ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011 ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να επιλυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\ 2x - y - 4z - 7w &= 0 \\ 3x + y - z - 3w &= 0 \\ 4x + 3y + 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

και να ευρεθεί μια βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων. Πόση είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του συστήματος;

ΘΕΜΑ 2ο. (2) (α) Αν a, b, $c \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= a \\ 2x + y + z &= b \\ x + 3y \qquad &= c \end{aligned}$$

έχει λύση ή λύσεις τότε και μόνον τότε όταν $a - b + c = 0$. Αν αυτό συμβαίνει, να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων ως σύμπλοκο ενός διανυσματικού υποχώρου του $\mathbb{R}^3$.
(β) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς την διατεταγμένη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$) τον

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι η f ισομορφισμός; Αν όχι, να ευρεθεί ο πυρήνας $\mathrm{Ker} f$ και μια βάση του.
(γ) Να ευρεθεί ο $\mathrm{Im} f$ και η διάστασή του. Πόση είναι η τάξη του πίνακα A; Είναι ο A αντιστρέψιμος;

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Αν

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

να υπολογιστεί ο A^{-1}, αν υπάρχει.

ΘΕΜΑ 4ο. (3) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να ευρεθούν οι ιδιόχωροι του A.
(γ) Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ (ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) της οποίας τρία διανύσματα να ανήκουν στο χώρο λύσεων της εξίσωσης $x - 2y + 2z - w = 0$.