Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2000

Ενδεικτικά Προβλήματα

Με διορθώσεις από την έκδοση της 20ής Απριλίου

1. Δείξτε ότι για $x, y > 0$ ισχύει $x^y + y^x \geq 1$.

2. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας με αθροίσματα στηλών ίσα με ένα σταθερό αριθμό, δείξτε ότι την ίδια ιδιότητα έχει και ο A^{-1}.

3. Ο $(2n) \times (2n)$ πίνακας T γράφεται σε block μορφή ως

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

όπου οι A, B, D είναι $n \times n$ πίνακες. Υπολογίστε την ορίζουσα του T συναρτήσει των οριζουσών των πινάκων A, B, D.

4. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο στο επίπεδο που και οι τρεις κορυφές του να έχουν και τις δυο συντεταγμένες τους ακεραίους αριθμούς. Τι γίνεται αν θεωρήσουμε το τρίγωνο στο χώρο;

5. Υποθέτουμε ότι τα σημεία του επιπέδου έχουν χωριστεί σε δύο ξένα σύνολα. Δείξτε ότι για τουλάχιστον ένα από τα δύο σύνολα, για κάθε $r > 0$, υπάρχουν μέσα του δύο σημεία σε απόσταση r.

6. Τα σημεία του επιπέδου τα χρωματίζουμε με κόκκινο, κίτρινο ή μπλέ. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο σημεία στο επίπεδο σε απόσταση 1 που έχουν το ίδιο χρώμα.

7. Ποιος από τους αριθμούς e^π και π^e είναι μεγαλύτερος; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

8. Ένα πιάτο περιέχει n μακαρόνια. Διαλέγω στην τύχη δύο άκρες μακαρονιών από το πιάτο και τις δένω με κόμπο. Κατόπιν διαλέγω, πάλι στην τύχη, δύο από τις άκρες που έχουν μείνει και τις δένω και αυτές με κόμπο, και συνεχίζω έτσι μέχρι που να μην υπάρχει πια ζευγάρι από άκρα μακαρονιών στο πιάτο. Βρείτε τον μέσο αριθμό κλειστών κυκλωμάτων (από μακαρόνια) που έχουν σχηματιστεί.

9. Δύο παίκτες, ο A και ο B, παίζουν το εξής παιχνίδι: ένα τρίτο πρόσωπο (υπεράνω κάθε υποψίας!) ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα έως ότου εμφανιστεί μία από τις ακολουθίες ΚΚΚ, στην οποία περίπτωση κερδίζει ο A, ή ΓΚΚ, οπότε κερδίζει ο B. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο B.
(Κ=κορώνα, Γ=γράμματα.)

10. Βρείτε για ποιές τιμές του $x \in (0, \infty)$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+1/2+\cdots+1/n}.$$

11. Βρείτε τρεις αριθμούς $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να υπάρχουν ρητοί x, y, z, όχι όλοι 0, τέτοιοι ώστε

$$xa + yb + zc = 0,$$

αλλά να μην υπάρχουν ρητοί X, Y, Z, όχι όλοι 0, τέτοιοι ώστε

$$X\frac{1}{a} + Y\frac{1}{b} + Z\frac{1}{c} = 0.$$

12. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο περιέχεται μέσα σ' ένα άλλο (ενδεχομένως στραμμένο ως προς το πρώτο). Δείξτε ότι το άθροισμα των μηκών των ακμών του εσωτερικού παραλληλεπιπέδου είναι μικρότερο από αυτό του εξωτερικού.

13. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας με θετικά ρητά στοιχεία και αθροίσματα γραμμών και στηλών ίσα με 1, και $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι διανύσματα με θετικές συντεταγμένες, τέτοια ώστε $y = Ax$, τότε

$$y_1 \cdots y_n \geq x_1 \cdots x_n.$$

14. Ένα πολύγωνο έχει κορυφές στο $\mathbb{Q}^2$. Δείξτε ότι το εμβαδό του είναι ρητός.

15. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + x^3 + x^2 + 5$, $n \geq 4$, δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

16. Η f είναι μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής παντού.

17. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) - f(y) = f'(\frac{x+y}{2})(x - y).$$

Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού μέχρι 2.

18. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, με την ιδιότητα ότι για κάθε διάστημα $[c,d]$, υποδιάστημα του $[a,b]$, υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\lambda c + (1-\lambda)d) \le \lambda f(c) + (1-\lambda) f(d). \quad (1)$$

Δείξτε ότι η f είναι κυρτή, δηλ. ότι η (1) ισχύει για κάθε c, d, λ.

19. Δείξτε ότι ο αριθμός $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι ακέραιος αν $n > 1$.

20. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, ισχύει

$$f(x) \le \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

(α) Δείξτε ότι σε κάθε διάστημα $[a,b]$ το μέγιστο της f πιάνεται στο a ή στο b.
(β) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.

21. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1 περιέχεται σε δίσκο ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

22. Το πλάτος w του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το μικρότερο πλάτος λωρίδας που περιέχει το A. Αν το A είναι κυρτό και συμπαγές (συμπαγές = κλειστό και φραγμένο) και έχει πλάτος w δείξτε ότι σε κάθε διεύθυνση περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους w.

23. α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός ρητών σημείων (που έχουν δηλ. και τις δυο τους συντεταγμένες ρητές) της περιφερείας ενός κύκλου του καρτεσιανού επιπέδου είναι στοιχείο του συνόλου $\{0, 1, 2, \infty\}$.
β) Δώστε παραδείγματα τα οποία αποδεικνύουν ότι όλες οι παραπάνω περιπτώσεις είναι δυνατές.
γ) Αποδείξτε: Αν υποτεθεί ότι ο κύκλος έχει κέντρο με ρητές συντεταγμένες, τότε ο αριθμός των ρητών σημείων της περιφερείας του είναι 0 ή ∞ (και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατές).

24. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές ακεραίου μήκους και δύο γωνίες του είναι της μορφής $p\theta$ και $q\theta$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Δείξτε ότι $\cos\theta \in \mathbb{Q}$.

25. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2(3n-1)^n \ge (3n+1)^n.$$

26. Έστω $n \ge 1$ δοθέν και για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, δίδονται οι αριθμοί a_k, b_k, z_k, με z_k^2 διαφορετικά ανά δύο. Έστω

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \\ Q(z) &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k, \end{aligned}$$

τέτοια ώστε $A(z_k) = B(z_k^2) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Να βρεθούν τα b_k συναρτήσει των $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

27. Αν $0 < y < x < 1$ δείξτε ότι

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} \ge -\log y.$$

28. Κάθε θετικός ακέραιος είναι διαφορά δύο σχετικά πρώτων σύνθετων αριθμών.

29. Έστω $b > 0$ και $b^a \ge ab$ για κάθε $a > 0$. Δείξτε $b = e$.

30. Δείξτε οτι η εξίσωση $x = \tan x$, δεν έχει λύση στο $(0,\pi)$ και δώστε ένα κάτω φράγμα x_* για την μικρότερη θετική λύση αυτής της εξίσωσης, τέτοιο ώστε $0 \le x - x_* < \pi/6$.

31. Δείξτε οτι

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty,$$

όμως το $\int_0^\infty [(\sin x)/x]\, dx$ είναι καλά ορισμένο και πεπερασμένο.

32. Δείξτε οτι

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

33. Έστω $p : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μία οποιαδήποτε συνάρτηση με $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$ (μία τέτοια συνάρτηση p είναι μία *πυκνότητα πιθανότητας*). Δείξτε οτι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to [0,\infty)$, όπου $\mathbb{Q}$ = ρητοί, τέτοια ώστε

$$\sum_{q \in (a,b)} f(q) = \int_a^b p(x)\, dx$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

34. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και έστω οτι $f(f(a)) = a$ για κάποιον πραγματικό αριθμό a. Δείξτε οτι η f έχει σταθερό σημείο: υπάρχει $b \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(b) = b$.

35. Δίνονται συναρτήσεις $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με $u(0) = v(0) = 0$. Δείξτε οτι υπάρχει *ακριβώς μία* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, που να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$f(x,0) = u(x), \forall x \in \mathbb{Z},$$

$$f(0,y) = v(y), \forall y \in \mathbb{Z},$$

$$f(x+1,y+1) + f(x,y) = f(x+1,y) + f(x,y+1),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$.

36. Έστω

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| \le n, |y| \le n\},$$

και

$$S^O := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| < n, |y| < n\},$$

το *εσωτερικό* του. Δείξτε οτι, αν $f : S \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που έχει την ιδιότητα οτι, για κάθε $(x,y) \in S^O$,

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(f(x+1,y) + f(x,y+1) + \right.$$
$$\left. f(x-1,y) + f(x,y-1)\right),$$

τότε η f *δεν* μπορεί να έχει γνήσιο μέγιστο στο εσωτερικό το S δηλαδή, δεν υπάρχει $(x^*,y^*) \in S^O$ τέτοιο ώστε

$$f(x^*,y^*) > f(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in S.$$

37. Έστω φ η συνάρτηση του Euler, δηλαδή, για $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ ισούται με το πλήθος των ακεραίων στο $[1,n]$ που είναι σχετικά πρώτοι με τον n. Αποδεικνύεται οτι

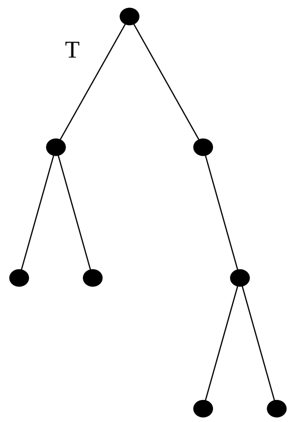
$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

όπου $n = p_1^{\kappa_1} \cdots p_m^{\kappa_m}$ η ανάλυση του n σε γινόμενο πρώτων. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση της φ (την οποία μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένη), ή όπως αλλοιώς θέλετε, βρείτε *όλες* τις λύσεις της εξίσωσης $\varphi(n) = n/3$.

38. Βρείτε τα πρώτα 2000 δεκαδικά ψηφία του αριθμού $(10^{2000} - 1)^{-1/2000}$.

39. Έστω T ένα πεπερασμένο δυαδικό δένδρο, με n άκρα και τέτοιο ώστε κάθε του άκρο να συνδέεται με την κορυφή του δένδρου. Έστω $d_1, \ldots, d_n \geq 1$ οι αποστάσεις των άκρων από την κορυφή του δένδρου. Δείξτε οτι

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-d_i} \leq 1.$$



Ηράκλειο, 7 Ιουνίου. 2000