid a,b) + V^-(\phi \mid a,b),$$

οπότε, παίρνοντας supremum ως προς P βλέπουμε ότι

$$V(\phi \mid a,b) \leq V^+(\phi \mid a,b) + V^-(\phi \mid a,b). \tag{3.25}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$V^+(\phi \mid a,b) - \frac{\varepsilon}{2} < V^+(\phi,P). \tag{3.26}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} V^+(\phi \mid a,b) - V^-(\phi \mid a,b) - \frac{\varepsilon}{2} &< V^+(\phi,P) - V^-(\phi,P) \\ &= \phi(b) - \phi(a) \\ &= V^+(\phi \mid a,b) - V^-(\phi \mid a,b), \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$V^-(\phi \mid a,b) - \frac{\varepsilon}{2} < V^-(\phi, P). \tag{3.27}$$

Έπεται ότι

$$V^+(\phi \mid a,b) + V^-(\phi \mid a,b) - \varepsilon < V^+(\phi, P) + V^-(\phi, P) = V(\phi, P) \leq V(\phi \mid a,b),$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$V^+(\phi \mid a,b) + V^-(\phi \mid a,b) \leq V(\phi \mid a,b). \tag{3.28}$$

Από τις (3.25) και (3.28) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Κατ' αναλογία προς τον ορισμό της συνάρτησης ολικής κύμανσης v_ϕ της ϕ, ορίζουμε τις **συναρτήσεις θετικής και αρνητικής κύμανσης της** ϕ,

$$v_\phi^+(x) = V^+(\phi \mid a,x) \quad \text{και} \quad v_\phi^-(x) = V^-(\phi \mid a,x) \tag{3.29}$$

στο $[a,b]$. Οι βασικές ιδιότητες των v_ϕ^+ και v_ϕ^- περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 1.3.4 *Έστω $\phi \in BV[a,b]$. Οι συναρτήσεις θετικής και αρνητικής κύμανσης της ϕ έχουν τις εξής ιδιότητες:*

1. *Οι v_ϕ^+ και v_ϕ^- είναι αύξουσες.*
2. *$v_\phi^+(x) + v_\phi^-(x) = v_\phi(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*
3. *$v_\phi^+(x) - v_\phi^-(x) = \phi(x) - \phi(a)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη: Ο δεύτερος και ο τρίτος ισχυρισμός προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 1.3.3 (με αντικατάσταση του $[a,b]$ από το $[a,x]$). Θα δείξουμε ότι η v_ϕ^+ είναι αύξουσα: έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Για κάθε διαμέριση P_x του $[a,x]$ έχουμε

$$V^+(\phi, P_x) \leq V^+(\phi, P_x) + \big(\phi(y) - \phi(x)\big)^+ \leq V^+(\phi \mid a,y).$$

Άρα,

$$v_\phi^+(x) = V^+(\phi \mid a,x) = \sup_{P_x} V^+(\phi, P_x) \leq V^+(\phi \mid a,y) = v_\phi^+(y).$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι η v_ϕ^- είναι αύξουσα. $\square$

Παρατηρήσεις: (α) Από τις σχέσεις $v_\phi^+(x) + v_\phi^-(x) = v_\phi(x)$ και $v_\phi^+(x) - v_\phi^-(x) = \phi(x) - \phi(a)$ βλέπουμε ότι

$$v_\phi^+(x) = \frac{1}{2}\big(v_\phi(x) + \phi(x) - \phi(a)\big) \tag{3.30}$$

και

$$v_\phi^-(x) = \frac{1}{2}\big(v_\phi(x) - \phi(x) + \phi(a)\big) \tag{3.31}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Οι (3.30) και (3.31) χρησιμοποιούνται μερικές φορές σαν ορισμός των v_ϕ^+ και v_ϕ^-.

(β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $\phi_1(x) = v_\phi^+(x) + \phi(a)$ και $\phi_2(x) = v_\phi^-(x)$, τότε οι ϕ_1, ϕ_2 είναι αύξουσες (Πρόταση 1.3.4) και

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) = \phi(a) + v_\phi^+(x) - v_\phi^-(x) = \phi(x) \tag{3.32}$$

για κάθε $x \in [a,b]$ (πάλι από την Πρόταση 1.3.4). Έχουμε έτσι άλλη μία απόδειξη του χαρακτηρισμού των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης ως διαφορών αυξουσών συναρτήσεων (Θεώρημα 1.3.2). Η συγκεκριμένη περιγραφή της ϕ μέσω της (3.32) λέγεται **ανάλυση Jordan** της ϕ. Από το Λήμμα 1.3.4 και τις (3.30), (3.31) βλέπουμε ότι οι ϕ_1, ϕ_2 στην (3.32) είναι συνεχείς αν και μόνο αν η ϕ είναι συνεχής.

Η ανάλυση Jordan μιας $\phi \in BV[a,b]$ είναι η πιο «οικονομική» ανάλυση της ϕ σε διαφορά αυξουσών συναρτήσεων, με την εξής έννοια.

Πρόταση 1.3.5 *Έστω $\phi \in BV[a,b]$ και $\phi_1(x) = v_\phi^+(x) + \phi(a)$, $\phi_2(x) = v_\phi^-(x)$. Αν $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\phi = \psi_1 - \psi_2$, τότε για κάθε $x < y$ στο $[a,b]$ ισχύουν οι*

$$\psi_1(y) - \psi_1(x) \geq \phi_1(y) - \phi_1(x)$$

και

$$\psi_2(y) - \psi_2(x) \geq \phi_2(y) - \phi_2(x).$$

Δηλαδή, οι ϕ_1, ϕ_2 αυξάνουν «λιγότερο» από τις ψ_1, ψ_2. □

Απόδειξη: Έστω $P_{xy} = \{x = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = y\}$ διαμέριση του $[x,y]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
V^+(\phi, P_{xy}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\phi(z_{k+1}) - \phi(z_k)\big)^+ \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\psi_1(z_{k+1}) - \psi_1(z_k) - (\psi_2(z_{k+1}) - \psi_2(z_k))\big)^+ \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \big(\psi_1(z_{k+1}) - \psi_1(z_k)\big) \\
&= \psi_1(y) - \psi_1(x)
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την $a, b \geq 0 \Rightarrow (a-b)^+ \leq a$). Άρα,

$$V^+(\phi \mid x, y) \leq \psi_1(y) - \psi_1(x).$$

Όμως, από την Πρόταση 1.3.3

$$\begin{aligned}
V^+(\phi \mid x, y) &= \frac{1}{2}\big(V(\phi \mid x, y) + \phi(y) - \phi(x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(V(\phi \mid a, y) + \phi(y) - \phi(a)\big) + \frac{1}{2}\big(V(\phi \mid a, x) + \phi(x) - \phi(a)\big) \\
&= v_\phi^+(y) - v_\phi^+(x) = \phi_1(y) - \phi_1(x),
\end{aligned}$$

επομένως έχουμε τον πρώτο ισχυρισμό. Η απόδειξη του δεύτερου αφήνεται σαν άσκηση. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια πιο λεπτομερή διατύπωση του Θεωρήματος 1.3.1.

Πρόταση 1.3.6 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε*

$$V^+(\phi \mid a,b) = \int_a^b (\phi'(t))^+ dt \quad \textit{και} \quad V^-(\phi \mid a,b) = \int_a^b (\phi'(t))^- dt. \tag{3.33}$$

Απόδειξη: Με δεδομένο το Θεώρημα 1.3.1 η απόδειξη είναι πολύ απλή. Παρατηρούμε ότι

$$2(\phi'(t))^+ = |\phi'(t)| + \phi'(t) \quad \text{και} \quad 2(\phi'(t))^- = |\phi'(t)| - \phi'(t).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και τις (3.30), (3.31) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b (\phi'(t))^+ dt &= \frac{1}{2}\int_a^b |\phi'(t)|dt + \frac{1}{2}\int_a^b \phi'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\big(V(\phi \mid a,b) + \phi(b) - \phi(a)\big) \\ &= V^+(\phi \mid a,b)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_a^b (\phi'(t))^- dt &= \frac{1}{2}\int_a^b |\phi'(t)|dt - \frac{1}{2}\int_a^b \phi'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\big(V(\phi \mid a,b) - \phi(b) + \phi(a)\big) \\ &= V^-(\phi \mid a,b). \quad \square\end{aligned}$$

1.3.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε το Λήμμα 1.3.2.

2. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\phi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\phi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι η ϕ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\phi \mid a,b) \leq M$.

(β) Η υπόθεση $V(\phi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x \geq \frac{1}{2n\pi} \\ 0 & , 0 \leq x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση ϕ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η ϕ όχι).

4. Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) \leq \lim\inf_{n\to\infty} V(\phi_n \mid a,b).$$

[*Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4:* Δείξτε ότι $V(\phi_n, P) \to V(\phi, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.]

5. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\phi \mid a+\varepsilon, b) \leq M$.

(α) Δείξτε ότι $V(\phi \mid a,b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την ϕ μας εξασφαλίζει ότι $V(\phi \mid a,b) \leq M$;

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geq 0$. Έστω (c_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω (x_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a,b]$. Αν

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a,b]$$

δείξτε ότι $\phi \in BV[a,b]$ και

$$V(\phi \mid a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

7. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\phi(x) = y$ στο $[a,b]$. Αν $m = \min\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$ και $M = \max\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) = \int_m^M N(y)dy.$$

8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\phi \in BV[a,b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

1.4 Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς συνάρτηση με φραγμένη κύμανση

1.4.1 Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Η ϕ γράφεται με διάφορους τρόπους στη μορφή $\phi = \psi_1 - \psi_2$, όπου $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσες συναρτήσεις.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν για κάποια ανάλυση $\phi = \psi_1 - \psi_2$ της ϕ σε διαφορά αυξουσών συναρτήσεων ισχύει $f \in \mathcal{R}(\psi_1)$ και $f \in \mathcal{R}(\psi_2)$, τότε λέμε ότι **η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την** ϕ και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \int_a^b f(x)d\psi_1(x) - \int_a^b f(x)d\psi_2(x). \tag{4.1}$$

Θα γράφουμε $f \in \mathcal{R}(\phi)$, όπως και στην περίπτωση που η ϕ είναι αύξουσα.

Παρατήρηση. Το ολοκλήρωμα της f ως προς την $\phi \in BV[a,b]$ είναι καλά ορισμένο με την εξής έννοια: αν $\phi = \psi_1 - \psi_2 = w_1 - w_2$ όπου ψ_1, ψ_2, w_1, w_2 αύξουσες, και αν η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς τις ψ_1, ψ_2, w_1, w_2, τότε

$$\int_a^b f(x)d\psi_1(x) - \int_a^b f(x)d\psi_2(x) = \int_a^b f(x)dw_1(x) - \int_a^b f(x)dw_2(x). \tag{4.2}$$

Για την απόδειξη της (4.2) χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.2.7(ζ). Αφού $f \in \mathcal{R}(\psi_1) \cap \mathcal{R}(w_2)$ έχουμε $f \in \mathcal{R}(\psi_1 + w_2)$ και

$$I := \int_a^b f d(\psi_1 + w_2) = \int_a^b f d\psi_1 + \int_a^b f dw_2. \tag{4.3}$$

Αφού $\psi_1 + w_2 = w_1 + \psi_2$, πρέπει να ισχύει και η

$$I = \int_a^b f d(w_1 + \psi_2) = \int_a^b f dw_1 + \int_a^b f d\psi_2. \tag{4.4}$$

Από τις (4.3) και (4.4) προκύπτει η (4.2).

Για να ελέγξουμε αν η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ δεν χρειάζεται να εξετάσουμε όλες τις δυνατές αναλύσεις της ϕ σε διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων. Αρκεί να ελέγξουμε αν $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$. Αυτό μας το εξασφαλίζει η επόμενη Πρόταση:

Πρόταση 1.4.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$.
2. $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+)$ *και* $f \in \mathcal{R}(v_\phi^-)$.
3. $f \in \mathcal{R}(\phi)$.

Απόδειξη: Θυμηθείτε ότι οι συναρτήσεις θετικής και αρνητικής κύμανσης v_ϕ^+ και v_ϕ^- που εμφανίζονται στην ανάλυση Jordan της ϕ ικανοποιούν τις

$$\begin{aligned} v_\phi^+(x) - v_\phi^-(x) &= \phi(x) - \phi(a) \\ v_\phi^+(x) + v_\phi^-(x) &= v_\phi(x), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} v_\phi^+(x) &= \frac{1}{2}\big(v_\phi(x) + (\phi(x) - \phi(a))\big) \\ v_\phi^-(x) &= \frac{1}{2}\big(v_\phi(x) - (\phi(x) - \phi(a))\big). \end{aligned}$$

Επιπλέον, οι v_ϕ^+ και v_ϕ^- έχουν την εξής ιδιότητα (βλέπε Πρόταση 1.3.5): Αν $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\phi = \psi_1 - \psi_2$, τότε για κάθε $x < y$ στο $[a,b]$ ισχύουν οι

$$\psi_1(y) - \psi_1(x) \geq v_\phi^+(y) - v_\phi^+(x) \tag{4.5}$$

και

$$\psi_2(y) - \psi_2(x) \geq v_\phi^-(y) - v_\phi^-(x). \tag{4.6}$$

Για την απόδειξη της Πρότασης θα βασιστούμε στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Αν $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $x < y$ στο $[a,b]$ ισχύει

$$\phi_1(y) - \phi_1(x) \leq \phi_2(y) - \phi_2(x),$$

τότε

$$f \in \mathcal{R}(\phi_2) \Longrightarrow f \in \mathcal{R}(\phi_1).$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση, για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,\phi_1,P) - L(f,\phi_1,P) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(\phi_1(x_k) - \phi_1(x_{k+1})) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(\phi_2(x_{k+1}) - \phi_2(x_k)) \\ &= U(f,\phi_2,P) - L(f,\phi_2,P). \end{aligned}$$

Αν $f \in \mathcal{R}(\phi_2)$, από το κριτήριο του Riemann, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε τέτοια ώστε

$$U(f,\phi_2,P_\varepsilon) - L(f,\phi_2,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Τότε,

$$U(f,\phi_1,P_\varepsilon) - L(f,\phi_1,P_\varepsilon) < \varepsilon$$

και (πάλι) το κριτήριο του Riemann μας εξασφαλίζει ότι $f \in \mathcal{R}(\phi_1)$. $\square$

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι (1) $\Rightarrow$ (2). Έστω ότι $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$. Αφού οι v_ϕ^+, v_ϕ^- είναι αύξουσες και

$$v_\phi(y) - v_\phi(x) = \big(v_\phi^+(y) - v_\phi^+(x)\big) + \big(v_\phi^-(y) - v_\phi^-(x)\big)$$

για κάθε $x < y$ στο $[a,b]$, έχουμε

$$v_\phi^+(y) - v_\phi^+(x) \leq v_\phi(y) - v_\phi(x)$$

και

$$v_\phi^-(y) - v_\phi^-(x) \leq v_\phi(y) - v_\phi(x).$$

Από τον ισχυρισμό, $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+)$ και $f \in \mathcal{R}(v_\phi^-)$.

Αντίστροφα, (2) $\Rightarrow$ (1): Αν $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+)$ και $f \in \mathcal{R}(v_\phi^-)$, τότε $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+ + v_\phi^-)$, δηλαδή $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Έχουμε $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+)$, άρα $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+ + \phi(a))$. Επίσης, $f \in \mathcal{R}(v_\phi^-)$ και

$$\phi(x) = \big(v_\phi^+(x) + \phi(a)\big) - v_\phi^-(x).$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ως προς ϕ, $f \in \mathcal{R}(\phi)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$. Τότε, υπάρχουν αύξουσες $\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\phi = \psi_1 - \psi_2$ και $f \in \mathcal{R}(\psi_1)$, $f \in \mathcal{R}(\psi_2)$.

Από τις (4.5), (4.6) και τον ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+)$ και $f \in \mathcal{R}(v_\phi^-)$ αντίστοιχα. $\square$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 & , x \neq 0 \end{cases}$$

και τις $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$v_\phi(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2 & , 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Ανεξάρτητα από το ποιά είναι η v_ϕ, έχουμε $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$ αφού η f είναι συνεχής. Άρα, $f \in \mathcal{R}(\phi)$.

Εξετάζουμε τώρα αν $g \in \mathcal{R}(v_\phi)$. Για κάθε διαμέριση P του $[-1,1]$ που περιέχει το 0, έχουμε

$$L(f, v_\phi, P) = 0 \quad \text{και} \quad U(f, v_\phi, P) = 1.$$

Άρα η g δεν είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την v_ϕ, οπότε $g \notin \mathcal{R}(\phi)$. $\square$

1.4.2 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Όλες σχεδόν οι ιδιότητες που αποδείξαμε για το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς αύξουσα συνάρτηση, ισχύουν και για το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes ως προς συνάρτηση φραγμένης κύμανσης:

Θεώρημα 1.4.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$.*

Απόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε ότι $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$, το οποίο ισχύει αφού η f είναι συνεχής (Θεώρημα 1.2.2). $\square$

Θεώρημα 1.4.2 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη και η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$.*

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.3.4 η v_ϕ είναι συνεχής. Αρκεί να ελέγξουμε ότι $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$, το οποίο ισχύει αφού η f είναι μονότονη (Θεώρημα 1.2.3). $\square$

Πόρισμα 1.4.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση και η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.2 και του χαρακτηρισμού των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση ως διαφορών αυξουσών συναρτήσεων. $\square$

Θεώρημα 1.4.3 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας και η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση και είναι συνεχής στα σημεία ασυνέχειας της f, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$.*

Απόδειξη: Πάλι από το Λήμμα 1.3.4 η v_ϕ είναι συνεχής στα σημεία ασυνέχειας της f. Από το Θεώρημα 1.2.4 έχουμε $f \in \mathcal{R}(v_\phi)$, άρα $f \in \mathcal{R}(\phi)$. $\square$

Οι επόμενες δύο Προτάσεις, που αφορούν τη γραμμικότητα και την προσθετικότητα ως προς υποδιαστήματα, προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ως προς συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, και από τις αντίστοιχες ιδιότητες του ολοκληρώματος ως προς αύξουσα συνάρτηση.

Πρόταση 1.4.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, και έστω $\gamma \in (a,b)$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς ϕ στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη ως προς ϕ στα $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)\, d\phi(x) = \int_a^\gamma f(x)\, d\phi(x) + \int_\gamma^b f(x)\, d\phi(x). \qquad \square$$

Πρόταση 1.4.3 *Έστω* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένες,* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, και έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) *Αν* $f \in \mathcal{R}(\phi)$ *και* $g \in \mathcal{R}(\phi)$, *τότε* $f + g \in \mathcal{R}(\phi)$ *και*

$$\int_a^b (f+g)(x)\, d\phi(x) = \int_a^b f(x)\, d\phi(x) + \int_a^b g(x)\, d\phi(x).$$

(ii) *Αν* $f \in \mathcal{R}(\phi)$, *τότε* $\lambda f \in \mathcal{R}(\phi)$ *και*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\, d\phi(x) = \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi(x). \qquad \square$$

Πρόταση 1.4.4 *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη συνάρτηση,* $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συναρτήσεις με φραγμένη κύμανση, και* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) *Αν* $f \in \mathcal{R}(\phi)$ *και* $f \in \mathcal{R}(\psi)$, *τότε* $f \in \mathcal{R}(\phi + \psi)$ *και*

$$\int_a^b f(x)\, d(\phi+\psi)(x) = \int_a^b f(x)\, d\phi(x) + \int_a^b f(x)\, d\psi(x).$$

(ii) *Αν* $f \in \mathcal{R}(\phi)$, *τότε* $f \in \mathcal{R}(\lambda\phi)$ *και*

$$\int_a^b f(x)\, d(\lambda f)(x) = \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi(x).$$

Απόδειξη: (i) Αφού $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $f \in \mathcal{R}(\psi)$, υπάρχουν ϕ_1, ϕ_2 και ψ_1, ψ_2 αύξουσες συναρτήσεις με $\phi = \phi_1 - \phi_2$, $\psi = \psi_1 - \psi_2$ και

$$f \in \mathcal{R}(\phi_1) \cap \mathcal{R}(\phi_2) \cap \mathcal{R}(\psi_1) \cap \mathcal{R}(\psi_2),$$

οπότε από τον ορισμό ισχύουν οι

$$\int_a^b f(x)\, d\phi(x) = \int_a^b f(x)\, d\phi_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\phi_2(x)$$

και

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\psi_2(x).$$

Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος ως προς αύξουσα συνάρτηση, έχουμε $f \in \mathcal{R}(\phi_1 + \psi_1)$, $f \in \mathcal{R}(\phi_2 + \psi_2)$, και ισχύουν οι

$$\int_a^b f(x)\, d(\phi_1+\psi_1)(x) = \int_a^b f(x)\, d\phi_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\psi_1(x)$$

και

$$\int_a^b f(x)\, d(\phi_2+\psi_2)(x) = \int_a^b f(x)\, d\phi_2(x) + \int_a^b f(x)\, d\psi_2(x).$$

Αφού $\phi + \psi = (\phi_1 + \psi_1) - (\phi_2 + \psi_2)$ και οι $\phi_1 + \psi_1$, $\phi_2 + \psi_2$ είναι αύξουσες, πάλι από τον ορισμό παίρνουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi + \psi)$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d(\phi+\psi)(x) &= \int_a^b f(x)\, d(\phi_1+\psi_1)(x) - \int_a^b f(x)\, d(\phi_2+\psi_2)(x)\\ &= \int_a^b f(x)\, d\phi_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\phi_2(x)\\ &\quad + \int_a^b f(x)\, d\psi_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\psi_2(x)\\ &= \int_a^b f(x)\, d\phi(x) + \int_a^b f(x)\, d\psi(x).\end{aligned}$$

(ii) Έστω ϕ_1, ϕ_2 αύξουσες με $\phi = \phi_1 - \phi_2$ και τέτοιες ώστε $f \in \mathcal{R}(\phi_1)$, $f \in \mathcal{R}(\phi_2)$. Αν $\lambda \geq 0$, τότε οι $\lambda\phi_1$, $\lambda\phi_2$ είναι αύξουσες, $\lambda\phi = \lambda\phi_1 - \lambda\phi_2$, και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος ως προς αύξουσα συνάρτηση έχουμε $f \in \mathcal{R}(\lambda\phi_1)$, $f \in \mathcal{R}(\lambda\phi_2)$, και

$$\int_a^b f\, d(\lambda\phi_1) = \lambda \int_a^b f\, d\phi_1 \quad , \quad \int_a^b f\, d(\lambda\phi_2) = \lambda \int_a^b f\, d\phi_2.$$

Άρα, $f \in \mathcal{R}(\lambda\phi)$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d(\lambda\phi)(x) &= \int_a^b f(x)\, d(\lambda\phi_1)(x) - \int_a^b f(x)\, d(\lambda\phi_2)(x)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi_1(x) - \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi_2(x)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi(x).\end{aligned}$$

Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda\phi = ((-\lambda)\phi_2) - ((-\lambda)\phi_1)$ και οι συναρτήσεις $(-\lambda)\phi_2$, $(-\lambda)\phi_1$ είναι αύξουσες. Επίσης, $f \in \mathcal{R}((-\lambda)\phi_1)$, $f \in \mathcal{R}((-\lambda)\phi_2)$, και

$$\int_a^b f\, d((-\lambda)\phi_1) = (-\lambda) \int_a^b f\, d\phi_1 \quad , \quad \int_a^b f\, d((-\lambda)\phi_2) = (-\lambda) \int_a^b f\, d\phi_2.$$

Άρα, $f \in \mathcal{R}(\lambda\phi)$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d(\lambda\phi)(x) &= \int_a^b f(x)\, d((-\lambda)\phi_2)(x) - \int_a^b f(x)\, d((-\lambda)\phi_1)(x)\\ &= (-\lambda) \int_a^b f(x)\, d\phi_2(x) - (-\lambda) \int_a^b f(x)\, d\phi_1(x)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\, d\phi(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.4.4 *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση και $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n \in \mathcal{R}(\phi)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Τότε, $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b f_n d\phi \to \int_a^b f\, d\phi.$$

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού και του Θεωρήματος 1.2.6. □.

Μία ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ως προς αύξουσα συνάρτηση που δεν ισχύει όταν ολοκληρώνουμε ως προς συνάρτηση φραγμένης κύμανσης είναι η θετικότητα:

$$f \in \mathcal{R}(\phi) \text{ και } 0 \leq f \Longrightarrow 0 \leq \int_a^b f\, d\phi.$$

Κατά συνέπεια, αν $|f| \leq M$ στο $[a,b]$ και $f \in \mathcal{R}(\phi)$, δεν ισχύει (εν γένει) ότι

$$\left| \int_a^b f\, d\phi \right| \leq \int_a^b M\, d\phi = M(\phi(b) - \phi(a)).$$

(δεν είναι δύσκολο να δώσετε παραδείγματα: το δεξιό μέλος μπορεί να γίνει αρνητικό αφού η ϕ δεν είναι πλέον αύξουσα). Ισχύει όμως η εξής **βασική ανισότητα**:

Θεώρημα 1.4.5 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, με $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$, τότε*

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\phi(x) \right| \leq M \cdot V(\phi \mid a,b).$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\, d\phi(x) \right| &= \left| \int_a^b f(x)\, dv_\phi^+(x) - \int_a^b f(x)\, dv_\phi^-(x) \right| \\
&\leq \left| \int_a^b f(x)\, dv_\phi^+(x) \right| + \left| \int_a^b f(x)\, dv_\phi^-(x) \right| \\
&\leq M \cdot \left(V^+(\phi \mid a,b) + V^-(\phi \mid a,b) \right) \\
&= M \cdot V(\phi \mid a,b).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $f \in \mathcal{R}(\psi)$ και η ψ είναι αύξουσα, τότε

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\psi(x) \right| \leq M \cdot (\psi(b) - \psi(a)),$$

και το ότι $f \in \mathcal{R}(v_\phi^+) \cap \mathcal{R}(v_\phi^-)$ από την Πρόταση 1.4.1. □

1.4.3 Υπολογισμός του ολοκληρώματος σε ειδικές περιπτώσεις

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ως προς συνάρτηση φραγμένης κύμανσης δεν μας δίνει έναν χειροπιαστό τρόπο για να υπολογίζουμε τέτοια ολοκληρώματα. Το Λήμμα που ακολουθεί δείχνει ότι μπορούμε να προσεγγίζουμε το $\int_a^b f d\phi$ από αθροίσματα, όπως στην περίπτωση που η ϕ είναι αύξουσα.

Λήμμα 1.4.1 *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένης κύμανσης. Αν $f \in \mathcal{R}(\phi)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε εκλέπτυνση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ της P και για κάθε επιλογή σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) - \int_a^b f(x)\, d\phi(x) \right| < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η ϕ είναι αύξουσα. Από το κριτήριο του Riemann, υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b f d\phi - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\phi,P_1) \le U(f,\phi,P_1) < \int_a^b f d\phi + \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε εκλέπτυνση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ της P. Αν $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$, τότε

$$L(f,\phi,P_1) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) \le U(f,\phi,P_1),$$

άρα

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) - \int_a^b f(x)\, d\phi(x) \right| < \varepsilon.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ϕ έχει φραγμένη κύμανση. Για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ και κάθε επιλογή σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$, συμβολίζουμε

$$S(f,\phi,P,(s_k)) := \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)).$$

Αφού $f \in \mathcal{R}(\phi)$, υπάρχουν ψ_1, ψ_2 αύξουσες τέτοιες ώστε $\phi = \psi_1 - \psi_2$, $f \in \mathcal{R}(\psi_1) \cap \mathcal{R}(\psi_2)$ και

$$\int_a^b f d\phi = \int_a^b f d\psi_1 - \int_a^b f d\psi_2. \tag{4.7}$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, υπάρχουν διαμερίσεις P', P'' του $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$\left|S(f,\psi_1,P_1,(s_k)) - \int_a^b f(x)\,d\psi_1(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.8}$$

για κάθε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \supseteq P'$ και για κάθε επιλογή σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$, και

$$\left|S(f,\psi_2,P_1,(s_k)) - \int_a^b f(x)\,d\psi_2(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.9}$$

για κάθε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \supseteq P''$ και για κάθε επιλογή σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Θέτουμε $P = P' \cup P''$. Τότε, για κάθε διαμέριση $P_1 \supseteq P$ και για κάθε επιλογή σημείων (s_k) για την P_1 ισχύουν οι (4.8), (4.9). Παρατηρώντας ότι

$$S(f,\phi,P_1,(s_k)) = S(f,\psi_1,P_1,(s_k)) - S(f,\psi_2,P_1,(s_k)),$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.7), (4.8) και (4.9) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το πρώτο μας αποτέλεσμα δίνει τον τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ως προς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής:

Θεώρημα 1.4.6 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε η ϕ' να είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b f(x)\,d\phi(x) = \int_a^b f(x)\phi'(x)dx.$$

Σημείωση: Όπως θα φανεί και από την απόδειξη, η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής δεν είναι απαραίτητη. Μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με οποιαδήποτε συνθήκη που θα εξασφαλίζει ότι τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν.

Απόδειξη: Από την υπόθεση είναι φανερό ότι τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν (θυμηθείτε ότι αν οι g, h είναι Riemann ολοκληρώσιμες τότε και η $g \cdot h$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη). Μένει να δείξουμε ότι είναι ίσα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα 1.4.1 μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε επιλογή σημείων $s_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) - \int_a^b f(x)d\phi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.10}$$

και

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\phi'(s_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

(Αρκεί να επιλέξουμε διαμέριση P_1 του $[a,b]$ που να ικανοποιεί το Λήμμα 1.4.1 για το $\int_a^b f(x)d\phi(x)$, διαμέριση P_2 που να ικανοποιεί το Λήμμα 1.4.1 για το $\int_a^b f(x)\phi'(x)dx$ και να περάσουμε σε κοινή τους εκλέπτυνση).

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ τέτοιο ώστε

$$\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) = \phi'(t_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.10) και (4.11) για την επιλογή σημείων $s_k \equiv t_k$ παίρνουμε

$$\left| \int_a^b f(x)d\phi(x) - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο. □

Το επόμενο αποτέλεσμα περιγράφει τον τρόπο υπολογισμού ολοκληρώματος ως προς «κλιμακωτή συνάρτηση»:

Θεώρημα 1.4.7 *Έστω ότι η συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κλιμακωτή. Δηλαδή, υπάρχουν $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ στο (a,b) ώστε η ϕ να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα (a,c_1), (c_m,b) και (c_i,c_{i+1}), $i = 1,\ldots,m-1$. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στα σημεία $a, c_1, \ldots, c_m, b$, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και*

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = f(a)\big(\phi(a^+) - \phi(a)\big) + \sum_{i=1}^m f(c_i)\big(\phi(c_i^+) - \phi(c_i)\big) + f(b)\big(\phi(b) - \phi(b^-)\big).$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $d_0, d_1, \ldots, d_m$ είναι εσωτερικά σημεία των διαστημάτων (a,c_1), $(c_1,c_2), \ldots, (c_m,b)$ αντίστοιχα, και αν ξέρουμε ότι η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[a,d_0]$, $[d_0,d_1], \ldots, [d_m,b]$, τότε $f \in \mathcal{R}(\phi)$ στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\int_a^b f d\phi = \int_a^{d_0} f d\phi + \sum_{i=1}^m \int_{d_{i-1}}^{d_i} f d\phi + \int_{d_m}^b f d\phi.$$

Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που η ϕ έχει ένα πήδημα στο $[a,b]$, και θα υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει σε κάποιο σημείο $c \in (a,b)$ (η απόδειξη για την περίπτωση που το πήδημα είναι σε κάποιο από τα δύο άκρα είναι παρόμοια).

Επιπλέον είναι φανερό ότι μία τέτοια συνάρτηση ϕ (κλιμακωτή με πήδημα μόνο στο c) γράφεται σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2, καθεμία από τις οποίες ή είναι η μηδενική συνάρτηση ή είναι κλιμακωτή με πήδημα μόνο στο c (Άσκηση). Τότε, από τον ορισμό ισχύει

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \int_a^b f(x)d\phi_1(x) - \int_a^b f(x)d\phi_2(x).$$

Επίσης,

$$\phi(c^+) - \phi(c^-) = \big(\phi_1(c^+) - \phi_1(c^-)\big) + \big(\phi_2(c^+) - \phi_2(c^-)\big).$$

Αυτό δείχνει ότι αρκεί να κάνουμε την απόδειξη για ϕ αύξουσα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η ϕ είναι κλιμακωτή, αύξουσα, με ένα μόνο πήδημα στο σημείο $c \in (a,b)$ και ότι η f είναι συνεχής στο c. Θέτουμε $A := \phi(c^+) - \phi(c^-) > 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο c, υπάρχει δ, με $0 < \delta < \min\{c - a, b - c\}$, τέτοιο ώστε

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Θέτουμε $d_1 = c - \delta$, $d_2 = c + \delta$ και θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{a, d_1, d_2, b\}$. Τότε,

$$U(f,\phi,P) = M(\phi(d_2) - \phi(d_1)) = M(\phi(c^+) - \phi(c^-)) = M \cdot A$$

και

$$L(f,\phi,P) = m(\phi(d_2) - \phi(d_1)) = m(\phi(c^+) - \phi(c^-)) = m \cdot A,$$

όπου $M = \sup\{f(x) : d_1 \leq x \leq d_2\}$ και $m = \inf\{f(x) : d_1 \leq x \leq d_2\}$. Από την επιλογή των d_1, d_2 έπεται ότι

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2A} \leq m \leq f(c) \leq M \leq f(c) + \frac{\varepsilon}{2A},$$

άρα

$$f(c) \cdot A - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,\phi,P) \leq U(f,\phi,P) \leq f(c) \cdot A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ και

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = f(c) \cdot A = f(c)\big(\phi(c^+) - \phi(c^-)\big). \qquad \square$$

Παράδειγμα: Ορίζουμε $f, \phi, \psi : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0, \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 & , -\pi/2 \leq x \leq 0 \\ 2 & , 0 < x \leq \pi/2, \end{cases}$$

και

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & , -\pi/2 \leq x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2 & , 0 < x \leq \pi/2. \end{cases}$$

(α) Για ποιές τιμές του α είναι η f Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς ϕ στο $[-\pi/2, \pi/2]$; Γι' αυτά τα α να υπολογιστεί το $\int_a^b f d\phi$.

(β) Ίδιο ερώτημα για το $\int_a^b f d\psi$.

Απάντηση: Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αν $\alpha \neq 1$, τότε η f και η ϕ έχουν κοινή δεξιά ασυνέχεια στο 0, οπότε, σύμφωνα με την Άσκηση §1.2 (8), $f \notin \mathcal{R}(\phi)$. Για τον ίδιο λόγο, αν $\alpha \neq 1$ τότε $f \notin \mathcal{R}(\psi)$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $\alpha = 1$. Τότε, η f είναι συνεχής και από το Θεώρημα 1.4.1 ξέρουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $f \in \mathcal{R}(\psi)$.

(i) Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-\pi/2, 0]$ (στο σημείο 0 μας ενδιαφέρει μόνο η αριστερή πλευρική παράγωγος) και η $\phi'(x) = 2x$ είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα. Επίσης η f είναι συνεχής. Από το Θεώρημα 1.4.6 παίρνουμε ότι η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ στο $[-\pi/2, 0]$ και ισχύει

$$\int_{-\pi/2}^{0} f(x) d\phi(x) = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)\phi'(x) dx = \int_{-\pi/2}^{0} 2x \cos x dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βρίσκουμε

$$\int_{-\pi/2}^{0} f(x) d\phi(x) = 2 - \pi. \tag{4.12}$$

Στο διάστημα $[0, \pi/2]$ η ϕ είναι κλιμακωτή με πήδημα στο 0. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, από το Θεώρημα 1.4.7 παίρνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ στο $[0, \pi/2]$, και

$$\int_{0}^{\pi/2} f(x) d\phi(x) = f(0)\big(\phi(0^+) - \phi(0)\big) = 2. \tag{4.13}$$

Από τις (4.12) και (4.13) συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$ στο $[-\pi/2, \pi/2]$ και

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\phi(x) = 4 - \pi.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι για την ψ στο $[-\pi/2, 0]$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.4.6, αφού η ψ δεν είναι παραγωγίσιμη (ούτε καν συνεχής) από αριστερά στο 0. Από την άλλη πλευρά, $\psi = \phi + \phi_1$, όπου ϕ είναι η συνάρτηση του (i) και

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \\ 1 & , x = 0, \end{cases}$$

Έχουμε $f \in \mathcal{R}(\phi)$ και $f \in \mathcal{R}(\phi_1)$ (αφού η f είναι συνεχής). Επομένως, $f \in \mathcal{R}(\phi + \phi_1) = \mathcal{R}(\psi)$, και ισχύει

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\psi(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\phi(x) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\phi_1(x).$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε το $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\phi_1(x)$: Αυτό μας το δίνει το Θεώρημα 1.4.7:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\phi_1(x) = f(0)\big(\phi_1(0^+) - \phi_1(0^-)\big) = 0.$$

Άρα,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)d\psi(x) = 4-\pi.$$

1.4.4 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Αν οι συναρτήσεις $f,\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx + \int_a^b \phi(x)f'(x)dx = f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.6, αυτό μεταφράζεται ως εξής: Αν οι f',ϕ' είναι συνεχείς, τότε

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) + \int_a^b \phi(x)df(x) = f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a).$$

Θα δείξουμε ότι η τελευταία σχέση ισχύει κάτω από πολύ γενικότερες υποθέσεις για τις f και ϕ.

Θεώρημα 1.4.8 *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f,\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχουν φραγμένη κύμανση, και ότι τουλάχιστον μία από τις δύο είναι συνεχής. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) + \int_a^b \phi(x)df(x) = f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a). \tag{4.14}$$

Απόδειξη: Οι υποθέσεις του Θεωρήματος εξασφαλίζουν ότι τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν. Για να δείξουμε την (4.14) θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.4.1.

Για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} S(f,\phi,P) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)) \\ S(\phi,f,P) &= \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k)). \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} S(f,\phi,P)+S(\phi,f,P) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\phi(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\phi(x_k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\phi(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\phi(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\phi(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\phi(x_k) \\ &= f(x_n)\phi(x_n)-f(x_0)\phi(x_0) \\ &= f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με το Λήμμα 1.4.1, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P = P(\varepsilon)$ για την οποία ισχύουν συγχρόνως οι

$$\left| S(f,\phi,P) - \int_a^b f(x)d\phi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.15}$$

και

$$\left| S(\phi,f,P) - \int_a^b \phi(x)df(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

Άρα,

$$\left| \left(\int_a^b f d\phi + \int_a^b \phi df \right) - \big(S(f,\phi,P) + S(\phi,f,P) \big) \right| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\left| \int_a^b f d\phi + \int_a^b \phi df - \big(f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a) \big) \right| < \varepsilon.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

1.4.5 Ασκήσεις

1. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ κλιμακωτή συνάρτηση που έχει μόνο ένα πήδημα στο $c \in [a,b]$. Δείξτε ότι η ϕ γράφεται σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2, καθεμία από τις οποίες ή είναι η μηδενική συνάρτηση ή είναι κλιμακωτή με πήδημα μόνο στο c.

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes:

(α) $\int_0^\pi x \, d\phi(x)$ όπου $\phi(x) = \sin x$,

(β) $\int_0^3 x^2 \, d\psi(x)$ όπου $\psi(x) = x^2$ στο $[0,2)$ και $\psi(x) = x^2 + 2$ στο $[2,3]$.

3. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = [n]f(n) - \int_1^n f'(x)[x] \, dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω $f : [1,2n] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = \int_1^{2n} f'(x)\big([x] - 2[x/2]\big)dx.$$

5. Έστω $\phi_n \in BV[a,b]$ και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $V(\phi_n - \phi \mid a, b) \to 0$. Δείξτε ότι $\phi \in BV[a,b]$ και

$$\int_a^b f \, d\phi_n \to \int_a^b f \, d\phi$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\phi)$. Ορίζουμε $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, d\phi(t).$$

(α) Δείξτε ότι η F έχει φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int_a^b g(x) f(x) \, d\phi(x) = \int_a^b g(x) \, dF(x)$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

7. Έστω $f \in BV[0,2\pi]$ με $f(0) = f(2\pi)$. Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \text{ και } \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

υπάρχουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και καθένα από αυτά φράσσεται απολύτως από

$$\frac{1}{n} V(f \mid 0, 2\pi).$$

8. Έστω g μία γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση από το $[c,d]$ επί του $[a,b]$. Αν $\phi \in BV[a,b]$ και $f \in \mathcal{R}(\phi)$, δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi = \phi \circ g \in BV[c,d]$ και ότι η συνάρτηση $f \circ g \in \mathcal{R}(\psi)$. Επιπλέον,

$$\int_c^d (f \circ g) d\psi = \int_a^b f d\phi.$$

Κεφάλαιο 2

Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Εισαγωγή

(α) Το βασικό μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι δεν συμπεριφέρεται αρκετά καλά σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, δεν μπορούμε πάντα να συμπεράνουμε ότι

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

(κάτι που ισχύει αν υποθέσουμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f *ομοιόμορφα*).

Για την ακρίβεια, με την υπόθεση της κατά σημείο σύγκλισης δεν μπορούμε κάν να συμπεράνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη: αυτό δεν ισχύει γενικά, ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι $f_n \nearrow f$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση του Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Έχουμε δει ότι η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν όμως θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, και αν ορίσουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & , x \notin \{q_1, \dots, q_n\}, \end{cases}$$

τότε $f_n \nearrow f$ στο $[0,1]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

(β) Η κλάση των συναρτήσεων που είναι Riemann ολοκληρώσιμες είναι σχετικά περιορισμένη: Μπορούμε να ολοκληρώνουμε μόνο φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Επιπλέον, συναρτήσεις που διαφέρουν από σταθερή συνάρτηση σε ένα μικρό (αριθμήσιμο) σύνολο μπορεί να μην είναι Riemann ολοκληρώσιμες (παράδειγμα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$).

Όπως θα δούμε στο τέλος αυτού του Κεφαλαίου, μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι συνεχής «σχεδόν παντού». Η έννοια αυτή θα οριστεί αυστηρά αργότερα, μπορούμε όμως να δώσουμε κάποια διαισθητική ερμηνεία χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, για λεπτές διαμερίσεις $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ η ποσότητα

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$$

πρέπει να είναι μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν μπορεί να έχει μεγάλη «ταλάντωση» σε «πολλά σημεία».

(γ) Η ιδέα του Lebesgue ήταν να προσεγγίσει το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας θετικής συνάρτησης ξεκινώντας με διαμερίσεις του πεδίου τιμών και όχι του πεδίου ορισμού της: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε, για απλότητα, ότι η f είναι φραγμένη και ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$, και θέτουμε $m = \inf f$, $M = \sup f$. Αν

$$\{m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M\}$$

είναι μια διαμέριση του πεδίου τιμών $[m, M]$, το ολοκλήρωμα της f προσεγγίζεται από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \ell(B_k)$$

όπου $\ell(B_k)$ το «μήκος» του συνόλου

$$B_k = \{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}.$$

Για να προχωρήσουμε με αυτόν τον τρόπο, πρέπει βέβαια να ορίσουμε αυστηρά με ποιόν τρόπο «μετράμε» το «μήκος» ενός συνόλου που δεν είναι διάστημα (τα σύνολα B_k μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα υποσύνολα της πραγματικής ευθείας).

Ο Lebesgue ανέπτυξε μια θεωρία «μέτρου» και ολοκλήρωσης στη διδακτορική του διατριβή, η οποία δημοσιεύτηκε το 1902. Το ολοκλήρωμα Lebesgue επιτυγχάνει τα εξής:

1. Επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann σε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων.
2. Συμπεριφέρεται καλύτερα σε σχέση με τα όρια ακολουθιών συναρτήσεων.
3. Επιτρέπει να ολοκληρώνουμε πάνω από «περισσότερα» σύνολα, όχι μόνο πάνω από διαστήματα.

2.2 Μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\mu(A)$ (ή το $+\infty$). Είναι λογικό να ζητήσουμε να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\mu([a,b]) = b - a$.
2. $\mu(A + x) = \mu(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Αν (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(αριθμήσιμη προσθετικότητα).

Όπως θα δούμε, η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το Αξίωμα της Επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, θα περιοριστούμε σε μία κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος μ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (1), (2) και (3). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

2.2.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\mu^*(A) \geq 0$ ή $+\infty$, το **εξωτερικό μέτρο** του A.

Έστω $I = (a, b)$ ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα. Το μήκος του I συμβολίζεται με

$$\ell(I) := b - a.$$

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και (I_n) μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων με την ιδιότητα $A \subseteq \bigcup_n I_n$, λέμε ότι η (I_n) είναι μια **κάλυψη** του A. Αν η (I_n) είναι κάλυψη του A, το άθροισμα $\sum_n \ell(I_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μέτρο» του A. Είναι δηλαδή λογικό να ζητήσουμε

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \ell(I_n)$$

για όλες τις καλύψεις του A. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το **εξωτερικό μέτρο** του A είναι το

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \text{ κάλυψη του } A\Big\}.$$

Παρατηρήσεις: (α) Μπορούμε, αν ορίσουμε $\ell(\emptyset) = 0$ και αν θεωρήσουμε το κενό σύνολο ως «διάστημα», να θεωρούμε ότι οι καλύψεις στον ορισμό είναι πάντα άπειρες αριθμήσιμες. Αν (I_n) είναι μια κάλυψη του A από πεπερασμένα το πλήθος (γνήσια) φραγμένα ανοικτά διαστήματα, την επεκτείνουμε σε «άπειρη» κάλυψη παίρνοντας επιπλέον το κενό σύνολο άπειρες φορές. Για το λόγο αυτό θα γράφουμε συνήθως $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ για τις καλύψεις συνόλων, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ για τις εκτιμήσεις των εξωτερικών μέτρων, και ο ορισμός μας γίνεται

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ ανοικτό διάστημα ή } \emptyset\Big\}.$$

(β) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$. Άρα, αν συμβεί να έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = +\infty,$$

τότε $\mu^*(A) = +\infty$.

(γ) Με την παραπάνω σύμβαση, το εξωτερικό μέτρο ορίζεται καλά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Πράγματι, κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δέχεται τουλάχιστον μία κάλυψη, την $I_n = (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου

Πρόταση 2.2.1 *Αν $A \subseteq B$, τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Απόδειξη: Αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Άρα,

$$\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \text{ κάλυψη του } A\Big\} \supseteq \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \text{ κάλυψη του } B\Big\},$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. □

Πρόταση 2.2.2 *Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\mu^*(A) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$$I_n = \Big(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big).$$

Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mu^*(A) = 0$. □

Πρόταση 2.2.3 $\mu^*(A+x)=\mu^*(A)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Άσκηση. □

Πρόταση 2.2.4 $\mu^*([a,b])=b-a$.

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε $[a,b]\subset I_\varepsilon:=(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$. Άρα,

$$\mu^*([a,b])\leq \ell(I_\varepsilon)=(b-a)+2\varepsilon.$$

Επομένως, $\mu^*([a,b])\leq b-a$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν (I_n) είναι μία καλυψη του $[a,b]$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

$$b-a\leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n).$$

Βήμα 1: Έστω ότι $[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της (I_n): μπορούμε δηλαδή να βρούμε $k\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$[a,b]\subset I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k.$$

Βήμα 2: Έστω ότι $[a,b]\subset(c_1,d_1)\cup\cdots\cup(c_k,d_k)$. Θα δείξουμε ότι

$$b-a<\sum_{n=1}^{k}(d_n-c_n).$$

Υπάρχει n_1 τέτοιος ώστε $a\in(c_{n_1},d_{n_1})$. Αν $d_{n_1}>b$, τότε

$$b-a<d_{n_1}-c_{n_1}\leq\sum_{n=1}^{k}(d_n-c_n).$$

Αν $d_{n_1}\leq b$, τότε $d_{n_1}\in(a,b]$, άρα υπάρχει n_2 τέτοιος ώστε $d_{n_1}\in(c_{n_2},d_{n_2})$. Αν $d_{n_2}\leq b$, τότε $d_{n_2}\in(a,b]$, άρα υπάρχει n_3 τέτοιος ώστε $d_{n_2}\in(c_{n_3},d_{n_3})$. Συνεχίζοντας έτσι, φτάνουμε σε κάποιον δείκτη n_s τέτοιον ώστε $b<d_{n_s}$ (στη χειρότερη περίπτωση εξαντλώντας όλα τα (c_n,d_n): υπάρχει n τέτοιος ώστε $c_n<b<d_n$).

Έχουμε λοιπόν βρεί $n_1,\ldots,n_s$ τέτοιους ώστε $c_{n_1}<a$, $b<d_{n_s}$ και

$$c_{n_2}<d_{n_1}<d_{n_2},\ c_{n_3}<d_{n_2}<d_{n_3},\ \ldots,\ c_{n_s}<d_{n_{s-1}}<d_{n_s}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}(d_n-c_n) &\geq (d_{n_s}-c_{n_s})+(d_{n_{s-1}}-c_{n_{s-1}})+\cdots+(d_{n_2}-c_{n_2})+(d_{n_1}-c_{n_1})\\ &\geq (d_{n_s}-c_{n_s})+(c_{n_s}-c_{n_{s-1}})+\cdots+(c_{n_3}-c_{n_2})+(c_{n_2}-c_{n_1})\\ &= d_{n_s}-c_{n_1}\\ &> b-a.\end{aligned}$$

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$b - a < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$

για κάθε κάλυψη (I_n) του $[a, b]$. Άρα, $\mu^*([a, b]) \geq b - a$. $\square$

Παρατήρηση: Από τις Προτάσεις 2.2.2 και 2.2.4 φαίνεται ότι το $[0, 1]$ (και κάθε κλειστό διάστημα) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση 2.2.5 $\mu^*\big((a, b)\big) = b - a$.

Απόδειξη: Για κάθε $0 < \varepsilon < (b - a)/2$ έχουμε $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b) \subset [a, b]$. Από την Πρόταση 2.2.1,

$$(b - a) - 2\varepsilon = \mu^*([a + \varepsilon, b - \varepsilon]) \leq \mu^*\big((a, b)\big) \leq \mu^*([a, b]) = b - a.$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για όλα τα «μικρά» $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι $\mu^*\big((a, b)\big) = b - a$. $\square$

Πρόταση 2.2.6 $\mu^*\big((a, +\infty)\big) = +\infty$.

Απόδειξη: Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $(a, +\infty) \supset (a, a + N)$, άρα

$$\mu^*\big((a, +\infty)\big) \geq a + N - a = N.$$

Άρα, $\mu^*\big((a + \infty)\big) = +\infty$. $\square$

Πρόταση 2.2.7 (Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου) *Για κάθε (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

Απόδειξη: Αν το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι $+\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \mu^*(A_n) < +\infty$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη (J_s) του $\bigcup_n A_n$ από ανοικτά διαστήματα, τέτοια ώστε $\sum_s \ell(J_s) < \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$.

Για κάθε n θεωρούμε κάλυψη $(I_n^k)_k$ του A_n με την ιδιότητα

$$\sum_k \ell(I_n^k) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Αν πάρουμε σαν (J_s) την οικογένεια $(I_n^k)_{n,k}$ όλων αυτών των ανοικτών διαστημάτων, τότε

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,k} I_n^k$$

και

$$\sum_{n,k} \ell(I_n^k) = \sum_n \sum_k \ell(I_n^k) < \sum_n \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon. \qquad \square$$

2.2.2 Μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

αν τα A_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων A και B του $[0,1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα όπου

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Η κατασκευή ενός τέτοιου παραδείγματος δεν είναι απλή: χρησιμοποιεί το Αξίωμα της Επιλογής (βλέπε §2.2.4).

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μία κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» μ^* στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των **Lebesgue μετρήσιμων συνόλων**.

Ορισμός. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμο** αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A).$$

(Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» - ως προς το εξωτερικό μέτρο - οποιοδήποτε άλλο σύνολο). Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$. Ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{M}$ λέγεται **μέτρο Lebesgue**.

Παρατήρηση. Από την $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A)$ και από την υποπροσθετικότητα του μ^*, έχουμε πάντα την ανισότητα

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε τη μετρησιμότητα του A είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A)$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$.

Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Πρόταση 2.2.8 *Αν $\mu^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\mu^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \setminus A$ άρα

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A). \qquad \square$$

Πρόταση 2.2.9 *Αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R}\setminus A \in \mathcal{M}$ (το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο).*

Απόδειξη: $A \cap X = X\setminus A^c$ και $X\setminus A = X \cap A^c$. □.

Πρόταση 2.2.10 *Αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$ (η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο).*

Απόδειξη: Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)$$

και, χρησιμοποιώντας τη μετρησιμότητα των A και B, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(X \cap (A \cup B)) + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c) &= \mu^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) \\ &\quad + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c) \\ &\leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\ &\leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\ &= \mu^*(X). \end{aligned}$$

Άρα, το $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 2.2.11 *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Απόδειξη: Αρκεί να υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο σύνολα, ας πούμε το A, είναι μετρήσιμο. Παίρνοντας $X = A \cup B$ στον ορισμό, έχουμε

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

αφού $(A \cup B) \cap A^c = A$ και $(A \cup B)\setminus A = B$, λόγω της $A \cap B = \emptyset$. □

Πρόταση 2.2.12 *Αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{M}$ (η τομή δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο).*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 2.2.9 και 2.2.10. □

Πρόταση 2.2.13 *Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$B_1 = A_1 \ , \ B_2 = A_2 \backslash A_1 = A_2 \cap A_1^c, \ldots, \ B_n = A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \ldots.$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει, κάθε B_n είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα B_n είναι ξένα ανά δύο και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =: A.$$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε n, το $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ είναι μετρήσιμο, άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) + \mu^*(X \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(X \cap B_i) + \mu^*(X \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(X \cap B_i) + \mu^*(X \backslash A) \end{aligned}$$

από την Πρόταση 2.2.12 και τον εγκλεισμό $X \backslash A \subseteq X \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$. Αφήνοντας το $n \to \infty$, παίρνουμε

$$\mu^*(X) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap B_i) + \mu^*(X \backslash A) \geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \backslash A)$$

λόγω της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου. Άρα, το A είναι μετρήσιμο. $\square$

Μέτρο Lebesgue

Ας συνοψίσουμε τη δουλειά που έχουμε κάνει ως τώρα. Ορίσαμε το εξωτερικό μέτρο $\mu^*(A)$ για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Θεωρήσαμε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα οποία ονομάσαμε μετρήσιμα σύνολα. Είδαμε ότι αυτή η κλάση έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.
2. $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \backslash A \in \mathcal{M}$.
3. $A_n \in \mathcal{M}, \ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις **σ-άλγεβρες**:

Ορισμός: Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν

(α) $\Omega \in \mathcal{A}$.
(β) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.
(γ) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Λέμε ότι μια τέτοια κλάση υποσυνόλων του Ω είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(δ) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

(ε) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση: Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \backslash B \in \mathcal{M}$.

Με βάση τον ορισμό, η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα. Ορίζουμε μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με

$$A \mapsto \mu(A) := \mu^*(A).$$

Δηλαδή, η μ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης μ^* (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση μ ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** ή απλά **μέτρο**.

Με την παραπάνω ορολογία, έχουμε δείξει το εξής:

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ Lebesgue μετρήσιμο $\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \mu(A) := \mu^*(A)$$

είναι ***αριθμήσιμα προσθετική*** *(ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n και $A_n \cap A_m = \emptyset$ αν $n \neq m$), τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη: Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο μ είναι αριθμήσιμα προσθετκή συνολοσυνάρτηση. Έστω A_n, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Από την Πρόταση 2.2.13 το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του μέτρου και την Πρόταση 2.2.11, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\geq\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

προκύπτει άμεσα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του (εξωτερικού) μέτρου (Πρόταση 2.2.7). □

Ποιά σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Όπως θα δούμε, η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Πρόταση 2.2.14 *Όλα τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Απόδειξη: (α) Θεωρούμε πρώτα διάστημα της μορφής $J=[a,+\infty)$. Έστω $X\subseteq\mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mu^*(X)\geq\mu^*(X\cap[a,+\infty))+\mu^*(X\cap(-\infty,a)).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κάλυψη του X από ανοιχτά διαστήματα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\geq\mu^*(X\cap[a,+\infty))+\mu^*(X\cap(-\infty,a)).$$

Έστω ότι $X\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, και ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<+\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)+\varepsilon\geq\mu^*(X\cap[a,+\infty))+\mu^*(X\cap(-\infty,a)).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_n'=I_n\cap(a,+\infty)\quad,\quad I_n''=I_n\cap(-\infty,a),$$

και

$$I_0=\left(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Καθένα από τα I_n',I_n'' είναι ανοιχτό διάστημα ή το κενό σύνολο, και

$$\ell(I_n)=\ell(I_n')+\ell(I_n'').$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}X\cap[a,+\infty)&\subseteq I_0\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n'\\ X\cap(-\infty,a)&\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n''.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mu^*(X\cap[a,+\infty))+\mu^*(X\cap(-\infty,a)) &\le \ell(I_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n')+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n'')\\ &= \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\big(\ell(I_n')+\ell(I_n'')\big)\\ &= \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n).\end{aligned}$$

(β) Αν $J=(a,+\infty)$, τότε γράφοντας

$$(a,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+1/n,+\infty)$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2.13 και το (α), βλέπουμε ότι $J\in\mathcal{M}$.

(γ) Τα $(-\infty,a)$ και $(-\infty,a]$ είναι μετρήσιμα ως συμπληρώματα μετρήσιμων συνόλων.

(δ) Εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα της μορφής $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ και (a,b) είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα,

$$[a,b]=\mathbb{R}\backslash\big((-\infty,a)\cup(b,+\infty)\big)$$

δηλαδή το $[a,b]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα του μετρήσιμου συνόλου $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$. □

Ορισμός: Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα διαστήματα λέγεται **σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του** $\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{B}=\bigcap\big\{\mathcal{A}\subseteq P(\mathbb{R})\mid \mathcal{A}\ \ \sigma-\text{άλγεβρα και η } \mathcal{A} \text{ περιέχει όλα τα διαστήματα}\big\}.$$

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας και από την Πρόταση 2.2.14 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

Πρόταση 2.2.15 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$. □

Πρόταση 2.2.16 *Κάθε ανοιχτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη: Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων - και μάλιστα ξένων ανά δύο: βλέπε «Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ». Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοιχτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. □

Παρατηρήσεις: (α) Η Borel σ-άλγεβρα περιέχει πολύ περισσότερα σύνολα από τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα G_δ-**σύνολα**) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα F_σ-**σύνολα**) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.

(β) Η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο). Για να περιγράψουμε όμως τέτοια παραδείγματα, πρέπει πρώτα να μιλήσουμε για μη μετρήσιμα σύνολα.

(γ) Από την άλλη πλευρά, τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

Πρόταση 2.2.17 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Το A είναι μετρήσιμο.*
2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\mu^*(G\backslash A) < \varepsilon$.*
3. *Υπάρχει ακολουθία (G_n) ανοικτών συνόλων με $A \subseteq G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu^*\big(\bigcap_{n=1}^\infty G_n \backslash A\big) = 0$.*

Απόδειξη: Άσκηση. □

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο ακόμα ιδιότητες του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

Πρόταση 2.2.18 (i) *Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, τότε*

$$\mu(A_n) \to \mu(A).$$

(ii) *Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\mu(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, τότε*

$$\mu(B_n) \to \mu(B).$$

Απόδειξη: (i) Γράφουμε το A σαν ξένη ένωση:

$$A = A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup (A_3\backslash A_2) \cup \cdots,$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_1) + \mu(A_2\backslash A_1) + \cdots + \mu(A_n\backslash A_{n-1}) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_1) + \mu(A_2\backslash A_1) + \cdots + \mu(A_n\backslash A_{n-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $C, D \in \mathcal{M}$ με $D \subset C$ και $\mu(D) < +\infty$, τότε

$$\mu(C\backslash D) = \mu(C) - \mu(D).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = B_1 \backslash B_n$. Τότε, η (A_n) είναι αύξουσα, οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \backslash B_n)\right) = \mu\left(B_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \mu(B_1) - \mu(B).\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1) - \mu(B_n)\big) \\ &= \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \qquad \square$$

Σημείωση: Η υπόθεση $\mu(B_1) < +\infty$ στο (ii) μπορεί να αντικατασταθεί από την $\mu(B_k) < +\infty$ για *κάποιο* k. Δεν μπορούμε όμως να την αφαιρέσουμε τελείως: αν $B_n = [n, +\infty)$, τότε $B_n \searrow \emptyset$ αλλά $\mu(B_n) = +\infty$ για κάθε n ενώ $\mu(\emptyset) = 0$.

2.2.3 Το σύνολο του Cantor

Κατασκευή:

Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\big(1/3, 2/3\big)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = \big[0, 1/3\big] \cup \big[2/3, 1\big].$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\big[0, 1/3\big]$ και $\big[2/3, 1\big]$ σε τρία ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = \big[0, 1/9\big] \cup \big[2/9, 1/3\big] \cup \big[2/3, 7/9\big] \cup \big[8/9, 1\big].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.
2. Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Σημείωση: Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

Ιδιότητες:

Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. $\square$

(2) *Το C έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με* 0. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\mu^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\mu^*(C) = 0$. $\square$

Παρατήρηση: Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.* Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}.$$

Το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n)+(1/3^{n+1})\big]$, $[(k/3^n)+(2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$:

εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha^x_{n+1} = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha^x_{n+1} = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x-y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α^x_n βλέπουμε ότι $\alpha^x_{n_0} \neq \alpha^y_{n_0}$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha^x_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha^y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha^x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, και τέτοια ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha^x_n)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

Τριαδική παράσταση αριθμού:

Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει μία τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1/3] \\ 1 & , x \in (1/3,2/3) \\ 2 & , x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0,1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Παραδείγματα: Ελέγξτε ότι

$$\begin{aligned} 1/8 &= (0,1,0,1,0,1,\ldots) \\ 1/4 &= (2,0,2,0,2,0,\ldots). \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μία σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε τη δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (Άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 2.2.2 *Εστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* $\square$

Απόδειξη: Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται σαν άσκηση. $\square$

2.2.4 Παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου

Στην §2.2 ορίσαμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και τη μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι εγκλεισμοί
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$
Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου. Η κατασκευή βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από τη Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ μία μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο X_a. Δηλαδή, υπάρχει μία **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

Σημείωση: Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θεώρημα 2.2.3 *Υπάρχει μη μετρήσιμο* $E \subseteq [0,1]$.

Απόδειξη: Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1]$ ως εξής:
$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$
(παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1,1]$). Η $\sim$ χωρίζει το $[0,1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας
$$E_x = \{y \in [0,1] \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$
Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a \mid a \in A\} \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ του $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ και ορίζουμε την ακολουθία συνόλων
$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. $E_n \subseteq [-1, 2]$.
2. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ τέτοια ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.
3. $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu(E_n) = \mu(E)$ (Άσκηση 1). Από τις ιδιότητες των E_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0,1]) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \\ &\leq 3, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 0 (αν $\mu(E) = 0$) ή με $+\infty$ (αν $\mu(E) > 0$). Άρα, το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. $\square$

2.2.5 Ασκήσεις

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(A) = \mu^*(A + t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A + t$ είναι μετρήσιμο.

2. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\mu^*(A) > 0$.

3. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ των A και B).

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $t \cdot A$ το σύνολο $t \cdot A = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\mu^*(t \cdot A) = |t| \cdot \mu^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά M, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(f(A)) \leq M \cdot \mu^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$. [*Υπόδειξη:* Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.]

5. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu^*(E \cap I) > \alpha \cdot \ell(I).$$

[*Υπόδειξη:* Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \mu^*(E) + \varepsilon$.]

6. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $\delta > 0$ ώστε $\mu(A \cap I) \geq \delta \cdot \ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\mu(A^c) = 0$.

7. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

8. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu(A)$.

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$, αλλά $\mu(B \setminus A) > 0$.

9. Έστω $A = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x < 1/n\}$. Υπολογίστε τα $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ και $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το A είναι μετρήσιμο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο G με $A \subseteq G$ και $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ανοιχτών συνόλων $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ με $A \subseteq H := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ και $\mu(H \setminus A) = 0$.

[*Υπόδειξη:* Για το (α)⇒(β) θεωρήστε πρώτα την περίπτωση όπου $\mu(A) < +\infty$.]

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\mu(F) = \mu(A)/2$.

12. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

13. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(β) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ και αν $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

14. Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $C+1$, $2C$, όπου C το σύνολο του Cantor.

15. Έστω A υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{X}$ η οικογένεια των υποσυνόλων X του A που ικανοποιούν το εξής: είτε το X ή το $A\backslash X$ είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel. [*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{diam}[f(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})] < \frac{1}{k}\}.]$$

17. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι Borel.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι Borel.

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι Borel}\}$.]

19. Δείξτε ότι ο αριθμός $1/4$ ανήκει στο σύνολο του Cantor.

20. Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ τη δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

1. $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

2. $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \text{ και } x_2 \neq 5\}$.
3. $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots, \; x_n \neq 5\}$.

21. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\mu(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

2.3 Μετρήσιμες συναρτήσεις

2.3.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Όπως είδαμε στην §2.1, για μία φραγμένη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα θέλαμε να προσεγγίσουμε το $\int_A f$ από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \mu(\{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}),$$

όπου $\{y_0 < y_1 < \ldots < y_n\}$ διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Απαραίτητη προϋπόθεση για να γίνει κάτι τέτοιο είναι τα σύνολα

$$B_k = \{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$$

να είναι μετρήσιμα. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να περιοριστούμε στην κλάση εκείνων των συναρτήσεων $f : A \to [-\infty, +\infty]$ για τις οποίες τα σύνολα

$$\{x \in A \mid a \leq f(x) < b\}$$

είναι μετρήσιμα. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **μετρήσιμες**.

Ορισμός. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η f λέγεται **μετρήσιμη** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$ είναι μετρήσιμο.

Πρόταση 2.3.1 *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι μετρήσιμη.*

2. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty])$ *είναι μετρήσιμο.*
3. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A \mid f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$ *είναι μετρήσιμο.*
4. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$ *είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$ Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\}.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A \mid f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \geq a\}.$$

$(3 \Rightarrow 4)$ Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}.$$

$(4 \Rightarrow 1)$ Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A \mid f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leq a\}. \qquad \square$$

Πρόταση 2.3.2 *Έστω* A *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f : A \to [-\infty, +\infty]$ *μετρήσιμη. Τότε, όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων (μέσω της* f*) είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα* $\{x \in A \mid f(x) = a\}$, $a \in [-\infty, +\infty]$.

Απόδειξη: Απλή συνέπεια της Πρότασης 2.3.1. Για παράδειγμα, αν $J = [a, b]$ τότε το

$$f^{-1}(J) = \{x \in A \mid a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in A \mid f(x) \geq a\} \cap \{x \in A \mid f(x) \leq b\}$$

είναι μετρήσιμα. Τελείως ανάλογα, τα

$$\{x \in A \mid f(x) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid a - \frac{1}{n} < f(x) < a + \frac{1}{n}\}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

και

$$\{x \in A \mid f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > n\}$$

είναι μετρήσιμα. $\square$

Παραδείγματα. (α) Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f είναι μετρήσιμη. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ είναι ανοιχτό στο A, δηλαδή είναι της μορφής $A \cap U$ για κάποιο ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$. Επομένως είναι μετρήσιμο σύνολο, ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & , a < 0 \\ A & , 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & , a \geq 1, \end{cases}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μία ημιευθεία (Άσκηση).

Πρόταση 2.3.3 *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

1. *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη (υποθέτουμε ότι η $f + g$ ορίζεται καλά, δηλαδή ότι το σύνολο των $x \in A$ για τα οποία έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$ είναι κενό ή, γενικότερα, έχει μέτρο 0).*
2. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η λf είναι μετρήσιμη.*
3. *Η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη (ορίζουμε $0 \cdot \infty = 0$).*
4. *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*
5. *Οι $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη: (1) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) + g(x) < a$, τότε $f(x) < a - g(x)$. Άρα, υπάρχει ρητός q τέτοιος ώστε

$$f(x) < q < a - g(x).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \{x \in A \mid f(x) + g(x) < a\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in A \mid f(x) < q \text{ και } g(x) < a - q\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in A \mid f(x) < q\} \cap \{x \in A \mid g(x) < a - q\}\right), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι μετρήσιμο σύνολο.

(2) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda > 0$, τότε

$$\{x \in A \mid \lambda f(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a/\lambda\},$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Αν $\lambda < 0$, τότε

$$\{x \in A \mid \lambda f(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) < a/\lambda\},$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, η λf είναι μετρήσιμη (αν $\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα).

(3) Δείχνουμε πρώτα ότι η f^2 είναι μετρήσιμη. Αν $a < 0$, τότε

$$\{x \in A \mid f^2(x) > a\} = A,$$

ενώ αν $a \geq 0$, τότε

$$\{x \in A \mid f(x)\, a\} = \{x \in A \mid f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A \mid f(x) < -\sqrt{a}\}.$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : f^2(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη αφού

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\big\{(f+g)^2 - (f-g)^2\big\}.$$

(4) Αν $a = 0$, τότε $\{x : 1/f(x) > 0\} = \{x : f(x) > 0\}$. Αν $a > 0$, τότε

$$\{x \in A \mid 1/f(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) < 1/a\}.$$

Τέλος, αν $a < 0$ τότε

$$\{x \in A \mid 1/f(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in A \mid 1/f(x) < 1/a\}.$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : 1/f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

(5) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A \mid \max\{f, g\}(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a\} \cup \{x \in A \mid g(x) > a\}$$

και

$$\{x \in A \mid \min\{f, g\}(x) < a\} = \{x \in A \mid f(x) < a\} \cup \{x \in A \mid g(x) < a\}.$$

Άρα, οι $\max\{f, g\}$ και $\min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες. Τέλος, η $|f| = \max\{f, -f\}$ είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 2.3.4 *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

1. *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

2. *Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ με $f(x) := \lim_n f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη: (1) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το

$$\{x \in A \mid \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f_n(x) > a\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο, και το

$$\{x \in A \mid \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f_n(x) < a\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, οι $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.
(2) Θυμηθείτε ότι για κάθε ακολουθία (a_n) έχουμε

$$\limsup_n a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq m} a_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq m} a_k \right).$$

Η ακολουθία $b_m = \sup_{k\geq m} a_k$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\limsup_n a_n$, ενώ η $\gamma_m = \inf_{k\geq m} a_k$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

Στην περίπτωσή μας, αν θέσουμε

$$g_m(x) = \sup_{k\geq m} f_k(x) \quad \text{και} \quad h_m(x) = \inf_{k\geq m} f_k(x),$$

τότε από το (1) κάθε g_m, h_m είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$f(x) = \inf_m g_m(x) = \sup_m h_m(x).$$

Άρα, πάλι από το (1), η f είναι μετρήσιμη. □

Σημείωση: Η απόδειξη του (2) δίνει κάτι γενικότερο: Αν (f_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, τότε οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ που ορίζονται από τις

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq m} f_k(x) \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq m} f_k(x) \right),$$

είναι μετρήσιμες. □

Ορισμός. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού** στο A (ή **σχεδόν για κάθε** $x \in A$) αν

$$\mu(\{x \in A \mid \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}) = 0.$$

Συναρτήσεις που συμπίπτουν σχεδόν παντού συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο σε σχέση με τη μετρησιμότητα:

Πρόταση 2.3.5 *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : A \to [-\infty, +\infty]$. Αν η f είναι μετρήσιμη και $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο A (θα γράφουμε $f = g$ σ.π.), τότε η g είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη: Θέτουμε $B = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ και $Z = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$. Αφού $\mu(Z) = 0$ το Z είναι μετρήσιμο, άρα και το $B = A \setminus Z$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \{x \in A \mid g(x) > a\} &= \{x \in B \mid g(x) > a\} \cup \{x \in Z \mid g(x) > a\} \\ &= \{x \in B \mid f(x) > a\} \cup \{x \in Z \mid g(x) > a\} \\ &= \big(B \cap \{x \in A \mid f(x) > a\}\big) \cup \{x \in Z \mid g(x) > a\}. \end{aligned}$$

Το $B \cap \{x \in A \mid f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο διότι το B είναι μετρήσιμο και το $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο λόγω της μετρησιμότητας της f. Το $\{x \in Z \mid g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μέτρο 0. Άρα, το $\{x \in A \mid g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

Κλείνουμε με ένα ακόμα τυπικό παράδειγμα Πρότασης που δείχνει ότι τα σύνολα μέτρου 0 είναι αμελητέα σε σχέση με τη μετρησιμότητα:

Πρόταση 2.3.6 *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση. Αν $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο A, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη: Έστω $B = \{x \in A \mid f_n(x) \to f(x)\}$. Αν $Z = A \setminus B$, τότε $\mu(Z) = 0$ και το B είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\{x \in B \mid f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο από την Πρόταση 2.3.4 γιατί $f_n \to f$ στο B, και το $\{x \in Z \mid f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z (το οποίο έχει μέτρο 0). Άρα, το

$$\{x \in A \mid f(x) > a\} = \{x \in B \mid f(x) > a\} \cup \{x \in Z \mid f(x) > a\}$$

είναι μετρήσιμο. Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

2.3.2 Ασκήσεις

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : A \to [-\infty, +\infty]$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{αν } f(x) \leq a \\ a & , \text{αν } f(x) > a, \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

2. Δείξτε ότι:

(α) Κάθε μονότονη συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

(β) Κάθε συνάρτηση $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ με φραγμένη κύμανση είναι μετρήσιμη.

3. Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη. [*Υπόδειξη:* Γράψτε την f' σαν όριο μιάς ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.]

4. (α) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\mu(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\mu(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A\subseteq\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

5. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x\in A\mid f(x)>0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

6. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n:A\to[-\infty,+\infty]$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L=\{x\in A\mid\ \text{η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει }\}$$

είναι μετρήσιμο.

7. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο και $f:A\to[-\infty,+\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q\in\mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x\in A\mid f(x)>q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in B\}$ είναι μετρήσιμο. [*Υπόδειξη:* Η κλάση $\{E\subseteq\mathbb{R}\mid \text{ το } f^{-1}(E) \text{ είναι μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.]

9. Δείξτε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $G\subseteq\mathbb{R}$ το $f^{-1}(G)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

2.4 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

1. Αν το E είναι μετρήσιμο, τότε $\int_E \chi_E=\mu(E)$, όπου χ_E είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του E.

2. Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f,g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (στο ίδιο σύνολο) και $t,s\in\mathbb{R}$, τότε

$$\int(tf+sg)=t\int f+s\int g.$$

3. Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f \geq 0$, τότε $\int f \geq 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με τη μονοτονία: αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες (στο ίδιο σύνολο) και $f \geq g$, τότε $\int f \geq \int g$.

4. Το ολοκλήρωμα ορίζεται για μία ευρεία κλάση συναρτήσεων. Οι φραγμένες Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

1. Στην §2.4.1 ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες **απλές συναρτήσεις**, τους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (1) και (2) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.

2. Στην §2.4.2 δείχνουμε ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιάς αύξουσας ακολουθίας απλών συναρτήσεων.

3. Στην §2.4.3 δίνουμε τον ορισμό του $\int f$ για κάθε μετρήσιμη $f \geq 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το αποτέλεσμα της §2.4.2 υποδεικνύουν ότι το $\int f$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \phi$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\phi \leq f$.

4. Στην §2.4.4 δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f = \int f^+ - \int f^-$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. Ειδικότερα, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Στην §2.4.5 συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

2.4.1 Απλές συναρτήσεις

Απλή συνάρτηση είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων (θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι τα σύνολα είναι μετρήσιμα, και να μιλάμε για απλές *μετρήσιμες* συναρτήσεις στην περίπτωση που αυτή η υπόθεση ικανοποιείται). Δηλαδή, η $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απλή αν

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \tag{3.1}$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς a_i και κάποια μετρήσιμα σύνολα E_i.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα E_i να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς a_i να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μία συνάρτηση ϕ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές $a_1, \ldots, a_m$ (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Αν λοιπόν ορίσουμε

$$A_i = \{\phi = a_i\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) = a_i\},$$

τότε τα σύνολα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει το $\mathbb{R}$, και

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}. \tag{3.2}$$

Η αναπαράσταση (3.2) της ϕ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την ϕ) και λέγεται **κανονική αναπαράσταση** της ϕ.

Ορισμός. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή συνάρτηση. Λέμε ότι η ϕ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο

$$\{\phi \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \neq 0\}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της ϕ είναι

$$\phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

όπου $a_0 = 0$ και $A_0 = \{\phi = 0\}$, οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\mu(A_i) < +\infty$ αν $i \neq 0$ (αναγκαστικά, $\mu(A_0) = \infty$). Το ολοκλήρωμα της ϕ ορίζεται από την

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i). \tag{3.3}$$

Αν υιοθετήσουμε τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$, μπορούμε να γράφουμε

$$\int \phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot \mu(\{\phi = a\}).$$

Λήμμα 2.4.1 *Έστω ϕ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και $\phi = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της ϕ τέτοια ώστε τα E_i να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i).$$

Απόδειξη: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $J_a = \{i \leq n \mid b_i = a\}$. Τότε,

$$\{\phi = a\} = \bigcup_{i \in J_a} E_i$$

και

$$a \cdot \mu(\{\phi = a\}) = \sum_{i \in J_a} b_i \cdot \mu(E_i).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int \phi &= \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot \mu(\{\phi = a\}) = \sum_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i \in J_a} b_i \mu(E_i) \\ &= \sum_{i \in \cup_a J_a} b_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i). \qquad \square \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4.1 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και θετικό (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

Πρόταση 2.4.1 *Έστω ϕ και ψ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

1. *Αν $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $\int (t\phi + s\psi) = t \int \phi + s \int \psi$.*
2. *Αν $\phi \geq \psi$, τότε $\int \phi \geq \int \psi$.*

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε τις κανονικές μορφές

$$\phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{B_j},$$

των ϕ και ψ (οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i ξένα μετρήσιμα με ένωση το $\mathbb{R}$, $a_0 = 0$ και $\mu(A_i) < \infty$ αν $i \neq 0$ - αντίστοιχες ιδιότητες έχουν τα b_j, B_j).

Παρατηρούμε ότι, από την $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{j=0}^{k} B_j = \mathbb{R}$ έπεται ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{j=0}^{k} (A_i \cap B_j).$$

Τα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα, μετρήσιμα, και έχουν πεπερασμένο μέτρο (με την εξαίρεση του $A_0 \cap B_0$). Επίσης,

$$\phi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad , \quad \psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{A_i \cap B_j}$$

και

$$t\phi + s\psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (ta_i + sb_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Από το Λήμμα 2.4.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (t\phi + s\psi) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(ta_i + sb_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ &= t\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_i\mu(A_i\cap B_j) + s\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}b_j\mu(A_i\cap B_j)\\ &= t\int\phi + s\int\psi.\end{aligned}$$

(2) Αν $\phi \geq \psi$, τότε η $\phi-\psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Από το (1),

$$\int\phi - \int\psi = \int(\phi-\psi)\geq 0.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής από τον ορισμό, αφού $\phi-\psi\geq 0$. □

Πόρισμα 2.4.1 *Αν $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ και τα $E_1,\ldots,E_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα με $\mu(E_i)<\infty$, τότε*

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i).$$

Απόδειξη: Κάθε χ_{E_i} είναι απλή και ολοκληρώσιμη γιατί $\mu(E_i)<\infty$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. □

Ορισμός. Αν ϕ είναι μία απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση και E ένα μετρήσιμο σύνολο, ορίζουμε

$$\int_E\phi := \int\phi\cdot\chi_E.$$

Η $\phi\cdot\chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (εξηγήστε), άρα το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ορίζεται καλά. Αν $E=[a,b]$, θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$\int_a^b\phi := \int_{[a,b]}\phi.$$

Γενικά θα αποφεύγουμε το συμβολισμό $\int_a^b\phi(x)dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μία απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε

$$\int_a^b\chi_{\mathbb{Q}} = 0$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

2.4.2 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιάς αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω $f : A \to [0,\infty]$ μία μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots \leq f$ τέτοια ώστε*

$$\phi_n(x) \nearrow f(x)$$

για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geq 2^n\}$ και

$$B_{n,k} = \big\{x \in A \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\big\}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1.$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0, 2^n]$ σε 2^{2n} διαστήματα μήκους 2^{-n} και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα C_n και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση ϕ_n ως εξής:

$$\phi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε ϕ_n ικανοποιεί τα εξής:

1. $0 \leq \phi_n \leq f$ και η ϕ μηδενίζεται έξω από το A.
2. $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$ στο σύνολο $A \backslash C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.
3. $\phi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

$$\phi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x).$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f(x) < 2^{n_0} < 2^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, $0 \leq f(x) - \phi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $\phi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leq M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η (ϕ_n) είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A \mid k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{x \in A \mid \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{x \in A \mid \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\phi_n(x) = 2^n \leq \phi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το C_n στα $B_{n+1,2^{2(n+1)}-2}$, $B_{n+1,2^{(2(n+1))}-1}$ και C_{n+1}).

Σε κάθε περίπτωση $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\phi_n \leq \phi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4.1 για τις f^+ και f^- χωριστά, παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.4.2 *Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

$$0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \ldots \leq |f|$$

και $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η $|f|$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Άσκηση. □

Παρατηρήστε ότι στην κατασκευή που κάναμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η f είναι μετρήσιμη μόνο για να εξασφαλίσουμε ότι τα C_n, $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δηλαδή για να συμπεράνουμε ότι οι απλές συναρτήσεις ϕ_n είναι μετρήσιμες. Η σύγκλιση των ϕ_n στην f ισχύει τελείως γενικά.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.4.1 με την Πρόταση 2.3.4(2) παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.4.2 *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.* □

2.4.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις

Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Με βάση το Θεώρημα 2.4.1 και την απαίτηση της μονοτονίας για το ολοκλήρωμα, είναι λογικό να ορίσουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της f ως εξής:

$$\int f = \sup \left\{ \int \phi \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leq f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** αν $\int f < +\infty$.

Παρατηρήσεις: (α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος είναι συμβατός με τον ορισμό του ολοκληρώματος της §2.4.1 στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\phi \geq 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη τότε

$$\int \phi = \sup \left\{ \int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Αυτό είναι άμεσο, από τη μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση 2.4.1(2) - και την $0 \leq \phi \leq \phi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \phi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\mu(\{\phi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν A είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A = \mu(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\mu(A) < \infty$, ενώ αν $\mu(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geq \chi_{A\cap[-n,n]}$ άρα

$$\int \chi_A \geq \sup_n \int \chi_{A\cap[-n,n]} = \sup_n \mu(A \cap [-n,n]) = \mu(A) = \infty.$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

1. Αν $0 \leq f \leq g$ τότε $\int f \leq \int g$.

2. Αν $t \geq 0$ και $f \geq 0$ τότε $\int (tf) = t \int f$.

(γ) Αν $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ και E μετρήσιμο σύνολο, ορίζουμε

$$\int_E f = \int f \cdot \chi_E.$$

Αν $f : E \to [0, \infty]$, επεκτείνουμε την f σε μία συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

$$\int_E f = \int \tilde{f}.$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} = \int \tilde{f} = \int_E f$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό:

3. Αν $\mu(E) = 0$ και $f \geq 0$, τότε $\int_E f = 0$. Πράγματι, αν η ϕ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leq \phi \leq f \cdot \chi_E$, τότε $\phi \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ όπου $\mu(E_i) = 0$, άρα

$$\int \phi = \int \phi \cdot \chi_E = 0.$$

4. Αν $E \subset F$ και $f \geq 0$, τότε $\int_E f \leq \int_F f$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \cdot \chi_E \leq f \cdot \chi_F$.

5. Αν $0 \leq f \leq M$ στο E, τότε $\int_E f \leq M \cdot \mu(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \cdot \chi_E \leq M \cdot \chi_E$.

Η επόμενη παρατήρηση είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική:

Ανισότητα του Chebyshev: *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

$$\int f \geq a \cdot \mu(\{x : f(x) \geq a\}).$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $f \geq a \cdot \chi_{\{f \geq a\}}$. Άρα,

$$\int f \geq \int a \cdot \chi_{\{f \geq a\}} = a \cdot \mu(\{f \geq a\}). \qquad \square$$

Πόρισμα 2.4.3 *Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\mu(\{f=\infty\})=0$.*

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\{f=\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\geq n\}.$$

Η ακολουθία $E_n=\{f\geq n\}$ είναι φθίνουσα, και από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$\mu(E_n)\leq\frac{1}{n}\int f\to 0$$

όταν $n\to\infty$. Άρα,

$$\mu(\{f=\infty\})=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$$

από την Πρόταση 2.2.18. $\square$

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το **θεώρημα μονότονης σύγκλισης**. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 2.4.2 *Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν (E_n) είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, τότε*

$$\int_E\phi=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\phi_n.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε $\phi=\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{A_i}$, όπου $a_i>0$ και τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

$$\int_E\phi=\int\phi\cdot\chi_E=\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot\mu(A_i\cap E).$$

Αφού $E_n\nearrow E$, έχουμε $\mu(A_i\cap E_n)\nearrow\mu(A_i\cap E)$ για κάθε $i=1,\dots,m$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int\phi &= \sum_{i=1}^{m}a_i\cdot\mu(A_i\cap E)=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot\lim_{n\to\infty}\mu(A_i\cap E_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot\mu(A_i\cap E_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\phi_n. \qquad\square\end{aligned}$$

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης. *Έστω (f_n) μία αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int\Big(\lim_{n\to\infty}f_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Απόδειξη: Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x)$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το $\lim \int f_n$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} f_n \leq \int f.$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ϕ με $0 \leq \phi \leq f$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \geq (1-\varepsilon) \int \phi.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\varepsilon)\int f$ για κάθε $\varepsilon > 0$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq \phi \leq f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)\phi\}$. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, έχουμε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Δηλαδή, η (E_n) είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) > 0$, τότε $f_n(x) \to f(x) > (1-\varepsilon)\phi(x)$, άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν πάλι $f(x) = 0$, τότε $\phi(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Επομένως, $E_n \nearrow \mathbb{R}$.

Από τη μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)\phi = (1-\varepsilon)\int_{E_n} \phi$$

για κάθε n, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4.2 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi = (1-\varepsilon) \int \phi. \qquad \square$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μία πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 2.4.1 για την προσέγγιση μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

Θεώρημα 2.4.3 *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ψ_n) μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leq f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2.4.1 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \phi_n \cdot \chi_{[-n,n]}$. Κάθε ψ_n είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $\mu(\{\psi_n \neq 0\}) \leq \mu([-n,n]) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n \nearrow \int f$. □

Τώρα, χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πόρισμα 2.4.4 *Έστω f και g μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Ειδικότερα, αν E και F είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.2, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ϕ_n) και (ψ_n) μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\phi_n + \psi_n \nearrow f + g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int \phi_n + \int \psi_n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Πορίσματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f \cdot \chi_E$ και $f \cdot \chi_F$: αφού τα E και F είναι ξένα, έχουμε $f \cdot \chi_E + f \cdot \chi_F = f \cdot \chi_{E\cup F}$. □

Η επόμενη Πρόταση ουσιαστικά δείχνει ότι αν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν σχεδόν παντού, τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα (το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τις τιμές μιάς ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου 0).

Πρόταση 2.4.2 *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, $\int f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη: Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Άρα,

$$\int f = \int_{\{f=0\}} f + \int_{\{f>0\}} f = 0 + 0 = 0.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\int f = 0$. Για κάθε n ορίζουμε $E_n = \{f \geq 1/n\}$. Από την ανισότητα του Chebyshev,

$$\mu(E_n) = \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f = 0,$$

δηλαδή $\mu(E_n) = 0$. Αφού $E_n \nearrow \{f > 0\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Δηλαδή, $f = 0$ σχεδόν παντού. □

Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε (για άλλη μία φορά) την ανισότητα του Chebyshev για την απόδειξη.

Το Θεώρημα Beppo Levi που ακολουθεί είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Θεώρημα 2.4.4 (Beppo Levi) *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Απόδειξη: Οι f_n είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (μπορεί βέβαια να έχουμε $f(x) = \infty$ για κάποια x).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int s_N = \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\int s_N \nearrow \int f = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.4.5 *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τις $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού τα E_n είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \cdot \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μία συνολοσυνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται **μέτρο στην** $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\Phi(\emptyset) = 0$.

(β) Αν E_n ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.

Το μέτρο Lebesgue μ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου. Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

Θεώρημα 2.4.5 *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

$$\Phi_f(E) = \int_E f.$$

Τότε, η Φ_f είναι μέτρο. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue μ αντιστοιχεί στη συνολοσυνάρτηση Φ που ορίζεται από τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μία ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n αυξάνει κατά σημείο στην f, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία (f_n).

Λήμμα του Fatou *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n), όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$. Κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η (g_n) είναι αύξουσα, και

$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int g_n.$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leq f_k$ για κάθε $k \geq n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

$$\int g_n \leq b_n := \inf_{k\geq n} \int f_k.$$

Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n$. Άρα,

$$\int \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \quad \square$$

Πόρισμα 2.4.6 *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ σ.π. και το $\lim_n \int f_n$ υπάρχει, τότε*

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n. \qquad \square$$

2.4.4 Η γενική περίπτωση

Ο ορισμός που θα δώσουμε για το ολοκλήρωμα Lebesgue γενικής μετρήσιμης συνάρτησης είναι επιβεβλημένος από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Ορισμός. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+$ και $\int f^-$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη, τότε το **ολοκλήρωμα της** f ορίζεται από την

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι f^+, f^- είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της f είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι **η f είναι ολοκληρώσιμη**.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι **η f είναι ολοκληρώσιμη στο** E αν

$$\int_E f^+ = \int f^+ \cdot \chi_E < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^- = \int f^- \cdot \chi_E < \infty,$$

και ορίζουμε

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int f\chi_E.$$

(γ) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f \equiv 0$ στο E^c, οπότε

$$\int_E f = \int f \cdot \chi_E = \int f.$$

Παρατηρήσεις. (1) Αν $f \geq 0$ τότε $f = f^+$ και $f^- \equiv 0$, οπότε ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με τον προηγούμενο.

(2) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < +\infty,$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

(3) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\mu(\{f^+ = +\infty\}) = \mu(\{f^- = +\infty\}) = 0,$$

άρα

$$\mu(\{x : f(x) = +\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty\}) = 0.$$

Δηλαδή, η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(4) Αν $\mu(E) = 0$, τότε $\int_E f = 0$ (γιατί $\int_E f^+ = 0$ και $\int_E f^- = 0$).

(5) Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, η g είναι ολοκληρώσιμη, και $|f| \leq |g|$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| \leq \int |g|$.

(6) Αν $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

Πράγματι, από την $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ παίρνουμε $f^+ + f_2 = f^- + f_1$, άρα

$$\int f^+ + \int f_2 = \int f^- + \int f_1,$$

δηλαδή

$$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(7) Αν $\mu(E) < \infty$ και η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. (Ειδικότερα, κάθε φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι τα δύο ολοκληρώματα (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν.)

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

(α) **Γραμμικότητα**: *Έστω $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f+g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού και*

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

Επίσης, αν $t \in \mathbb{R}$ τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = t\int f.$$

Απόδειξη: Αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f+g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \quad \text{και} \quad (f+g)^- \leq f^- + g^-,$$

άρα

$$\int (f+g)^+ < +\infty \quad \text{και} \quad \int (f+g)^- < +\infty,$$

δηλαδή η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση (6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t > 0$, τότε $(tf)^+ = tf^+$ και $(tf)^- = tf^-$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = t\int f^+ - t\int f^- = t\int f.$$

Αν $t < 0$, τότε $(tf)^+ = -tf^-$ και $(tf)^- = -tf^+$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = -t\int f^- + t\int f^+ = t\int f.$$

Αν $t = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. $\square$

Πόρισμα 2.4.7 *Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.* $\square$

(β) **Μονοτονία**: *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f \leq g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \leq \int g$. Ειδικότερα, αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f = \int g$.*

Απόδειξη: Από την $f \leq g$ έπεται ότι $f^+ \leq g^+$ και $f^- \geq g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^-. \qquad \square$$

(γ) **Προσθετικότητα**: *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\int_{A\cup B} f = \int f \cdot \chi_{A\cup B} = \int f \cdot (\chi_A + \chi_B) = \int f \cdot \chi_A + \int f \cdot \chi_B = \int_A f + \int_B f. \quad \square$$

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε: για κάθε n, $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Απόδειξη: Αφού $|f_n| \leq g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, από την παρατήρηση (5). Η f είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leq g \Longrightarrow |f| \leq g.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leq g \Longrightarrow -g \leq f_n \leq g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\int_E g + \int_E f = \int_E (g + f) \leq \liminf_n \int_E (g + f_n) = \int_E g + \liminf_n \int_E f_n$$

και

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g - f) \leq \liminf_n \int_E (g - f_n) = \int_E g - \limsup_n \int_E f_n.$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n,$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. $\square$

Πόρισμα 2.4.8 (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης) *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\mu(E) < +\infty$ και (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f_n| \leq M$ στο E για κάθε n. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Απόδειξη: Αφού $\mu(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. $\square$

Πόρισμα 2.4.9 *Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f := \int_{(-\infty,x]} f$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη: Γράφουμε $F(x) = \int f \cdot \chi_{(-\infty,x]}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ τότε

$$f(y)\chi_{(-\infty,x_n]}(y) \to f(y)\chi_{(-\infty,x]}(y)$$

για κάθε $y \neq x$ (άσκηση). Επίσης,

$$|f \cdot \chi_{(-\infty,x_n]}| \leq |f|$$

για κάθε n. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $F(x_n) \to F(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής. $\square$

Παραδείγματα και εφαρμογές: (α) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη και (E_n) είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E_n \nearrow E$, τότε

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \cdot \chi_{E_n} \to f$ και $|f \cdot \chi_{E_n}| \leq |f|$ για κάθε n. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη. Τότε, για κάθε n η $f_n(x) = x^n f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_0^1 x^n f(x) \to 0.$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|x^n f(x)| \leq |f(x)|$ στο $[0,1]$ και ότι $f_n(x) = x^n f(x) \to 0$ σχεδόν παντού (για όλα τα $x \neq 1$ με $f(x) \neq \pm\infty$), και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

2.4.5 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το Θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 2.4.6 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

1. *Η f είναι μετρήσιμη.*
2. *Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

1. Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
2. Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη και $\int_E h = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο E. Επομένως, αν $f \leq g$ και $\int_E f = \int_E g$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.
3. Αν $s = \sum \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει μία ακολουθία P_n διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \quad , \quad U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f.$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leq f \leq u_n.$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leq f \leq u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = (R)\int_a^b f$$

και
$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = (R)\int_a^b f.$$
Αφού $\ell \leq u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leq f \leq u$, προκύπτει ότι
$$\ell = f = u \;\; \sigma.\pi.$$
Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (α).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,
$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f,$$
δηλαδή έχουμε αποδείξει το (β). □

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη δεί, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι η περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann είναι διαφορετική:

Παράδειγμα 1: *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *υπάρχει, αλλά το ολοκλήρωμα Lebesgue* $(L)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *δεν υπάρχει.*

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann σαν μία εναλλάσσουσα σειρά:
$$\begin{aligned}(IR)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx.\end{aligned}$$
Από το κριτήριο του Dirichlet, για να δείξουμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν στο 0 όταν $n \to \infty$. Όμως, για σταθερό x, η ακολουθία $|\sin x|/(x+(n-1)\pi)$ είναι προφανώς φθίνουσα, άρα η αντίστοιχη ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι φθίνουσα και
$$\int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx \leq \frac{1}{n-1} \to 0.$$
Αυτό αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ υπάρχει.

Αν το ολοκλήρωμα Lebesgue υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx < +\infty.$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &\geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi |\sin x|dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η $\sin x/x$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. □

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x<0$, και

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \ \text{ αν } \ x\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots.$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann της f

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

υπάρχει: είναι ίσο με

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$$

(η τελευταία σειρά συγκλίνει). Όμως,

$$(L)\int_0^\infty |f| = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = +\infty,$$

άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Τέτοια προβλήματα δεν εμφανίζονται αν η συνάρτηση που μελετάμε είναι μη αρνητική.

Θεώρημα 2.4.7 *Αν $f\geq 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_{-\infty}^{\infty} f$ υπάρχει, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, και*

$$(IR)\int f = (L)\int f.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f\cdot\chi_{[-n,n]}$ αυξάνει προς την f. Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (στο $[-n,n]$), επομένως μετρήσιμη. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

Επίσης,

$$(L)\int f_n = (R)\int_{-n}^{n} f(x)dx$$

για κάθε n, δηλαδή κάθε f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Από την υπόθεση, υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_{-n}^{n} f(x)dx = (IR)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = (L)\int f.$$

Άρα, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$(IR)\int f = (L)\int f. \qquad \square$$

Σημείωση: Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για γενικευμένα ολοκληρώματα κάθε είδους (για παράδειγμα, σε ανοιχτό φραγμένο διάστημα).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a,b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο $1/2$) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμμία συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ (γιατί;). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

Θεώρημα 2.4.8 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\mu(\{x \in [a,b] \mid \ \eta\ f \text{ είναι συνεχής στο } x\}) = 0.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$, $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ και $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \ldots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})} \quad \text{και} \quad u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}.$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leq f \leq u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n \to \int_a^b \ell \quad \text{και} \quad \int_a^b u_n \to \int_a^b u.$$

Δηλαδή,

$$L(f,P_n) \to \int_a^b \ell \quad \text{και} \quad U(f,P_n) \to \int_a^b u.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u.$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b]\setminus(A\cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a,b]\setminus(A\cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $y,z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y)-f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i,x_{i+1}] \subseteq (x-\delta, x+\delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) \mid y \in [x_i,x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) \mid z \in [x_i,x_{i+1}]\} \leq \varepsilon,$$

δηλαδή $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon$. Ακόμα,

$$0 \leq u(x) - \ell(x) \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Άρα, $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell = \int_a^b u$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f \quad , \quad U(f,P_n) \to \int_a^b f.$$

Για κάθε n, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n = L(f,P_n) \quad , \quad \int_a^b u_n = U(f,P_n).$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leq f \leq u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \ell_n = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f$$

και

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f.$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u.$$

Αφού $\ell \leq u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a,b] \mid \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \backslash P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: Έστω $x \in C \backslash P$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) \mid y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) \mid z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (γιατί;).

Συμπεραίνουμε ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a,b] \backslash C) \cup P$, άρα $\mu(A) = 0$. $\square$

2.4.6 Ασκήσεις

1. Έστω ϕ μη αρνητική απλή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int \phi = \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

3. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

4. Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;

5. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

6. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

7. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geq 1/n\}} f.$$

8. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

9. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

10. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

11. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

12. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.

13. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f < \varepsilon$.

14. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

15. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

16. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

17. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f$ και $\int_{E^c} f$.]

18. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.

19. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

20. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2} dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

21. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;

22. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.

23. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.

24. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

25. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

26. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.

27. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

28. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

29. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f : \mu(E) \geq 1/2\} > 0$.

30. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

31. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

32. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

33. (α) Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.

34. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \dots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \dots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ τέτοιος ώστε $\mu(E_i) \geq k/n$.