Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ασκήσεις του προπτυχιακού μαθήματος

Ανάλυση Ι

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

Ηράκλειο, 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.
(α) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(β) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(γ) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
(δ) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
(ε) $1^2 + 3^2 + 5^2 \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

Απάντηση: Εφαρμόζουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.
(α) Για $n = 1$ είναι τετριμένη. Αν ισχύει για το $n-1$, τότε

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(β) Για $n = 1$ είναι τετριμένη. Αν ισχύει για το $n-1$, τότε

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(γ) Για $n = 1$ είναι τετριμένη. Αν ισχύει για το $n-1$, τότε

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

(δ) Για $n = 1$ είναι τετριμένη. Αν ισχύει για το $n-1$, τότε

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1) = n^2.$$

(ε) Για $n = 1$ είναι τετριμένη. Αν ισχύει για το $n-1$, τότε

$$1^2+3^2+5^2 \cdots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2 = \frac{(n-1)[4(n-1)^2-1]}{3} + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

2. Να αποδειχθεί οτι $2^n > n^3$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 10$.

Απάντηση: Για $n = 10$ έχουμε $2^{10} = 1024 > 10^3$. Έστω $n \geq 10$ με $2^n > n^3$. Τότε $2^{n+1} > 2n^3$ και

$$2 > \frac{1000}{729} = \left(\frac{10}{9}\right)^3 > \left(\frac{11}{10}\right)^3 > \cdots > \left(\frac{n+1}{n}\right)^3.$$

Συνεπώς, $2^{n+1} > 2n^3 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 n^3 = (n+1)^3$.

3. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ και $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, ..., n$, να αποδειχθεί οτι

$$(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Απάντηση: Για $n = 2$ έχουμε $(1-a_1)(1-a_2) = 1 + a_1a_2 - a_1 - a_2 > 1 - (a_1 + a_2)$. Αν η ανισότητα ισχύει για το $n-1$, τότε

$$(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n) > \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)(1-a_n)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k + a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k > 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

4. (Ανισότητα του Chebyshev) Αν $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ και $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_kb_k.$$

Απάντηση: Για $n = 1$ έχουμε $a_1b_1 = a_1b_1$. Έστω οτι ισχύει για το $n-1$, δηλαδή

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) \leq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k$$

για οποιαδήποτε $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1}$ και $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$. Έχουμε τώρα

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) + \sum_{k=1}^{n-1}(a_nb_k + a_kb_n) + a_nb_n$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) + \sum_{k=1}^{n-1}(a_kb_k + a_nb_n) + a_nb_n$$

$$= (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k + (n-1)a_nb_n + a_nb_n = n\sum_{k=1}^{n} a_kb_k,$$

γιατί αφού $a_k \geq a_n$ και $b_k \geq b_n$ έχουμε $a_k(b_n - b_k) \leq a_n(b_n - b_k)$, οπότε $a_kb_n + a_nb_k \leq a_kb_k + a_nb_n$.

5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες.
(α) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$.
(β) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Απάντηση: (α) Προφανώς

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(β) Όμοια

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

6. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$, να αποδειχθεί οτι

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

Απάντηση: Για $n = 1$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Έστω οτι

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k}\right) \geq (n-1)^2$$

για οποιαδήποτε $a_1 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0$. Τότε

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_k} + \frac{a_k}{a_n}\right) + 1$$

$$\geq (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = n^2,$$

γιατί $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x \geq 0$, αφού $(x-1)^2 \geq 0$.

7. Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $|x-1| - |x+2| = 1$.

Απάντηση: Αν $x < -2$, η εξίσωση γίνεται $-(x-1) + (x+2) = 1$, δηλαδή $3 = 1$, που είναι αδύνατο. Αν $-1 < x \leq 1$, η εξίσωση γίνεται $-(x-1) - (x+2) = 1$ ή ισοδύναμα $x = 1$. Τέλος, αν $x > 1$, η εξίσωση είναι η $(x-1) - (x+2) = 1$, δηλαδή $-3 = 1$. Συνεπώς, μοναδική λύση είναι το -1.

8. Να προσδιοριστεί ως διάστημα ή ένωση διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x+2| > 4|x-1|\}.$$

Απάντηση: Έχουμε $x \in A$ ακριβώς τότε όταν $-|3x+2| < 4x - 4 < |3x+2|$. Αυτό σημαίνει οτι $A = A_1 \cap A_2$, όπου

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -|3x+2| < 4x - 4\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 4 < |3x + 2|\}.$$

Όμως, $x \in \mathbb{R} \setminus A_1$ τότε και μόνο τότε όταν $|3x+2| \leq 4 - 4x$ ή ισοδύναμα $4x - 4 \leq 3x + 2 \leq 4 - 4x$, δηλαδή $x \leq 6$ και $x \leq \frac{2}{7}$. Συνεπώς, $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{7}\}$. Όμοια, $x \in \mathbb{R} \setminus A_2$ τότε και μόνο τότε όταν $|3x+2| \leq 4x-4$ ή ισοδύναμα $4-4x \leq 3x+2 \leq 4x-4$, δηλαδή $x \geq 6$ και $x \geq \frac{2}{7}$. Συνεπώς, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 6\}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι $A = A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{7} < x < 6\}$.

9. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x^2 = 3$.

Απάντηση: Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο. Έστω οτι υπάρχει $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ με p, $q \in \mathbb{N}$, μκδ$(p, q) = 1$, ώστε $x^2 = 3$. Τότε $p^2 = 3q^2$. Συνεπώς το 3 διαιρεί το p^2, άρα και το p. Υπάρχει λοιπόν $k \in \mathbb{N}$ ώστε $p = 3k$, οπότε $9k^2 = 3q^2$. Από αυτό προκύπτει οτι το 3 διαιρεί το q και κατά συνέπεια μκδ$(p, q) \geq 3$, αντίφαση.

10. Αν $n \in \mathbb{N}$ και δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m^2 = n$, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x^2 = n$.

Απάντηση: Αν υπάρχουν p, $q \in \mathbb{N}$ με μκδ$(p, q) = 1$ ώστε $p^2 = nq^2$, τότε ο q διαιρεί τον p^2 και αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους αναγκαστικά $q = 1$.

11. Αν τα σύνολα A, $B \subset \mathbb{R}$ είναι μη-κενά και φραγμένα και θέσουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}$$

να αποδειχθεί οτι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Απάντηση: Προφανώς το $A + B$ είναι μη-κενό, φραγμένο και $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < a \leq \sup A, \quad \sup B - \frac{\epsilon}{2} < b \leq \sup B.$$

Συνεπώς, $\sup A + \sup B - \epsilon < a + b \leq \sup A + \sup B$. Αυτό δείχνει οτι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Η ισότητα $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ αποδεικνύεται ανάλογα.

12. Αν τα σύνολα A, $B \subset (0, +\infty)$ είναι μη-κενά και φραγμένα και θέσουμε

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, \quad b \in B\}$$

να αποδειχθεί οτι $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ και $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

Απάντηση: Προφανώς το $A \cdot B$ είναι μη-κενό, φραγμένο και $\sup(A \cdot B) \leq \sup A \cdot \sup B$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $0 < \epsilon < 1$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε

$$0 < \sqrt{\epsilon} \sup A < a \leq \sup A, \quad 0 < \sqrt{\epsilon} \sup B < b \leq \sup B.$$

Άρα $0 < \epsilon \sup A \cdot \sup B < ab \leq \sup A \cdot \sup B$. Αυτό δείχνει οτι $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$. Η ισότητα $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ αποδεικνύεται ανάλογα.

13. Εστω $A \subset \mathbb{R}$ ένα μή-κενό σύνολο. Αν υπάρχει $s \in A$ τέτοιο ώστε $a \leq s$ για κάθε $a \in A$, να αποδειχθεί οτι $s = \sup A$.

Απάντηση: Προφανώς $s \leq \sup A \leq s$, αφού $s \in A$.

14. Να ευρεθούν το supremum και το infimum, αν υπάρχουν, των συνόλων:

$$(i)\Big\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\Big\}, \quad (ii)\Big\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, \quad x > \frac{1}{2}\Big\}.$$

Απάντηση: (i) Προφανώς $\dfrac{|x|}{1+|x|} \geq 0$ και 0 ανήκει στο σύνολο. Κατά συνέπεια το 0 είναι το infimum. Είναι επίσης προφανές οτι το 1 είναι ένα άνω φράγμα. Επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\dfrac{n}{n+1} > 1 - \epsilon$. Πράγματι από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\epsilon > 1-\epsilon$, οπότε $n > (n+1)(1-\epsilon)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι $\sup\big\{\dfrac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\big\} = 1$.
(ii) Το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο γιατί για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n + \dfrac{1}{n} > n > M$ και φυσικά $n > \dfrac{1}{2}$. Είναι όμως κάτω φραγμένο από το 2, γιατί $(x-1)^2 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x^2 + 1 \geq 2x$ και η ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $x = 1$. Άρα $\inf\big\{x + \dfrac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, \quad x > \dfrac{1}{2}\big\} = 2$.

15. Να αποδειχθεί οτι $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Απάντηση: Αν υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$, τότε $r > 0$ και

$$3 = (r - \sqrt{2})^2 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2.$$

Συνεπώς $\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 1}{2r} \in \mathbb{Q}$, άτοπο. Αν πάλι $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{p}{q}$ με p, $q \in \mathbb{N}$, μκδ$(p, q) = 1$, τότε το 3 διαιρεί το p και το 2 διαιρεί το q. Υπάρχουν λοιπόν n, $m \in \mathbb{N}$ ώστε $p = 3n$ και $q = 2m$. Αντικαθιστώντας, προκύπτει οτι $3n^2 = 2m^2$ και συνεπώς το 3 διαιρεί το m και το 2 διαιρεί το n. Άρα το 6 είναι κοινός διαιρέτης των p, q, αντίφαση.

16. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1 > 0$,..., $x_n > 0$ με $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, να αποδειχθεί οτι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ με την ισότητα να ισχύει ακριβώς τότε όταν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Απάντηση: Το συμπέρασμα είναι τετριμένο για $n = 1$ και προφανές για $n = 2$, αφού

$$0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = x_1 + x_2 - 2.$$

Προχωρούμε με επαγωγή υποθέτοντας οτι το συμπέρασμα ισχύει για το $n-1$. Έστω οτι δίνονται $x_1 > 0$,..., $x_n > 0$ με $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Αν $x_1 = \cdots = x_n = 1$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Υποθέτουμε λοιπόν οτι τουλάχιστον ένας είναι < 1, οπότε συνακόλουθα υπάρχει και τουλάχιστον ένας > 1. Αλλάζοντας ενδεχομένως την αρίθμηση, μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν οτι $x_1 < 1 < x_n$. Αφού $(x_1 x_n) x_2 \cdots x_{n-1} = 1$, από την επαγωγική υπόθεση $x_1 x_n + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq n - 1$ ή ισοδύναμα

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \geq n - 1 - x_1 x_n + x_1 + x_n = n + (1 - x_1)(x_n - 1) > n.$$

Όπως δείχνουν τα προηγούμενα η ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

17. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου) Αν $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ και $x_1 > 0$,..., $x_n > 0$ να αποδειχθεί οτι

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

με τις ισότητες να ισχύουν ακριβώς τότε όταν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 16.)

Απάντηση: Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την πρώτη εφαρμοζόμενη για τους $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$. Η πρώτη ανισότητα είναι προφανής για $n = 1$ και $n = 2$, όπως επίσης όταν $x_1 = \cdots = x_n$. Θέτουμε $s = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ και εφαρμόζουμε το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης 16 για τους $y_1 = x_1/s$,..., $y_n = x_n/s$. Η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε όταν $y_1 = \cdots = y_n = 1$, δηλαδή $x_1 = \cdots = x_n = s$.

18. Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Αφού $1 \in \mathbb{Q}$, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αποκλείεται να είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$.

19. Εστω $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$, που περιέχει το $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq \mathbb{Q}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ δεν είναι πλήρες ως διατεταγμένο σώμα.

Απάντηση: (α) Προφανώς $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ και το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, όπως και ο αντίθετος ενός στοιχείου του ανήκουν πάλι στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Τέλος, αν a, $b \in \mathbb{Q}$ και $a + b\sqrt{2} \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

(β) Αν υπάρχουν a, $b \in \mathbb{Q}$ ώστε $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, τότε $ab \neq 0$ και

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$$

που είναι αντίφαση.
(γ) Προφανώς, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ και όλες οι σχέσεις υποσυνόλου είναι γνήσιες, αφού $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Το υποσύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) : x > 0, x^2 < 3\}$$

του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι μη-κενό, άνω φραγμένο, π.χ. από το 2, αλλά δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα μέσα στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

20. Εστω K ένα γνήσιο υποσώμα του $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{Q} \subset K$ και το K δεν είναι πλήρες ως διατεταγμένο σώμα.

Απάντηση: Αφού το K υποτίθεται υποσώμα του $\mathbb{R}$, πρέπει $1 \in K$, οπότε $\mathbb{Z} \subset K$, γιατί το K είναι προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$. Επειδή όμως είναι πολλαπλασιαστική υποομάδα του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, προκύπτει οτι επιπλέον $\mathbb{Q} \subset K$. Αφού $K \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \notin K$. Το σύνολο $A = \{y \in K : y < x\}$ δεν είναι κενό, γιατί περιέχει ρητούς αριθμούς, και είναι άνω φραγμένο στο K, γιατί υπάρχει $n \in \mathbb{N} \subset K$ με $x < n$. Αν υπάρχει το $s = \sup A \in K$, τότε $s < x$ και υπάρχει $r \in \mathbb{Q} \subset K$ με $s < r < x$, άρα $r \in A$. Αυτό είναι αντίφαση.

21. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν m, $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{k} < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\{0, \dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}, ..., \dfrac{k-1}{k}, 1\}$ του διαστήματος $[0, 1]$. Επειδή $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί $ma - [ma]$, $m \in \mathbb{N}$, είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.)

Απάντηση: Από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ με σύνολο διαδοχικών κορυφών

$$\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\}$$

σε k διαδοχικά διαστήματα μήκους $1/k$. Συμβολίζουμε με $[x]$ ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x. Επειδή ο a είναι άρρητος, τα σημεία $ma - [ma] \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$, είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο διάστημα της διαμέρισης που περιέχει τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία. Δηλαδή, υπάρχουν $0 < m_2 < m_1$ ώστε

$$0 < |(m_1 a - [m_1 a]) - (m_2 a - [m_2 a])| \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Αν τώρα θέσουμε $n = m_1 - m_2$ και $m = [m_1 a] - [m_2 a]$, έχουμε $0 < |na - m| < \epsilon$.

22. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\phi(t + s) = \phi(t) + \phi(s), \quad \phi(ts) = \phi(s)\phi(s)$$

για κάθε t, $s \in \mathbb{R}$. Αν η ϕ δεν είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση, να αποδειχθεί οτι $\phi(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Προφανώς $\phi(0) = 0$. Αν υπάρχει $t \neq 0$ τέτοιο ώστε $\phi(t) = 0$, τότε

$$\phi(s) = \phi(t)\phi(\frac{s}{t}) = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Αν λοιπόν η ϕ δεν είναι η σταθερή μηδενική απεικόνιση, τότε $\phi(t) \neq 0$ για κάθε $t \neq 0$. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $\phi(1) = 1$, αφού $\phi(1) = \phi(1)\phi(1)$ και επαγωγικά $\phi(p) = p$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Αν $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, τότε

$$p = \phi(p) = q\phi(\frac{p}{q}).$$

Δηλαδή, $\phi(r) = r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $t > 0$ έχουμε

$$\phi(t) = (\phi(\sqrt{t}))^2 > 0$$

και η ϕ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί αν $s < t$, τότε $\phi(t) - \phi(s) = \phi(t - s) > 0$.

Έστω τώρα $t \in \mathbb{R}$. Αν $\phi(t) < t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) < r < t$, οπότε $r = \phi(r) < \phi(t)$, αντίφαση. Αν $\phi(t) > t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) > r > t$, οπότε $r = \phi(r) > \phi(t)$, πάλι αντίφαση. Κατά συνέπεια, $\phi(t) = t$.

23. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $\phi(t + s) = \phi(t) + \phi(s)$ για κάθε t, $s \in \mathbb{R}$.
(β) $\phi(1) = 1$.
(γ) $\phi(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.
Να αποδειχθεί οτι $\phi(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Όπως στην προηγούμενη άσκηση 22 έχουμε $\phi(0) = 0$ και επαγωγικά $\phi(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αφού $\phi(1) = 1$. Αν $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, τότε πάλι έχουμε

$$p = \phi(p) = q\phi(\frac{p}{q}),$$

δηλαδή, $\phi(r) = r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Επιπλέον, αν $s < t$, τότε $\phi(t) - \phi(s) = \phi(t - s) > 0$. Έστω τώρα $t \in \mathbb{R}$. Ακριβώς όπως στην άσκηση 22, αν $\phi(t) < t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) < r < t$, οπότε $r = \phi(r) < \phi(t)$, αντίφαση. Αν $\phi(t) > t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) > r > t$, οπότε $r = \phi(r) > \phi(t)$, πάλι αντίφαση. Κατά συνέπεια, $\phi(t) = t$.

24. Εστω $\mathbb{Q}(X) = \{\frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{Q}[X], g \neq 0\}$. Το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται σώμα με τις συνηθισμένες πράξεις και λέγεται το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{Q}$. Εστω P το υποσύνολο του $\mathbb{Q}(X)$ που αποτελείται από όλες τις ρητές συναρτήσεις

$$\frac{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0} \quad \text{με} \quad a_n b_m > 0.$$

Αν r, $s \in \mathbb{Q}(X)$, ορίζουμε $r > s$ όταν $r - s \in P$. Το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται με αυτόν τον τρόπο διατεταγμένο σώμα. Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(X)$ δεν έχει την αρχιμήδεια ιδιότητα.

Απάντηση: Αν $r(X) = X$, τότε $r > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γιατί $X - n > 0$, αφού $1 > 0$ το $\mathbb{Q}$.

Κεφάλαιο 2

Τοπολογία της πραγματικής ευθείας

1. Εστω $p \in \mathbb{N}$ με $p > 1$.
(α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{p^n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
(β) Εστω $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Υπάρχει ένας μέγιστος $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιος ώστε $n_0 \leq x$. Επαγωγικά, αν έχουν οριστεί οι n_0, n_1,..., $n_{k-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, υπάρχει ένας μέγιστος $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{p^{k-1}} + \frac{n_k}{p^k} \leq x.$$

Να αποδειχθεί οτι

$$x = \sup\left\{ n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Απάντηση: (α) Αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{p^n} \geq \epsilon$ ή ισοδύναμα $p^n \leq \dfrac{1}{\epsilon}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ υπάρχει το $s = \sup\{p^n : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Αφού $p > 1$, έχουμε $\dfrac{s}{p} < s$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{s}{p} < p^n \leq s$. Τότε όμως $p^{n+1} > s$, που είναι αντίφαση.
(β) Από την κατασκευή έχουμε

$$n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} \leq x < n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{1 + n_k}{p^k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Άρα,

$$0 \leq x - \left(n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} \right) < \frac{1}{p^k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Από το (α), για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{p^k} < \epsilon$ για κάθε $k \geq k_0$ και συνεπώς

$$0 \leq x - \left(n_0 + \frac{n_1}{p} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} \right) < \epsilon$$

για κάθε $k \geq k_0$.

2. Είναι το σύνολο των άρρητων πραγματικών αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο;

Απάντηση: Όχι, γιατί αν ήταν τότε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών θα ήταν αριθμήσιμο ως ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων.

3. Ενας $x \in \mathbb{R}$ λέγεται (πραγματικός) αλγεβρικός αριθμός αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και a_0, a_1,..., $a_n \in \mathbb{Z}$ με $a_n \neq 0$ ώστε $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.
(Υπόδειξη: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων $(n+2)$-άδων $(n, a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ με $n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = k$ είναι πεπερασμένο.)

Απάντηση: Το σύνολο A_k των (πραγματικών) αλγεβρικών αριθμών που είναι ρίζες των πολυωνυμικών εξισώσεων $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = 0$, όπου $(n, a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ με $n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = k$ και $a_n \neq 0$ είναι πεπερασμένο για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αφού μία τέτοια εξίσωση έχει το πολύ n (πραγματικές) ρίζες. Επειδή το σύνολο όλων των (πραγματικών) αλγεβρικών αριθμών είναι το $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε μη-κενό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ισχύει αυτό για κλειστά σύνολα;

Απάντηση: Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό διάστημα, που είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. Αντίθετα, το σύνολο $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι κλειστό και είναι αριθμήσιμο.

5. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτά σύνολα;
(α) $\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (γ) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (ε) $(0,1) \cup \{2\}$.

Απάντηση: Ανοιχτά σύνολα είναι τα $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι κλειστά σύνολα;
(α) $\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (γ) $\mathbb{Z}$, (δ) $[0,1] \cup \{2\}$, (ε) $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$.

Απάντηση: Κλειστά σύνολα είναι τα $\mathbb{Z}$, $[0,1] \cup \{2\}$ και $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$.

7. Να αποδειχθεί οτι για κάθε A, $B \subset \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Απάντηση: Προφανώς $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A \cup B}$. Αν $x \notin \overline{B}$, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $B \cap (x - \epsilon_0, x + \epsilon_0) = \varnothing$. Όμως τότε

$$A \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) = (A \cup B) \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \varnothing$$

για κάθε $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Αυτό σημαίνει οτι $x \in \overline{A}$.

8. Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$. Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι η ισότητα δεν ισχύει πάντα, όταν η οικογένεια δεν είναι πεπερασμένη.

Απάντηση: Αν $A_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, τότε

$$\bigcup_{n=3}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=3}^{\infty} A_n = (0,1) \subset [0,1] = \overline{\bigcup_{n=3}^{\infty} A_n}.$$

9. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει μη-κενό, γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό.

Απάντηση: Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο A. Επειδή $A \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$. Αφού $A \neq \varnothing$, έχουμε οτι $A \cap (-\infty, x_0) \neq \varnothing$ ή $A \cap (x_0, +\infty) \neq \varnothing$ (ή και τα δύο). Ας πούμε οτι ισχύει το πρώτο (η απόδειξη είναι ανάλογη όταν ισχύει το δεύτερο). Το σύνολο $T = A \cap (-\infty, x_0)$ είναι τότε άνω φραγμένο από το x_0 και συνεπώς υπάρχει το $s = \sup T$. Επειδή το A υποτίθεται κλειστό σύνολο, $s \in \overline{T} \subset \overline{A} = A$. Άρα $s < x_0$. Επειδή το A υποτίθεται ανοιχτό, υπάρχει $0 < \epsilon < x_0 - s$ ώστε $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset A$. Ειδικά, $[s, s + \epsilon) \subset T$, που αντιφάσκει με το γεγονός οτι $s = \sup T$.

10. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης A' του A είναι κλειστό σύνολο.

Απάντηση: Αρκεί να δείξουμε οτι $(A')' \subset A'$. Έστω $x \in (A')'$ και $\epsilon > 0$. Τότε $A' \cap \big((x-\epsilon, x+\epsilon) \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing$. Υπάρχει λοιπόν $y \in A'$ με $0 < |x-y| < \epsilon$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε $0 < \delta < \min\{|x-y|, \epsilon - |x-y|\}$. Τότε $(y-\delta, y+\delta) \subset (x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $A \cap \big((y-\delta, y+\delta) \setminus \{y\}\big) \neq \varnothing$, επειδή $y \in A'$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in A$ με $0 < |y-a| < \delta$, οπότε $a \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ και

$$|x-a| \geq |x-y| - |y-a| > |x-y| - \delta > 0.$$

Δηλαδή, $a \in A \cap \big((x-\epsilon, x+\epsilon) \setminus \{x\}\big)$. Αυτό δείχνει οτι $A \cap \big((x-\epsilon, x+\epsilon) \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing$ για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $x \in A'$.

11. Ποιό είναι το σύνολο $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$; Είναι ανοιχτό σύνολο; Είναι κλειστό σύνολο;

Απάντηση: Προφανώς $[0,1] \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. Αντίστροφα, αν $-\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \geq \sup\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$ και $x \leq \inf\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$. Άρα $[0,1] = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$, που είναι κλειστό σύνολο και δεν είναι ανοιχτό.

12. Να ευρεθούν όλα τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου

$$\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} : m,n \in \mathbb{N}, m \geq n\right\}.$$

Απάντηση: Από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$ για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε για κάθε m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Συνεπώς, τα 0, $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι όλα σημεία συσσώρευσης του συνόλου. Θα δείξουμε οτι δεν υπάρχουν άλλα σημεία συσσώρευσης. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$, $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| > \delta$ και $|x-\frac{1}{n}| > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$ υπάρχει $N \in \mathbb{R}$ με $\frac{2}{N} < \frac{\delta}{2}$. Από την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε τώρα οτι αν

$$|x-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}| < \frac{\delta}{2}$$

τότε

$$|x-\frac{1}{n}|-\frac{1}{m} \leq |x-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}| < \frac{\delta}{2}$$

οπότε

$$\frac{1}{m} > |x-\frac{1}{n}|-\frac{\delta}{2} > \delta-\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

δηλαδή $1 \leq n \leq m < \frac{2}{\delta}$. Αυτό δείχνει οτι το

$$\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} : m,n \in \mathbb{N}, m \geq n\right\} \cap ((x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}) \setminus \{x\})$$

είναι πεπερασμένο σύνολο και συνεπώς το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου.

13. Έστω $(G,+)$ μία υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R},+)$ του συνόλου των πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in G$ με $0 < x < \epsilon$. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο G είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Έστω $y \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει $x \in G$ με $0 < x < \epsilon$. Αν $k = \left[\frac{y}{x}\right]$, τότε $kx \leq y < kx + x$ οπότε $0 \leq y - kx < x < \epsilon$, δηλαδή $kx \in (y-\epsilon, y]$. Επειδή το G είναι υποομάδα της $(\mathbb{R},+)$, έχουμε $kx \in G$. Συνεπώς, $G \cap (y-\epsilon, y] \neq \varnothing$.

14. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών

$$D = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Προφανώς το D είναι προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$. Επιπλέον, από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Εφαρμόζεται λοιπόν η προηγούμενη άσκηση 13.

15. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 21 του 1ου φύλλου.)

Απάντηση: Το σύνολο $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι προφανώς προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί την υπόθεση της άσκησης 13, όπως αποδείχθηκε στην άσκηση 21 του 1ου φύλλου.

16. Να αποδειχθεί οτι το ανοιχτό κάλυμα $\left\{(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ του ανοιχτού διαστήματος $(0,1)$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα του $(0,1)$.

Απάντηση: Αν υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμα, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$(0,1) = (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup \cdots \cup (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}) = (\frac{1}{N+2}, 1),$$

που είναι άτοπο.

17. Να αποδειχθεί οτι το ανοιχτό κάλυμα $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ του $[1, +\infty)$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα του $[1, +\infty)$.

Απάντηση: Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ περιέχεται σε ένα της μορφής $\{(n-1, n+1) : 1 \leq n \leq N\}$. Όμως αυτό δεν καλύπτει το $[1, +\infty)$, αφού $\bigcup_{n=1}^{N} (n-1, n+1) = (0, N+1)$.

18. Αν $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, δηλαδή $C_{n+1} \subset C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$.

Απάντηση: Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας οτι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$. Τότε

$$C_1 \subset \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus C_n)$$

και τα $\mathbb{R} \setminus C_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοιχτά σύνολα, ως συμπληρώματα συμπαγών, άρα κλειστών, συνόλων. Αφού λοιπόν το $\{\mathbb{R} \setminus C_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του C_1 και αυτό είναι συμπαγές, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\varnothing \neq C_N \subset C_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} (\mathbb{R} \setminus C_n) = \mathbb{R} \setminus C_N,$$

που είναι άτοπο.

19. Αν $X, Y \subset \mathbb{R}$ είναι δύο συμπαγή σύνολα με $X \cap Y = \varnothing$, να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $U, V \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $X \subset U$, $Y \subset V$ και $U \cap V = \varnothing$.

Απάντηση: Αν $X = \varnothing$ ή $Y = \varnothing$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Υποθέτουμε λοιπόν οτι $X \neq \varnothing$ και $Y \neq \varnothing$. Έστω $x \in X$. Για κάθε $y \in Y$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V_y, W_y με $y \in V_y$, $x \in W_y$ ώστε $V_y \cap W_y = \varnothing$. Για παράδειγμα, αφού $X \cap Y = \varnothing$, έχουμε $\epsilon = |x-y| > 0$ και μπορούμε να πάρουμε $V_y = (y - \frac{\epsilon}{3}, y + \frac{\epsilon}{3})$ και $W_y = (x - \frac{\epsilon}{3}, x + \frac{\epsilon}{3})$. Το $\{V_y : y \in Y\}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του Y, που υποτίθεται συμπαγές. Άρα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και y_1,..., $y_n \in Y$ ώστε $Y \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Θέτουμε $V_x = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ και $U_x = W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_n}$, οπότε $U_x \cap V_x = \varnothing$. Το $\{U_x : x \in X\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμα του X, που υποτίθεται επίσης συμπαγές. Υπάρχουν λοιπόν $m \in \mathbb{N}$ και x_1,..., $x_m \in X$ ώστε $X \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. Αρκεί τώρα να θέσουμε $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$ και $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$.

20. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα μη-κενό, συμπαγές σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F \subset X$ τέτοιο ώστε $\min\{|x-y| : y \in F\} < \epsilon$ για κάθε $x \in X$.

Απάντηση: Το $\{(x-\epsilon, x+\epsilon) : x \in X\}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του X. Αφού το X υποτίθεται συμπαγές, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και x_1,..., $x_n \in X$ έτσι ώστε $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - \epsilon, x_k + \epsilon)$. Αρκεί τώρα να πάρουμε $F = \{x_1, ..., x_n\}$.

21. (Λήμμα του Lebesgue) Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα συμπαγές σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ανοιχτό κάλυμα $\{A_i : i \in I\}$ του X υπάρχει ένας $\rho > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i \in I$ με $(x-\rho, x+\rho) \subset A_i$.

Απάντηση: Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i(x) \in I$ ώστε $x \in A_{i(x)}$ και υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A_{i(x)}$. Αφού το X είναι συμπαγές και το $\{(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) : x \in X\}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του X, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και x_1, x_2,..., $x_k \in X$ ώστε

$$X \subset (x_1 - \frac{1}{2}\delta_{x_1}, x_1 + \frac{1}{2}\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_k - \frac{1}{2}\delta_{x_k}, x_k + \frac{1}{2}\delta_{x_k}).$$

Θέτουμε $\rho = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $1 \leq j \leq k$ με $|x_j - x| < \frac{1}{2}\delta_{x_j}$. Αν τώρα $y \in (x-\rho, x+\rho)$, έχουμε

$$|x_j - y| \leq |x_j - x| + |x - y| < \frac{1}{2}\delta_{x_j} + \rho \leq \delta_{x_j},$$

οπότε $y \in A_{i(x_j)}$. Αυτό δείχνει οτι $(x-\rho, x+\rho) \subset A_{i(x_j)}$.

Κεφάλαιο 3

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

1. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{[na]}{n} = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Αφού $[na] \leq na < [na]+1$, έχουμε $0 \leq a - \frac{[na]}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από όπου το συμπέρασμα.

2. Αν $k \in \mathbb{N}$ και a_0,..., $a_k \in \mathbb{R}$ με $a_k > 0$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0} = 1.$$

Απάντηση: Πρώτα παρατηρούμε οτι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0 - 1 = a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_k} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{a_0 - 1}{a_k} \cdot \frac{1}{n^k}\right) > 0$$

για κάθε $n \geq n_0$. Υπάρχουν λοιπόν $\theta_n > 0$ τέτοια ώστε

$$\sqrt[n]{a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0} = (1+\theta_n)^{k+1}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, $a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 = (1+\theta_n)^{n(k+1)}$, οπότε

$$\sqrt[k+1]{a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0} = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n$$

από την ανισότητα του Bernoulli και άρα

$$0 < \theta_n < \frac{1}{n} \sqrt[k+1]{a_k n^k + \cdots a_1 n + a_0} = \sqrt[k+1]{\frac{a_k}{n} + \cdots \frac{a_1}{n^k} + \frac{a_0}{n^{k+1}}}.$$

Είναι τώρα φανερό οτι $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0$, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

3. Εστω $a > 0$, $b > 0$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n).$$

Απάντηση: Υπολογίζουμε οτι

$$\sqrt{(n+a)(n+b)}-n=\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=\frac{a+b-\frac{ab}{n}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, από όπου προκύπτει οτι

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)=\frac{a+b}{2}.$$

4. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα

$$(i)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k\right),\quad (ii)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{n}{2}\right).$$

Απάντηση: (i) Υπολογίζουμε οτι

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}=-1.$$

(ii) Εφαρμόζοντας την άσκηση 1(α) του 1ου φύλλου υπολογίζουμε οτι

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+2}=-\frac{1}{2}.$$

5. Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}}=1$.

Απάντηση: Έχουμε $1<\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}}<1+\frac{1}{2n}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1$, από όπου το συμπέρασμα προκύπτει.

Εναλλακτικά, υπάρχουν $\theta_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}}=1+\theta_n$. Από την ανισότητα του Bernoulli,

$$1+\frac{1}{2n}=(1+\theta_n)^n\geq 1+n\theta_n>n\theta_n$$

οπότε $0<\theta_n<\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$ και συνεπώς $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=0$.

6. Εστω $a>0$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n^2}\right)^n$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Bernoulli.)
Απάντηση: Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{a}{n_0^2}<1$ και συνεπώς $-\frac{a}{n^2}>-1$ για κάθε $n\geq n_0$. Από την ανισότητα του Bernoulli προκύπτει

$$1>\left(1-\frac{a}{n^2}\right)^n\geq 1-n\cdot\frac{a}{n^2}=1-\frac{a}{n}$$

και συνεπώς

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{a}{n^2}\right)^n \leq \frac{a}{n}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Αφού $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$, συμπεραίνουμε οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a}{n^2}\right)^n = 1$.

7. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$$

και ποιό είναι κατά περίπτωση;

Απάντηση: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|1-x^2| \leq 1+x^2$ και η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε όταν $x = 0$. Αν $x = 0$, τότε προφανώς το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 1. Αν $x \neq 0$, τότε $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| < 1$ και συνεπώς

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n = 0.$$

8. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Απάντηση: Έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

και $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

9. Να αποδειχθεί οτι η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με όρους

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό μεταξύ του 1 και του 2.

Απάντηση: Η ακολουθία είναι προφανώς γνήσια αύξουσα με $1 < a_2$. Επιπλέον,

$$a_n < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια, υπάρχει το

$$s = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

και προφανώς $1 < s \leq 2$. Μάλιστα, $1 < s < 2$, γιατί όπως προηγουμένως έχουμε

$$a_n < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{5}{4} + \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right) < \frac{5}{4} + \frac{1}{18} = \frac{47}{36} < \frac{3}{2}$$

για κάθε $n > 2$, οπότε $1 < s \leq \dfrac{3}{2}$.

10. Έστω $\lambda > 0$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ορίζεται επαγωγικά με $a_1 > \lambda$ και

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\lambda^2}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$.

Απάντηση: Προφανώς $a_n > 0$ και μάλιστα

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\lambda^2}{a_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{\lambda^2}{a_{n-1}}} = \lambda$$

για κάθε $n > 1$. Επίσης,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\lambda^2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

Αυτά δείχνουν οτι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα. Άρα υπάρχει το $s = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \lambda$ το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{\lambda^2}{s}\right)$$

που είναι ισοδύναμη με $s^2 = \lambda^2$. Συνεπώς, $s = \lambda$.

11. Αν $a_1 = \dfrac{3}{2}$ και $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και να υπολογιστεί το όριο της.
(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι $\dfrac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

Απάντηση: Επαγωγικά, αν $\dfrac{3}{2} \leq a_n \leq 2$, τότε

$$\frac{3}{2} < \sqrt{\frac{5}{2}} \leq a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \leq \sqrt{6-2} = 2.$$

Για τη μονοτονία, βλέπουμε οτι

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3a_n - 2 - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n - 2) \geq 0.$$

Αφού λοιπόν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και αύξουσα, υπάρχει το $s = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, για το οποίο $s^2 - 3s + 2 = 0$ και $\frac{3}{2} \leq s \leq 2$. Συνεπώς, $s = 2$.

12. Έστω οτι $a_1 = 1$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ορίζεται επαγωγικά με

$$a_{n+1} = \frac{4a_n + 2}{a_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να αποδειχθεί οτι $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

Απάντηση: Επαγωγικά, αν $0 < a_n < 2$, τότε $0 < 2a_n + 1 < a_n + 3$ και συνεπώς

$$0 < a_{n+1} = 2 \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n + 3} < 2.$$

Για τη μονοτονία βλέπουμε οτι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 3} = \frac{(a_n + 1)(2 - a_n)}{a_n + 3} > 0.$$

Αφού λοιπόν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και γνήσια αύξουσα, υπάρχει το $s = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $s = \frac{4s + 2}{s + 3}$ και $0 < s \leq 2$. Άρα $s = 2$.

13. Έστω $s > 0$ και $a_1 > 0$. Να εξεταστεί αν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται επαγωγικά με $a_{n+1} = \sqrt{s + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, και σε περίπτωση που συγκλίνει να υπολογιστεί το όριο της.

Απάντηση: Προφανώς $a_n > 0$ και $a_{n+1}^2 - a_n^2 = s + a_n - a_n^2 = -(a_n - \rho_1)(a_n - \rho_2)$, όπου

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4s}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4s}}{2},$$

οπότε $\rho_1 < 0 < a_1$. Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις.

Αν $\rho_1 < 0 < a_1 < \rho_2$, τότε

$$a_2^2 - a_1^2 = -(a_1 - \rho_1)(a_1 - \rho_2) > 0$$

και $a_2 = \sqrt{s + a_1} < \sqrt{s + \rho_2} = \sqrt{\rho_2^2} = \rho_2$. Επαγωγικά, αν $0 < a_n < \rho_2$, τότε όμοια

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - \rho_1)(a_n - \rho_2) > 0$$

και $a_{n+1} = \sqrt{s + a_n} < \sqrt{s + \rho_2} = \sqrt{\rho_2^2} = \rho_2$. Αυτά δείχνουν οτι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και γνήσια αύξουσα. Υπάρχει λοιπόν το $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \rho_2$ για το οποίο $x = \sqrt{s + x}$. Κατά συνέπεια, $x = \rho_2$.

Αν $a_1 > \rho_2$, τότε όπως στην προηγούμενη περίπτωση $a_2^2 - a_1^2 < 0$ και $a_2 > \rho_2$. Επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε οτι τώρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και γνήσια φθίνουσα με $a_n > \rho_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει το

$x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \rho_2$ για το οποίο $x = \sqrt{s+x}$. Κατά συνέπεια, πάλι $x = \rho_2$.

Τελος, αν $a_1 = \rho_2$, τότε προφανώς $a_n = \rho_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι σε κάθε περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} a_n = \rho_2$.

14. Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

Απάντηση: Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Για $n > n_0$ έχουμε

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| =\leq \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k - a|$$

$$< \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2} < \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Από την άλλη μεριά, υπάρχει $N > n_0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0} - n_0 a}{n}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε $n \geq N$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n_0} - n_0 a}{n} - a\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq N$.

15. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ για κάθε $a > 0$.

Απάντηση: Θέτουμε $n_0 = [a]$, οπότε $n_0 \leq a < n_0 + 1$ και για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n_0\cdot(n_0+1)\cdots n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0}.$$

Όμως $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} = 0$, γιατί $0 < \frac{a}{n_0+1} < 1$.

16. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) \to +\infty.$$

Απάντηση: Για κάθε $x > 0$ έχουμε $x + \frac{1}{x} \geq 2$ και συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) \geq 2n.$$

17. Να αποδειχθεί οτι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Απάντηση: Έστω $M > 0$ και $n_0 = [M]$. Για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$n! = n_0! \cdot (n_0 + 1) \cdots n > n_0! \cdot M^{n-n_0} = \frac{n_0!}{M^{n_0}} \cdot M^n.$$

Συνεπώς, $\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{\frac{n_0!}{M^{n_0}}} \cdot M$. Επειδή όμως $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n_0!}{M^{n_0}}} = 1$, υπάρχει $N > n_0$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{\frac{n_0!}{M^{n_0}}} > \frac{1}{2}$ και άρα $\sqrt[n]{n!} > \frac{M}{2}$ για κάθε $n \geq N$.

18. (Cesaro-Stolz) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
(α) $b_n < b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $b_n \to +\infty$,
(β) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = a$.
Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(a - \epsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (a + \epsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

για κάθε $n \geq n_0$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει οτι

$$(a - \epsilon)(b_n - b_{n_0}) < a_n - a_{n_0} < (a + \epsilon)(b_n - b_{n_0})$$

για κάθε $n > n_0$.)

Απάντηση: Σύμφωνα με την υπόδειξη για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_{n_0}}{b_n} + (a - \epsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n_0}}{b_n} + (a + \epsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right)$$

για κάθε $n > n_0$. Επιπλέον, επειδή υποθέτουμε οτι $b_n \to +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε το n_0 ώστε $0 < 1 - \frac{b_{n_0}}{b_n} < 1$ και $\left|\frac{a_{n_0} - ab_{n_0}}{b_n}\right| < \epsilon$ για κάθε $n > n_0$. Από αυτά προκύπτει οτι

$$\begin{aligned} -2\epsilon < \frac{a_{n_0} - ab_{n_0}}{b_n} - \epsilon < \frac{a_{n_0} - ab_{n_0}}{b_n} - \epsilon\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - a \\ < \frac{a_{n_0} - ab_{n_0}}{b_n} + \epsilon\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right) < \frac{a_{n_0} - ab_{n_0}}{b_n} + \epsilon < 2\epsilon \end{aligned}$$

για κάθε $n > n_0$.

19. Να αποδειχθεί οτι
(α) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2$.
(β) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$, όπου $k \in \mathbb{N}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 18.)

Απάντηση: (α) Εφαρμόζεται η άσκηση 18, γιατί

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = 2.$$

(β) Πάλι εφαρμόζεται η άσκηση 18, αφού

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n^k}{(n+1)^k}} = \frac{1}{k+1}.$$

20. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$, $b_n > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
(α) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \to +\infty$ και
(β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a$.
Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = a.$$

Απάντηση: Εφαρμόζεται η άσκηση 18 για τις ακολουθίες που έχουν γενικούς όρους $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

21. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{k}}{1+2+\cdots+n} = 1.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 20.)

Απάντηση: Εφαρμόζεται η άσκηση 20, γιατί

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} = 1.$$

22. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$a_{2n} \le a_{2n+2} \le a_{2n+1} \le a_{2n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Να αποδειχθεί οτι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{2n} \le a \le a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση: Από τις υποθέσεις, η υπακολουθία $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τους όρους της υπακολουθίας $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα υπάρχει το $s = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \sup\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Όμοια η υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα υπάρχει το $t = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} = \inf\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς, $a_{2n-1} - a_{2n} \ge s - t \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε σύμφωνα με τις υποθέσεις μας

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) \ge t - s \ge 0.$$

Άρα $s = t$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq s - a_{2n} < \epsilon$ για $n \geq n_1$ και $0 \leq a_{2n-1} - s < \epsilon$ για $n \geq n_2$. Αν λοιπόν $n_0 = \max\{2n_0, 2n_0 - 1\}$, τότε $|a_n - s| < \epsilon$ για $n \geq n_0$.

23. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

Απάντηση: Προφανώς $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $a_1 = 1 < 2$ και $a_2 = 3 > 2$. Επαγωγικά, αν $a_{2n-1} < 2$, τότε $a_{2n} > 1 + \frac{2}{2} = 2$ και αν $a_{2n} > 2$, τότε $a_{2n+1} < 1 + \frac{2}{2} = 2$. Με άλλα λόγια $0 < a_{2n-1} < 2 < a_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όσο αφορά τη μονοτονία των δύο υπακολουθιών έχουμε

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{-(a_{2n-1} - 2)(a_{2n-1} + 1)}{a_{2n-1} + 2} > 0$$

και συνεπώς η υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (γνήσια) αύξουσα. Άρα υπάρχει το $1 < s = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} \leq 2$, για το οποίο $(s-2)(s+1) = 0$, άρα $s = 2$. Όμοια,

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{-(a_{2n} - 2)(a_{2n} + 1)}{a_{2n} + 2} < 0$$

και υπάρχει το $t = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} \geq 2$, για το οποίο $(s-2)(s+1) = 0$, άρα $t = 2 = s$. Από την προηγούμενη άσκηση 22 συμπεραίνουμε οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

24. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ για κάθε m, $n \in \mathbb{N}$. Αν $\inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} > -\infty$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Απάντηση: Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο. Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, υπάρχουν $\epsilon > 0$ και μία υπακολουθία $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$a < a + \epsilon \leq \frac{a_{n_k}}{n_k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου $a = \inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Από την άλλη μεριά, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a \leq \frac{a_m}{m} < a + \epsilon$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $q_k, r_k \in \mathbb{Z}^+$ με $0 \leq r_k < m$ ώστε $n_k = q_k m + r_k$. Επειδή $n_k \to +\infty$, έχουμε και $q_k \to +\infty$, γιατί

$$q_k = \frac{1}{m}(n_k - r_k) > \frac{1}{m}(n_k - m).$$

Για $n_k > m$ έχουμε τώρα από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας για την ακολουθία οτι

$$\frac{a_{n_k}}{n_k} \leq \frac{q_k a_m + a_{r_k}}{q_k m + r_k} \leq \frac{q_k a_m + a_{r_k}}{q_k m} = \frac{a_m}{m} + \frac{1}{q_k m} a_{r_k} \leq \frac{a_m}{m} + \frac{1}{q_k m} \cdot \max\{a_1, ..., a_{m-1}\}.$$

Κατά συνέπεια,

$$0 < a + \epsilon - \frac{a_m}{m} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q_k m} \cdot \max\{a_1, ..., a_{m-1}\} = 0,$$

που είναι αντίφαση.

25. Να υπολογιστούν τα $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ όταν

(α) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$,

(β) $a_n = \dfrac{n^2[(-1)^n + 1] + 2n + 1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση: (α) Για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_{2n-1} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) < -1 < 1 < 1 + \frac{1}{2m} = a_{2m}$$

και $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} = -1$, ενώ $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{2m} = 1$. Συνεπώς, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$ και $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(β) Αν ο n είναι άρτιος, έχουμε

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 1}{n+1},$$

ενώ οταν είναι περιττός

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k-1} = 2$, ενώ $a_{2k} \to +\infty$, όταν $k \to +\infty$. Άρα $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ και $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

26. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n = 1$, όταν ο n είναι περιττός και $a_n = 2^n$, όταν ο n είναι άρτιος. Να υπολογιστούν τα

(α) $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και

(β) $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Απάντηση: (α) Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

Συνεπώς, $\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ και $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.
(β) Από την άλλη μεριά

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ 2, & \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

Άρα $\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ και $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

27. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \le \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Απάντηση: Η απόδειξη είναι γενίκευση της απόδειξης της άσκησης 14. Θα δείξουμε μόνο την τελευταία ανισότητα, αφού οι υπόλοιπες αποδεικνύονται ανάλογα. Θέτουμε $y = \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Αν $y = +\infty$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Έστω λοιπόν οτι $y < +\infty$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n < y + \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &< \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot (y + \epsilon) \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0} - n_0(y + \epsilon)}{n} + y + \epsilon \end{aligned}$$

για κάθε $n \ge n_0$. Αφού όμως υπάρχει $N \ge n_0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n_0} - n_0(y + \epsilon)}{n} < \epsilon$$

για κάθε $n \ge N$, προκύπτει οτι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} < y + 2\epsilon$$

για κάθε $n \ge N$. Αυτό σημαίνει οτι

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \le y + 2\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, από όπου το συμπέρασμα.

28. Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $0 < s < 1$ έτσι ώστε $|a_{n+1} - a_n| \le s^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Απάντηση: Για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε

$$|a_m - a_n| \le \sum k = n^{m-1} |a_{k+1} - a_k| < s^n + \cdots + s^{m-1} = s^n \cdot \frac{1 - s^{m-n}}{1 - s} < \frac{s^n}{1 - s}.$$

Όμως, $\lim_{n\to+\infty} s^n = 0$, επειδή $0 < s < 1$. Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < s^n < (1 - s)\epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Προκύπτει τώρα οτι για $m \ge n \ge n_0$ έχουμε $|a_m - a_n| < \epsilon$. Από το θεώρημα του Cauchy η ακολουθία συγκλίνει.

29. (D'Alembert) Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, να αποδειχθεί ότι το $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ υπάρχει και τα δύο όρια είναι ίσα. Να αποδειχθεί επίσης οτι δεν ισχύει το αντίστροφο.
(Υπόδειξη: Για το αντίστροφο θεωρείστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ και $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

Απάντηση: Θέτουμε $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ και υποθέτουμε οτι $0 < a < +\infty$. Η απόδειξη είναι ανάλογη όταν $a = 0$ ή $+\infty$. Για κάθε $0 < \epsilon < a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς,

$$(a-\epsilon)^{n-n_0-1} < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < (a+\epsilon)^{n-n_0-1}$$

για κάθε $n > n_0$. Από αυτό προκύπτει οτι

$$\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a-\epsilon)^{n_0+1}}} \cdot (a-\epsilon) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a+\epsilon)^{n_0+1}}} \cdot (a+\epsilon)$$

για κάθε $n > n_0$. Όμως,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a-\epsilon)^{n_0+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a+\epsilon)^{n_0+1}}} = 1.$$

Υπάρχει λοιπόν $N > n_0$ ώστε

$$\left| \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a-\epsilon)^{n_0+1}}} - 1 \right| < \epsilon, \quad \left| \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(a+\epsilon)^{n_0+1}}} - 1 \right| < \epsilon$$

για $n \geq N$. Κατά συνέπεια,

$$a - \epsilon(1+a-\epsilon) = (1-\epsilon)(a-\epsilon < \sqrt[n]{a_n} < (1+\epsilon)(a+\epsilon) = a + \epsilon(1+a+\epsilon)$$

για κάθε $n \geq N$. Αυτό δείχνει οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γιατί αν θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ και $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} = 1$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{2}(k+1)}} = 1.$$

Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Όμως,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

και $\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \dfrac{1}{2}$. Συνεπώς, το $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ δεν υπάρχει.

30. Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{4\cdot 7\cdots(3n+1)}} = \frac{1}{3}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 29.)

Απάντηση: Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{4\cdot 7\cdots(3n+1)\cdot(3n+4)}}{\frac{n!}{4\cdot 7\cdots(3n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3n+4} = \frac{1}{3}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την προηγούμενη άσκηση 29.

Κεφάλαιο 4

Σειρές πραγματικών αριθμών

1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{7}{24},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=2.$$

Απάντηση: Έχουμε $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n+2)}$ οπότε

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}.$$

Όμοια

$$\sum_{n=1}^{N}(n+2)(n+4)=\sum_{n=3}^{N+2}n(n+2)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}n(n+2)-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{(N+1)(N+3)}-\frac{1}{(N+2)(N+4)},$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{7}{24}.$$

Τέλος,

$$\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2},$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} - 2\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} - 2\Big(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\Big).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = 2.$$

2. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες.
(α) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{a^{n+1}}x^n = \frac{1}{a-bx}, \quad |x| < \left|\frac{a}{b}\right|, \quad ab \neq 0,$
(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^{n-1} = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}, \quad |x| < 2.$

Απάντηση: (α) Αφού $\left|\dfrac{bx}{a}\right| < 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{a^{n+1}}x^n = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{bx}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{bx}{a}} = \frac{1}{a-bx}.$$

(β) Αφού $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}.$$

3. (Bernoulli) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
(α) Αν $p,\ k \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=p}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+k-1}.$$

(β) Αν $p \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p}\Big).$$

Απάντηση: (α) Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=p}^{N}(a_n - a_{n+k}) = \sum_{n=p}^{N}a_n - \sum_{n=p+k}^{N+k}a_n = a_p + \cdots + a_{p+k-1} - (a_{N+1} + \cdots + a_{N+k}),$$

οπότε

$$\sum_{n=p}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=p}^{N}(a_n - a_{n+k}) = a_p + \cdots + a_{p+k-1},$$

αφού $\lim\limits_{N\to+\infty} a_{N+1} = \cdots = \lim\limits_{N\to+\infty} a_{N+k} = 0$.
(β) Παρατηρούμε πρώτα οτι

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right).$$

Εφαρμόζοντας το (α) για το $p+1$ και το $k=2p$, υπολογίζουμε οτι

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n-p+2p}\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p+1-p} + \cdots + \frac{1}{p+1-p+2p-1}\right).$$

4. Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, όταν
(α) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (β) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, (γ) $a_n = \dfrac{3^n}{n^{n/2}}$,
(δ) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, (ε) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, (στ) $a_n = \dfrac{2+\sqrt{n}}{n^2}$.

Απάντηση: (α) Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} - 1$, η σειρά δεν συγκλίνει.
(β) Έχουμε

$$0 < \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ επίσης συγκλίνει.
(γ) Γιά κάθε ακέραιο $n \geq 16$ έχουμε $0 < \dfrac{3^n}{n^{n/2}} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Αφού η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^{n/2}}$ συγκλίνει.
(δ) Αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \dfrac{1}{2}$ για κάθε $n > n_0$. Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)$ επίσης συγκλίνει.
(ε) Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου συμπεραίνουμε οτι η σειρά συγκλίνει.
(στ) Επειδή $\dfrac{2+\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^{3/2}}$ και οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνουν, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\sqrt{n}}{n^2}$ συγκλίνει.

5. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^a}$ συγκλίνει για κάθε $a > \frac{1}{2}$.

Απάντηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 < \frac{\sqrt{a_n}}{n^a} = \sqrt{\frac{a_n}{n^{2a}}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Όταν $a > \frac{1}{2}$, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a}}$ συγκλίνει. Κατά συνέπεια η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n^{2a}}\right)$ συγκλίνει, οπότε και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^a}$.

6. (Pringsheim) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\liminf\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
(β) Αν επιπλέον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Απάντηση: (α) Επειδή $na_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει μια υπακολουθία $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k a_{n_k} = 0$. Αφού η σειρά συγκλίνει,

$$\lim_{k\to+\infty} (a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}) = 0.$$

Υπάρχει $2^k < n_k \leq 2^{k+1}$ ώστε $a_{n_k} = \min\{a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}}\}$ και

$$0 < 2^k a_{n_k} \leq a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}.$$

Άρα $\lim\limits_{k\to+\infty} 2^k a_{n_k} = 0$. Αφού όμως $0 < n_k a_{n_k} \leq 2 \cdot 2^k a_{n_k}$, προκύπτει οτι $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k a_{n_k} = 0$.
(β) Όταν η ακολουθία είναι φθίνουσα, έχουμε $a_{2k} = \min\{a_{k+1}, ..., a_{2k}\}$, οπότε

$$0 < ka_{2k} \leq a_{k+1} + \cdots + a_{2k}.$$

Κατά συνέπεια

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} 2ka_{2k} \leq \lim_{k\to+\infty} 2(a_{k+1} + \cdots + a_{2k}) = 0.$$

Επιπλέον,

$$0 < (2k+1)a_{2k+1} \leq \frac{2k+1}{2k} \cdot 2ka_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)2ka_{2k},$$

από όπου προκύπτει οτι $\lim_{k\to+\infty}(2k+1)a_{2k+1}=0$. Από αυτά συμπεραίνουμε οτι $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$. Τέλος, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} na_n - \sum_{n=1}^{N}(n+1)a_{n+1} + \sum_{n=1}^{n} a_{n+1} = a_1 + \sum_{n=2}^{N+1} a_n - (N+1)a_{N+1},$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N+1} a_n - (N+1)a_{N+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

7. Έστω οτι $a_1 = 1$ και $a_n = \dfrac{1}{n\cdot m}$, όταν $2^m \le n < 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$ μονότονα, αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Απάντηση: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $\dfrac{1}{m_0} < \epsilon$, οπότε για $n \ge 2^{m_0}$ έχουμε

$$0 < na_n \le \frac{1}{m_0} < \epsilon.$$

Αυτό δείχνει οτι $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$. Από την άλλη μεριά, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και η

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m m} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$$

αποκλίνει. Συνεπώς, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

8. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^2}$ συγκλίνει.

Απάντηση: Η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων είναι γνήσια αύξουσα αποκλίνει προς το $+\infty$ από τις υποθέσεις μας. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \ge 2$ έχουμε

$$\frac{a_n}{s_n^2} < \frac{a_n}{s_{n-1}s_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1}s_n} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{s_n^2} < \frac{a_1}{s_1^2} + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{s_N} < \frac{2}{a_1}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N \geq 2$. Αυτό σημαίνει οτι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

9. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Υπόδειξη: Αν s_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{s_n}{n} - \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n(n+1)}.)$$

Απάντηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, έχουμε

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{s_1 + 2(s_2 - s_1) + 3(s_3 - s_2) \cdots + n(s_n - s_{n-1})}{n(n+1)}$$

$$= -\frac{s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{ns_n}{n(n+1)} = -\frac{s_1 + \cdots + s_{n-1} + s_n}{n(n+1)} + \frac{(n+1)s_n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{s_n}{n} - \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n(n+1)}.$$

Υπολογίζουμε τώρα οτι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - s_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} - s_2 \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n+1)} - \cdots - s_N \sum_{n=N}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{k=1}^{N} s_k \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{k=1}^{N} s_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{N+1} = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{s_1 + \cdots + s_N}{N}.$$

Σύμφωνα με την άσκηση 14 του 3ου φύλλου, προκύπτει οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{N}{N+1} \cdot \frac{s_1 + \cdots + s_N}{N} = 1 \cdot \lim_{N\to+\infty} s_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

10. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$, $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(α) Αν η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
(β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0,$$

να αποδειχθεί οτι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$ συγκλίνει.
(Υπόδειξη: Για το (γ) θεωρείστε τη βοηθητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$.)

Απάντηση: (α) Από τις υποθέσεις μας υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $0 < b_n < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$0 < \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα.
(β) Θέτουμε $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, οπότε $0 < \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$, δηλαδή η ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά φθίνουσα και φραγμένη. Εφαρμόζοντας το (α) συμπεραίνουμε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n$ συγκλίνει.
(γ) Αν $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4} < 1$. Από την άλλη μεριά,

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει. Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$ συγκλίνει. Αν τώρα

$$b_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}},$$

υπολογίζουμε οτι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+4} \cdot \frac{(n+2)\sqrt{2n+3}}{(n+1)\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3}}{2(n+1)} < 1$$

και εφαρμόζουμε το (β).

11. Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και αν συγκλίνει απολύτως, όταν
(α) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$, (β) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$
(γ) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$, (δ) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n+a}$, $a \geq 0$.

Απάντηση: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Dirichlet. Αν $b_n = \frac{n-1}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (τελικά) φθίνουσα, γιατί

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)(2-n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

για $n > 2$ και προφανώς $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Συνεπώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$ συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, γιατί για κάθε $n > 1$ έχουμε

$$\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \geq \frac{\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ αποκλίνει.

(β) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο 0 και συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

(γ) Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου βλέπουμε οτι η σειρά συγκλίνει απολύτως, γιατί

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

(δ) Από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+a}$ συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a}$ αποκλίνει.

12. Να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} = (1-2^{1-p})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

για κάθε $p > 1$.

Απάντηση: Επειδή $p > 1$, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ συγκλίνουν, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}(-2)\frac{1}{(2n)^p} = -2^{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

13. Να αποδειχθεί οτι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει τότε

$$\frac{a_1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_{n+1}-a_n}{2}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

Απάντηση: Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ με $N>2$ έχουμε

$$\frac{a_1}{2}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{a_{n+1}-a_n}{2}=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$$

$$=\frac{a_1}{2}+\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n+\frac{1}{2}(-1)^{N+1}a_{N+1}-\frac{a_1}{2}=\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n+\frac{1}{2}(-1)^{N+1}a_{N+1}.$$

Αφού υποθέτουμε οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει, έχουμε όμως $\lim_{N\to+\infty}(-1)^{N+1}a_{N+1}=0$. Κατά συνέπεια,

$$\frac{a_1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_{n+1}-a_n}{2}=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n+\frac{1}{2}(-1)^{N+1}a_{N+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

14. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ συγκλίνουν.

(α) Να αποδειχθεί οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Να αποδειχθεί οτι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_na_{n+1}|}\quad\text{και}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_na_{n+1}|}{|a_n|+|a_{n+1}|}$$

συγκλίνουν.

Απάντηση: (α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$|a_nb_n|\leq\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ συγκλίνει. Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ συγκλίνει.

(β) Από την άσκηση 17 του 1ου φύλλου (ανισότητες αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου) έχουμε

$$\frac{1}{2}(|a_n|+|a_{n+1}|)\geq\sqrt{|a_na_{n+1}|}\geq\frac{2}{\frac{1}{|a_n|}+\frac{1}{|a_{n+1}|}}=\frac{2|a_na_{n+1}|}{|a_n|+|a_{n+1}|},$$

από όπου το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως.

15. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε να αποδειχθεί οτι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό $p>0$.

Απάντηση: Το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως από το κριτήριο του Abel, αφού η ακολουθία $\displaystyle\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και φραγμένη.

16. Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$.

Απάντηση: Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας την άσκηση 29 του 3ου φύλλου συμπεραίνουμε οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με e.

17. Να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Mertens.)

Απάντηση: Η γεωμετρική σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει για $|x|<1$ και

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Mertens, αν $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$, συμπεραίνουμε οτι

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

18. Έστω οτι $a_0=1$, $a_n=2$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και

$$b_n = \frac{1}{5}\left((-1)^n\cdot 8 - \frac{3}{4^n}\right)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

(α) Να υπολογιστούν οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

(β) Ποιά είναι η ακτίνα σύγκλισης του γινομένου Cauchy των δύο δυναμοσειρών;

Απάντηση: (α) Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{5}\left((-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n}\right)\right|} = 1$, και οι δύο δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης ίση με 1.

(β) Το γινόμενο Cauchy των δύο δυναμοσειρών είναι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, όπου $c_n = \sum_{n=0}^{n} a_k b_{n-k}$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Υπολογίζουμε τώρα οτι

$$c_n = b_n + 2\sum_{k=1} b_{n-k} = \frac{1}{5}\left((-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5}\left((-1)^{n-k} \cdot 8 - \frac{3}{4^{n-k}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[(-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n} + 16\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} - 2\left(4 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)\right].$$

Αν ο n είναι άρτιος, τότε

$$c_n = \frac{1}{5}\left[0 - \frac{3}{4^n} + 0 + \frac{2}{4^{n-1}}\right] = \frac{1}{4^n},$$

ενώ αν ο n είναι περιττός, πάλι τότε

$$c_n = \frac{1}{5}\left[-16 - \frac{3}{4^n} + 16 + \frac{2}{4^{n-1}}\right] = \frac{1}{4^n}.$$

Συνεπώς, το γινόμενο Cauchy των δύο δυναμοσειρών είναι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^n$, που έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με 4.

19. Έστω $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ένα προς ένα και επί απεικόνιση με

$$\phi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{όταν } n = 3k-2, \\ 4k-1, & \text{όταν } n = 3k-1, \\ 2k, & \text{όταν } n = 3k. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι αν $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ δεν συγκλίνει.

Απάντηση: Από το κριτήριο του Leibniz προκύπτει άμεσα οτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως. Από την άλλη μεριά,

$$\sum_{n=1}^{3N} a_{\phi(n)} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4N-3}}+\frac{1}{\sqrt{4N-1}}-\frac{1}{\sqrt{2N}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right).$$

Όμως,

$$\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}} > \frac{1}{\sqrt{4k}}+\frac{1}{\sqrt{4k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Συνεπώς, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ δεν συγκλίνει, αφού η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει.

Κεφάλαιο 5

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν.
(α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, $n,\,m\in\mathbb{N}$, (β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{1/3}-1}{x}$,
(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/[x]}$, (δ) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

Απάντηση: (α) Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+\cdots+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+\cdots+x+1}{x^{m-1}+\cdots+x+1}=\frac{n}{m}.$$

(β) Επειδή

$$\frac{(x+1)^{1/3}-1}{x}=\frac{x+1-1}{x[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1]}=\frac{1}{(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1},$$

προκύπτει οτι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{1/3}-1}{x}=\dfrac{1}{3}$.
(γ) Αφού $[x]\le x<[x]+1$ και $x\to+\infty$, τελικά $x>1$ και

$$[x]^{1/[x]}\le x^{1/[x]}<([x]+1)^{1/[x]}.$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, προκύπτει οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/[x]}=1$.
(δ) Επειδή

$$0\le\left|1-x\left[\frac{1}{x}\right]\right|<|x|$$

για κάθε $x\neq 0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

2. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{όταν } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x, & \text{όταν } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι $\lim_{x\to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}$, αλλά το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει όταν $a \in [0,1]$ και $a \neq \frac{1}{2}$.

Απάντηση: Για κάθε $0 \leq x \leq 1$ έχουμε $|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}|$ και συνεπώς $\lim_{x\to 1/2} |f(x) - \frac{1}{2}| = 0$. Από την άλλη μεριά, αν $a \neq \frac{1}{2}$ και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες με $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = a$ και $s_n \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $t_n \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, ενώ $s_n \neq a$, $t_n \neq a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim_{n\to+\infty} f(t_n) = a$, αλλά $\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = 1 - a$. Αφού $a \neq 1 - a$, το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει.

3. (Cauchy) Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ για κάθε x, $y \in X$ με $0 < |x - a| < \delta$ και $0 < |y - a| < \delta$.

Απάντηση: Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο, αφού το a είναι σημείο συσσώρευσης του X, υπάρχει μία (όχι μοναδική ενδεχομένως) ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του X που συγκλίνει στο a με $x_n \neq a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία των τιμών $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, από την υπόθεσή μας. Συνεπώς, υπάρχει το $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$, από το θεώρημα του Cauchy. Αρκεί να δείξουμε οτι $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε τέτοιο ώστε $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ για κάθε x, $y \in X$ με $0 < |x-a| < \delta$ και $0 < |y-a| < \delta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |x_n - a| < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$, οπότε $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ για κάθε n, $m \geq n_0$. Κατά συνέπεια, $|f(x_n)-\ell| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - a| < \delta$ έχουμε τώρα $|f(x) - f(x_{n_0})| < \epsilon$, οπότε

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f(x_{n_0})| + |f(x_{n_0}) - \ell| < 2\epsilon.$$

Αυτό δείχνει οτι $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

4. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική περιόδου $T > 0$, αν $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι κάθε περιοδική συνάρτηση για την οποία το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Απάντηση: Θέτουμε $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Αφού $L \in \mathbb{R}$ και η f είναι περιοδική με περίοδο T, αρκεί να δείξουμε οτι η f είναι σταθερή στο διάστημα $[0,T)$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - L| < \epsilon$ για κάθε $x \geq M$. Αν $0 \leq x < T$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x + nT \geq M$. Συνεπώς,

$$|f(x) - L| = |f(x + nT) - L| < \epsilon.$$

Αφού $|f(x) - L| < \epsilon$ για κάθε $0 \leq x < T$ και $\epsilon > 0$, συμπεραίνουμε οτι $f(x) = L$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ ένα μη-κενό σύνολο και $f_E : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ η συνάρτηση με

$$f_E(x) = \inf\{|x - y| : y \in E\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $f_E(x) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x \in \overline{E}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $|f_E(x_1) - f_E(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η f_E είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_E(x) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in E$ ώστε $|x - y| < \epsilon$ ή ισοδύναμα $E \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \varnothing$ για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $x \in \overline{E}$.
(β) Για κάθε $y \in E$ έχουμε $f_E(x_1) \leq |x_1 - y| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - y|$ και κατά συνέπεια $f_E(x_1) \leq |x_1 - x_2| + f_E(x_2)$. Συμμετρικά, $f_E(x_2) \leq |x_2 - x_1| + f_E(x_1)$.

6. Έστω A, $B \subset \mathbb{R}$ δύο μη-κενά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)},$$

όπου οι συναρτήσεις f_A, f_B ορίζονται όπως στην προηγούμενη άσκηση 5. Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής και $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.

Απάντηση: Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη, αφού $f_A(x) + f_B(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την προηγούμενη άσκηση 5, γιατί τα σύνολα A, B είναι μη-κενά, κλειστά και ξένα μεταξύ τους. Η f είναι προφανώς συνεχής πάλι από την προηγούμενη άσκηση 5. Επιπλέον, $f(x) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $f_A(x) = 0$ ή ισοδύναμα $x \in \overline{A} = A$, αφού το A υποτίθεται κλειστό. Όμοια $f(x) = 1$ τότε και μόνο τότε όταν $f_B(x) = 0$ ή ισοδύναμα $x \in \overline{B} = B$, αφού και το B υποτίθεται κλειστό.

7. Έστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sup f([a, x])$ είναι συνεχής, αύξουσα και $g \geq f$.

Απάντηση: Η συνάρτηση g είναι προφανώς αύξουσα και $g(x) \geq f(x)$ για κάθε $a \leq x \leq b$. Για τη συνέχεια της g, έστω $x \in [a, b]$ και $\epsilon > 0$. Επειδή η f υποτίθεται συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} < f(y) < f(x) + \frac{\epsilon}{2}$$

όταν $y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$. Αν $x - \delta < y \leq x$, τότε για κάθε $s \in [a, y]$ έχουμε προφανώς $f(s) \leq g(y)$, ενώ για $s \in [y, x]$ έχουμε

$$|f(s) - f(y)| \leq |f(s) - f(x)| + |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

οπότε $f(s) < f(y) + \epsilon \leq g(y) + \epsilon$. Αυτό δείχνει οτι $0 \leq g(x) - g(y) \leq \epsilon$ όταν $y \in [a, b]$ και $x - \delta < y \leq x$. Από την άλλη μεριά, όταν $x \leq y < x + \delta$, τότε $f(t) \leq g(x)$ για κάθε $t \in [a, x]$, ενώ για $t \in [x, y]$ έχουμε $|f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε $f(t) < f(x) + \frac{\epsilon}{2} \leq g(x) + \epsilon$. Αυτό δείχνει οτι $0 \leq g(y) - g(x) \leq \epsilon$ όταν $x \leq y < x + \delta$. Έτσι σε κάθε περίπτωση $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$ όταν $y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, που έχει την ιδιότητα

$$f(x + y) \leq f(x)f(y)$$

για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 1$ και ειδικά υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(h) - 1| < \frac{1}{2}$, οπότε $f(h) > \frac{1}{2}$ για κάθε $|h| < \delta$. Από την υπόθεσή μας έχουμε τώρα $f(x+h) \leq f(x)f(h)$, καθώς και $f(x) \leq f(x+h)f(-h)$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $|h| < \delta$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{f(-h)} \leq f(x+h) \leq f(x)f(h).$$

Αφού $\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} f(-h) = 1$, προκύπτει οτι $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, που σημαίνει οτι η f είναι συνεχής στο x.

9. Έστω f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αν υπάρχει ένα πυκνό σύνολο $D \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(d) = g(d)$ για κάθε $d \in D$, να αποδειχθεί οτι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Επειδή το σύνολο D υποτίθεται πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $(d_n)_{n\in\mathbb{R}}$ σημείων του D που συγκλίνει στο x. Από τη συνέχεια τώρα των f, g και την υπόθεσή μας έχουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(d_n) = \lim_{n\to+\infty} g(d_n) = g(x)$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε τα σύνολα $f^{-1}(-\infty, r)$ και $f^{-1}(r, +\infty)$ είναι ανοιχτά για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Για κάθε r, $s \in \mathbb{Q}$ με $r < s$ το σύνολο

$$f^{-1}(r,s) = f^{-1}((-\infty, s) \cap (r, +\infty)) = f^{-1}(-\infty, s) \cap f^{-1}(r, +\infty)$$

είναι ανοιχτό ώς τομή δύο ανοιχτών συνόλων, από την υπόθεσή μας. Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχουν r, $s \in \mathbb{Q}$ τέτοιοι ώστε

$$f(x) - \epsilon < r < f(x) < s < f(x) + \epsilon.$$

Επειδή το σύνολο $f^{-1}(r, s)$ είναι ανοιχτό και περιέχει το x, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(r, s)$. Αυτό σημαίνει οτι αν $|x - y| < \delta$ τότε

$$f(x) - \epsilon < r < f(y) < s < f(x) + \epsilon.$$

11. Να αποδειχθεί οτι οι τύποι

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ορίζουν καλά δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Από το κριτήριο του λόγου προκύπτει αμέσως οτι η ακτίνα σύγκλισης και των δύο δυναμοσειρών είναι $+\infty$ και συνεπώς έχουμε δύο συναρτήσεις $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι η $\cos$ είναι συνεχής. Η απόδειξη για την $\sin$ είναι ανάλογη. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \cos y - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|y|^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(|x|+1)^{2n}}{(2n)!} < \frac{\epsilon}{3}$$

για κάθε $|y| \leq |x| + 1$. Υπάρχει επίσης $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|x^{2n} - y^{2n}|}{(2n)!} < \frac{\epsilon}{3}$$

όταν $|x - y| < \delta$. Προκύπτει λοιπόν οτι

$$|\cos x - \cos y| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{|x^{2n} - y^{2n}|}{(2n)!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|y|^{2n}}{(2n)!} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

όταν $|x - y| < \delta$.

Για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε τώρα οτι

$$\cos x \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (-1)^{n-k} \frac{x^{2k} y^{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k}$$

και

$$\begin{aligned} -\sin x \sin y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (-1)^{n-k} \frac{x^{2k+1} y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!(2n-2k+1)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^{2k+1} y^{2m-2k-1}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας προκύπτει οτι

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k-1} \right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{l=0}^{2n} \binom{2n}{l} x^l y^{2n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+y)^{2n} = \cos(x+y).$$

12. Να αποδειχθεί οτι για κάθε a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $a < \xi < b$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-a} + \frac{\xi^4+1}{\xi-b} = 0.$$

Απάντηση: Αρκεί να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής για τη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (x-b)(x^2+1) + (x-a)(x^4+1).$$

Έχουμε $f(a) = (a-b)(a^2+1) < 0 < (b-a)(b^4+1) = f(b)$, οπότε υπάρχει $a < \xi < b$ με $f(\xi) = 0$.

13. Να αποδειχθεί οτι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$, για την οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Έχουμε $g(0) = f(0) \geq 0$ και $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Αν $g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$, αρκεί να πάρουμε $\xi = 0$ ή 1, αντίστοιχα. Ειδάλως έχουμε $g(1) < 0 < g(0)$ και από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $0 < \xi < 1$ ώστε $g(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $f(\xi) = \xi$.

14. Έστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $[a,b] \subset f([a,b])$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $a \leq \xi \leq b$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει $a \leq \xi \leq b$ ώστε $g(\xi) = 0$. Από την υπόθεση, υπάρχουν c, $d \in [a,b]$ ώστε $a = f(c)$ και $b = f(d)$. Συνεπώς, $g(c) = a - c \leq 0$ και $g(d) = b - d \geq 0$. Αν $g(c) = 0$ ή $g(d) = 0$, τότε $\xi = c$ ή d, αντίστοιχα. Αλλιώς, $g(c) < 0$ και $g(d) > 0$, οπότε $c \neq d$ και από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει κάποιο ξ μεταξύ των c και d ώστε $g(\xi) = 0$.

15. Έστω $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και x_1, x_2,..., $x_n \in (a,b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Απάντηση: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι

$$f(x_1) = \min\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}, \quad f(x_n) = \max\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}$$

αλλάζοντας, αν χρειάζεται, την αρίθμηση των x_1, x_2,..., x_n. Αν $f(x_1) = f(x_n)$, αρκεί να πάρουμε $\xi = x_1$ (ή οποιοδήποτε απο τα x_2,..., x_n). Έστω λοιπόν οτι $f(x_1) < f(x_n)$, οπότε $x_1 \neq x_n$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x)) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) - nf(x).$$

Τότε $g(x_1) > 0 > g(x_n)$ και από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει ξ μεταξύ των x_1 και x_n, άρα $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

16. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $0 \leq \xi \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) = f(\xi).$$

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

Αν υπάρχει ακέραιος $0 \leq k < n$ τέτοιος ώστε $g(\dfrac{k}{n}) = 0$, αρκεί να πάρουμε $\xi = \dfrac{k}{n}$. Έστω λοιπόν οτι $g(\dfrac{k}{n}) \neq 0$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k < n$. Υποθέτουμε οτι $g(0) > 0$ (όταν $g(0) < 0$ η απόδειξη είναι ανάλογη). Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, αν δεν υπάρχει $0 \leq \xi \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ τέτοιο ώστε $f\left(\xi + \dfrac{1}{n}\right) = f(\xi)$, τότε πρέπει επιπλέον $g(x) > 0$ για κάθε $0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n}$. Συνεπώς,

$$0 = f(1) - f(0) = g(0) + g(\frac{1}{n}) + \cdots + g(1 - \frac{1}{n}) > 0,$$

που είναι αντίφαση.

17. Έστω A, $B \subset \mathbb{R}$ δύο μη-κενά, ξένα μεταξύ τους, συμπαγή σύνολα. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε

$$|a - b| = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}.$$

Απάντηση: Επειδή το σύνολο B υποτίθεται συμπαγές, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $f_A(b) \leq f_A(y)$ για κάθε $y \in B$, όπου f_A είναι η συνεχής συνάρτηση της άσκησης 5. Με άλλα λόγια $\inf\{|b - x| : x \in A\} \leq \{|y - x| : x \in A, y \in B\}$. Όμως, επειδή η συνάρτηση $g(x) = |b - x|$ είναι συνεχής και το σύνολο A υποτίθεται συμπαγές, υπάρχει $a \in A$ ώστε $|b - a| = g(a) \leq g(x) = |b - x|$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή

$$|b - a| = \inf\{|b - x| : x \in A\} \leq \{|y - x| : x \in A, y \in B\}.$$

18. Να ευρεθεί το είδος των ασυνεχειών της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όταν
(α) $f(x) = [x]$, (β) $f(x) = x - [x]$.

Απάντηση: (α) Η f είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του $\mathbb{Z}$ και $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = k$, ενώ $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = k - 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η f έχει μόνο απλές ασυνέχειες.

(β) Η f είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του $\mathbb{Z}$. Σε αυτή την περίπτωση $\lim_{x\to k^+} f(x) = 1$, ενώ $\lim_{x\to k^-} f(x) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η f έχει απλές ασυνέχειες.

19. Έστω $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των σημείων του διαστήματος (a, b) στα οποία η f έχει απλή ασυνέχεια είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Απάντηση: Έστω E το σύνολο των σημείων του (a, b) στα οποία η f έχει απλή ασυνέχεια. Τότε $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, όπου

$$E_1 = \{x \in E : f(x-) = f(x+) < f(x)\},$$

$$E_2 = \{x \in E : f(x-) = f(x+) > f(x)\},$$

$$E_3 = \{x \in E : f(x-) < f(x+)\},$$

$$E_4 = \{x \in E : f(x-) > f(x+)\}.$$

Για κάθε $x \in E_1$ επιλέγουμε $(p(x), q(x), r(x)) \in \mathbb{Q}^3$ ώστε $f(x-) < p(x) < f(x)$ και $q(x) < x < r(x)$ τέτοια ώστε $f(t) < p(x)$ για κάθε $q(x) < t < r(x)$ με $t \neq x$. Η απεικόνιση $F_1 : E_1 \to \mathbb{Q}^3$ με $F_1(x) = (p(x), q(x), r(x))$ είναι ένα προς ένα, γιατί αν x, $y \in E_1$ και $x < y$, ενώ $F_1(x) = F_1(y)$, τότε $f(y) < p(x) < f(y)$, που είναι αντίφαση. Επίσης, για κάθε $x \in E_3$ επιλέγουμε $(p(x), q(x), r(x)) \in \mathbb{Q}^3$ ώστε $f(x-) < p(x) < f(x+)$ και $q(x) < x < r(x)$ τέτοια ώστε $f(q(x), x) \subset (-\infty, p(x))$ και $f(x, r(x)) \subset (p(x), +\infty)$. Η $F_3 : E_3 \to \mathbb{Q}^3$ με $F_3(x) = (p(x), q(x), r(x))$ είναι ένα προς ένα, γιατί x, $y \in E_1$ και $y < x$, ενώ $F_3(x) = F_3(y)$, τότε υπάρχει $y < z < x$ και $p(x) < f(z) < p(x)$, που είναι αντίφαση. Ανάλογα ορίζονται ένα προς ένα απεικονίσεις $F_i : E_i \to \mathbb{Q}^3$ για $i = 2, 4$. Αφού τα σύνολα E_1, E_2, E_3, E_4 είναι το πολύ αριθμήσιμα, το E είναι το πολύ αριθμήσιμο.

20. Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Η f λέγεται κάτω ημισυνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$. Αν το X είναι συμπαγές σύνολο και η f είναι κάτω ημισυνεχής σε κάθε σημείο του X, να αποδειχθεί οτι η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο X, δηλαδή υπάρχει $a \in X$ ώστε $f(a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Heine-Borel.)

Απάντηση: Πρώτα παρατηρούμε οτι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}(-\infty, t]$ είναι κλειστό. Πράγματι, αν $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ είναι μία ακολουθία σημείων του $f^{-1}(-\infty, t]$ που συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in X$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) - \epsilon < f(y)$ για κάθε $y \in X$ με $|x - y| < \delta$, λόγω της κάτω ημισυνέχειας. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x| < \delta$ και συνεπώς $f(x) - \epsilon < f(x_n) \leq t$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f(x) < t + \epsilon$ για κάθε ϵ, που σημαίνει οτι $f(x) \leq t$, δηλαδή $x \in f^{-1}(-\infty, t]$.

Για κάθε $t > \inf f(X) \in \overline{\mathbb{R}}$ τώρα το σύνολο $F_t = f^{-1}(-\infty, t]$ είναι κλειστό και δεν είναι κενό. Επίσης, αν t_1,..., $t_n > \inf f(X)$, τότε $F_{t_1} \cap \cdots \cap F_{t_n} \neq \varnothing$. Αφού το X υποτίθεται συμπαγές, πρέπει

$$\bigcap_{t>\inf f(X)} F_t \neq \varnothing.$$

Όμως $a \in \bigcap_{t > \inf f(X)} F_t$ τότε και μόνο τότε όταν $f(a) \leq t$ για κάθε $t > \inf f(X)$, που σημαίνει οτι $f(a) \leq \inf f(X)$, οπότε $f(a) = \inf f(X)$. Άρα το $f(X)$ είναι κάτω φραγμένο σύνολο και υπάρχει $a \in X$ ώστε $f(a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$.

21. Να εξεταστεί ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$.
(α) $f(x) = e^x$, (β) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, (γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Απάντηση: (α) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$, ως περιορισμός συνεχούς συνάρτησης στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.
(β) Επειδή $\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$, η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και συνεπώς είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.
(γ) Η $f(x) = e^{1/x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$, γιατί

$$\left| f\left(\frac{1}{\log n}\right) - f\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right) \right| = 1$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, ενώ

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right| = 0.$$

22. Να εξεταστεί ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο σύνολο $[0, +\infty)$.
(α) $f(x) = \sqrt{x}$, (β) $f(x) = e^x$.
(Υπόδειξη: Για το (α) δείξτε πρώτα οτι $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$, όταν $x > y \geq 0$.)

Απάντηση: (α) Αν $x > y \geq 0$, τότε $\sqrt{xy} > y$, οπότε $x + y - 2\sqrt{xy} < x - y$ ή ισοδύναμα $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x - y$. Άρα $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|}$ για κάθε x, $y \geq 0$. Κατά συνέπεια, η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(β) Η $f(x) = e^x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, γιατί

$$\lim_{n \to +\infty} |\log(n+1) - \log n| = \lim_{n \to +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

αλλά $|f(\log(n+1)) - f(\log n)| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

23. Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$, και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι τα όρια $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 3 του παρόντος φύλλου.)

Απάντηση: Έστω $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ για κάθε x, $y \in (a,b)$ με $|x - y| < \delta$. Αν λοιπόν $0 < x - a < \dfrac{\delta}{2}$ και $0 < y - a < \dfrac{\delta}{2}$, τότε $|x - y| \leq |x - a| + |a - y| < \delta$ και κατά συνέπεια έχουμε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Όπως στην άσκηση 3 του παρόντος φύλλου προκύπτει από αυτό οτι το όριο $\lim_{x \to a^+} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Όμοια υπάρχει το $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

24. Έστω οτι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απάντηση: Θέτουμε $t = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $s = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - s| < \frac{\epsilon}{4}$ για $x \geq M$ και $|f(x) - t| < \frac{\epsilon}{4}$ για $x \leq -M$. Αν λοιπόν $x,\, y \in [M, +\infty)$ ή $x,\, y \in (-\infty, -M]$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Επιπλέον, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$ και συνεπώς υπάρχει $0 < \delta < M$ ώστε $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x,\, y \in [-M, M]$ με $|x - y| < \delta$. Τέλος, αν $-M \leq y \leq M \leq x$ και $|x - y| < \delta$, τότε έχουμε και $0 \leq M - y < \delta$, οπότε από τα προηγούμενα

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Όμοια, αν $x \leq -M \leq y \leq M$ και $|x - y| < \delta$, τότε πάλι έχουμε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Αυτά δείχνουν οτι για κάθε $x,\, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y) < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

25. Να αποδειχθεί οτι $e^x > 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Απάντηση: Αν $x \geq 0$ ή $x \leq -1$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν οτι $-1 < x < 0$. Έχουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n!}.$$

Αν $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{|x|^k}{k!}$, τότε

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{|x|}{2n+2} - 1\right) < 0,$$

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{|x|}{2n+1}\right) > 0,$$

$$s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} > 0.$$

Δηλαδή, $s_{2n-1} < s_{2n+1} < e^x < s_{2n+2} < s_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικά για $n = 1$ προκύπτει οτι $1 + x = s_1 < e^x$.

26. (α) Να αποδειχθεί οτι $1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$ για κάθε $x > 0$, $x \neq 1$.
(β) Να αποδειχθεί οτι

$$\log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \log\frac{n}{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(γ) Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{qn} \frac{1}{k} = \log q.$$

(δ) Να αποδειχθεί οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

Απάντηση: (α) Από την προηγούμενη άσκηση 25 προκύπτει αμέσως λογαριθμίζοντας την ανισότητα $e^{x-1} > x$ οτι $x - 1 > \log x$ για κάθε $x > 0$, $x \neq 1$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό για το $\frac{1}{x}$ το συμπέρασμα προκύπτει.
(β) Εφαρμόζοντας το (α) έχουμε

$$\log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} = 1 - \frac{n-1}{n} < \log \frac{n}{n-1}.$$

(γ) Από το (β) προκύπτει οτι

$$\log \frac{qn+1}{n} = \sum_{k=n}^{qn} \log \frac{k+1}{k} < \sum_{k=n}^{qn} \frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{qn} \log \frac{k}{k-1} = \log \frac{qn}{n-1}.$$

Αφού $\lim_{n\to+\infty} \log \frac{qn+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log \frac{qn}{n-1} = \log q$, το συμπέρασμα προκύπτει.
(δ) Από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ συγκλίνει (αλλά όχι απολύτως) και

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) = \log 2.$$

27. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες για κάθε $a > 0$.
(α) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$, (β) $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$.
Απάντηση: (α) Αν θέσουμε $y = a^x$ για $x \neq 0$, δηλαδή $x \log a = \log y$ για $x \neq 0$, $y \neq 0$, έχουμε

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y-1}{\log y} \cdot \log a.$$

Επειδή $1 - \frac{1}{y} \leq \log y \leq y - 1$, οπότε $\frac{1}{y} \leq \frac{\log y}{y-1} \leq 1$ για $y \neq 1$, συμπεραίνουμε οτι

$$\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1,$$

από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα.
(β) Επειδή $n(\sqrt[n]{a}-1)=\dfrac{a^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}$, η ισότητα προκύπτει άμεσα από το (α).

28. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$, ενώ αν $x_n\to+\infty$, να αποδειχθεί οτι $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\to+\infty$.

Απάντηση: Από την ανισότητα του Bernoulli για $x_n\to+\infty$ έχουμε

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{x_n}{n} = 1+x_n\to+\infty.$$

Για την πρώτη ισότητα, αφού $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_n-x|<1$ και συνεπώς $|x_n|<1+|x|$ για κάθε $n\geq n_0$. Εκτιμούμε τώρα οτι

$$\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = |x_n-x|\cdot\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n-1-k}\left(1+\frac{x}{n}\right)^k\right|$$

$$\leq |x_n-x|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{|x_n|}{n}\right)^{n-1-k}\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^k \leq |x_n-x|\left(1+\frac{|x|+1}{n}\right)^{n-1} < |x_n-x|e^{|x|+1}$$

για κάθε $n\geq n_0$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = 0,$$

από όπου προκύπτει αμέσως οτι

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Κεφάλαιο 6

Διαφορίσιμες συναρτήσεις

1. Είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x = 0, \\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{όταν } x \neq 0 \end{cases}$$

διαφορίσιμη στο 0;

Απάντηση: Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1,$$

οπότε η f δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι σταθερή.

Απάντηση: Αρκεί να δείξουμε οτι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq \frac{|h|^2}{|h|} = |h|$$

για κάθε $h \neq 0$ και συνεπώς $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Έστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο (a,b) τέτοια ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει $a < \xi < b$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την $g \cdot f$, όπου g είναι κατάλληλη συνάρτηση που εξαρτάται από το λ.)

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = e^{-\lambda x} f(x)$. Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a,b), ενώ $h(a) = h(b) = 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $a < \xi < b$ ώστε

$$0 = h'(\xi) = e^{-\lambda\xi} f'(\xi) - \lambda e^{-\lambda\xi} f(\xi)$$

και συνεπώς $f'(\xi) - \lambda f(\xi) = 0$.

4. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $0 \leq |t| < \dfrac{1}{M}$ η συνάρτηση $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_t(x) = x + tg(x)$ είναι γνήσια αύξουσα.

Απάντηση: Αφού $0 \leq |t| < \dfrac{1}{M}$, έχουμε $1 - Mt > 0$. Η συνάρτηση f_t είναι διαφορίσιμη και $f_t'(x) = 1 + tg'(x) \geq 1 - Mt > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f_t είναι γνήσια αύξουσα.

5. Έστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f,\, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες στο (a, b). Αν $f(a) \leq g(a)$ και $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $a < x < b$, να αποδειχθεί οτι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $a \leq x \leq b$.

Απάντηση: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη διαφορίσιμη συνάρτηση $h = g - f$ στο διάστημα $[a, x]$, όπου $a < x < b$. Υπάρχει λοιπόν $a < \xi < x$ ώστε

$$h(x) - h(a) = h'(\xi)(x - a) = (g'(\xi) - f'(\xi))(x - a) > 0.$$

Κατά συνέπεια $g(x) - f(x) > g(a) - f(a) \geq 0$ για κάθε $a < x < b$ και λόγω της συνέχειας $g(x) - f(x) \geq 0$ για κάθε $a \leq x \leq b$.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$, η συνάρτηση $f : (|a|, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^x$$

είναι γνήσια αύξουσα και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-a}$.

Απάντηση: Η f είναι προφανώς διαφορίσιμη στο $(|a|, +\infty)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > |a|$. Επιπλέον,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\log f)'(x) = \log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x - a}$$

για κάθε $x > |a|$. Όμως,

$$\log\left(1 - \frac{a}{x}\right) > 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} = \frac{-a}{x - a}.$$

Από αυτά προκύπτει οτι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > |a|$, που σημαίνει οτι η f είναι γνήσια αύξουσα. Από αυτό συμπεραίνουμε οτι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

7. Για κάθε $x > 0$ να αποδειχθεί οτι

$$\frac{2x}{x + 2} < \log(1 + x) < \frac{x}{\sqrt{1 + x}}.$$

Απάντηση: Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f,\, g : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}},$$

$$g(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{x+2}.$$

Προφανώς $f(0) = g(0) = 0$. Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{1}{(1+x)^{3/2}}(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}).$$

Επειδή $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$, η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς,

$$\log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}} = f(x) < f(0) = 0$$

για κάθε $x > 0$. Η g έχει παράγωγο συνάρτηση

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)(x+2)^2} > 0$$

για $x > 0$. Συνεπώς, η g είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε

$$\log(1+x) - \frac{2x}{x+2} = g(x) > g(0) = 0.$$

8. Έστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to [a,b]$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $a < x < b$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Απάντηση: Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $a \leq \xi \leq b$ με $f(\xi) = \xi$. Για τη μοναδικότητα, αν υπάρχουν $\xi_1,\, \xi_2 \in [a,b]$ με $f(\xi_1) = \xi_1$ και $f(\xi_2) = \xi_2$, όπου $\xi_1 < \xi_2$, τότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει οτι

$$0 < |\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq M|\xi_1 - \xi_2| < |\xi_1 - \xi_2|,$$

που είναι αντίφαση.

9. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $0 < x < 1$, να αποδειχθεί οτι η ακολουθία $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής και την υπόθεσή μας προκύπτει οτι

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{m}\right)\right| < \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$. Από αυτό συμπεραίνουμε οτι η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω $a > 0$ και $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο $(0, a)$. Αν $f(0) = 0$ και η $f' : (0, a) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $g : (0, a] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

είναι αύξουσα.

Απάντηση: Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής και τις υποθέσεις μας, για κάθε $0 < x \leq a$ υπάρχει $0 < \xi < x$ ώστε $f(x) = f'(\xi)x \leq f'(x)x$, οπότε

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0.$$

Άρα η g είναι αύξουσα.

11. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Να αποδειχθεί οτι το $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση: Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο διάστημα (a, b) που να συγκλίνει στο b. Από την υπόθεσή μας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n < y_n < b$ ώστε $f(y_n) > f(x_n) + n$ και από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει $x_n < \xi_n < y_n$ ώστε $f(y_n) - f(x_n) = f'(\xi_n)(y_n - x_n)$, οπότε

$$f'(\xi_n) > \frac{n}{y_n - x_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$, από αυτό προκύπτει οτι $f'(\xi_n) \to +\infty$. Όμως, $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = b$. Συνεπώς, το $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

12. Έστω $a > 0$ και $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Αν το $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι κατ΄ ανάγκη $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n < \xi_n < n+1$ ώστε $f(n+1)-f(n) = f'(\xi_n)$. Επειδή υποθέτουμε οτι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει (και είναι ίσο με 1), αναγκαστικά $\lim_{n\to+\infty}(f(n + 1) - f(n)) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = 0$ και προφανώς $\xi_n \to +\infty$. Αφού υποθέτουμε οτι το $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ υπάρχει, αναγκαστικά πρέπει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = 0$.

13. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη στο $(a, +\infty)$. Αν $\inf\{f'(x) : x > a\} > 0$, να αποδειχθεί οτι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Απάντηση: Αν $M = \inf\{f'(x) : x > a\}$, για κάθε $x > a$ υπάρχει $a < \xi < x$ ώστε

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) \geq M(x - a)$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Αφού $f(x) \geq M(x-a)+f(a)$ για κάθε $x > a$ και $M > 0$, προκύπτει αμέσως οτι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

14. Έστω $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $a < c < b$ και το $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c)$.

Απάντηση: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία οποιαδήποτε ακολουθία στο διάστημα (a,b) που να συγκλίνει στο c από αριστερά, δηλαδή $a < x_n < c < b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχουν $x_n < \xi_n < c$ ώστε

$$f'(\xi_n) = \frac{f(c)-f(x_n)}{c-x_n}.$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = f'(c)$. Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = c$ και υποθέτουμε οτι το $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ υπάρχει, πρέπει αναγκαστικά $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = f'(c)$.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ το σύνολο $E_r = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = r\}$ είναι κλειστό, να αποδειχθεί οτι η f είναι C^1.

Απάντηση: Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας οτι η f' δεν ε-ίναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$ και $x_n < y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\liminf\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) < \limsup\limits_{n\to+\infty} f'(y_n)$. Υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $r \neq f'(x)$ ώστε $\liminf\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) < r < \limsup\limits_{n\to+\infty} f'(y_n)$, οπότε $x \in \mathbb{R} \setminus E_r$. Αν $r < f'(x)$, υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $f'(x_{n_k}) < r < f'(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $x_{n_k} \neq x$ $k \in \mathbb{N}$. Από την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους (Darboux), υπάρχει κάποιο ξ_k μεταξύ των x_{n_k} και x τέτοιο ώστε $f'(\xi_k) = r$. Επειδή $\lim\limits_{k\to+\infty} \xi_k = x$, συμπεραίνουμε οτι $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap E_r \neq \varnothing$ για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα το $\mathbb{R} \setminus E_r$ δεν είναι ανοιχτό σύνολο ή ισοδύναμα το E_r δεν είναι κλειστό σύνολο, σε αντίθεση με την υπόθεση. Ανάλογα ισχύουν όταν $f'(x) < r$.

16. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.
(α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2}$, (β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$,
(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$, (δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\log(1+\sqrt{1+x^2}) - \log x]$,
(ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k \log\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$, όπου $k \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας σε όλες τις περιπτώσεις το κανόνα του L'Hospital κατάλληλα, προκύπτει οτι
(α)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-x}{2(1+x+x^2)} = 1.$$

(β)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3} = \frac{1}{24}.$$

(γ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\sqrt{1+x^2}}{x(1+e^x)}=1.$$

(δ)

$$\lim_{x\to+\infty}x[\log(1+\sqrt{1+x^2})-\log x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

(ε)

$$\lim_{x\to+\infty}x^k\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^k}{k(x+a)}=\begin{cases}0, & \text{όταν } 0<k<1,\\ a/k, & \text{όταν } k=1,\\ +\infty, & \text{όταν } k>1,\end{cases}$$

ενώ προφανώς $\lim_{x\to+\infty}x^k\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=0$, όταν $k\le 0$.

17. Αν $a>0$ και $n\in\mathbb{N}$ να αποδειχθεί οτι $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^n}=+\infty$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα του L'Hospital βρίσκουμε οτι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^ne^{ax}}{n!}=+\infty.$$

18. Αν $f,\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις με $f(x)=3x^4-2x^3-x^2+1$ και $g(x)=4x^3-3x^2-2x$, να αποδειχθεί οτι

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}\neq\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

για κάθε $0<\xi<1$. Πώς εξηγείται αυτό;

Απάντηση: Επειδή $f(1)=f(0)$ και $g(1)-g(0)=-1$, έχουμε

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=0.$$

Όμως υπάρχει (μοναδικό) $0<\zeta<1$ με $g'(\zeta)=2(6\zeta^2-3\zeta-1)=0$ και

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{x(12x^2-6x-2)}{12x^2-6x-2}=x$$

για κάθε $0<x<1$ με $x\neq\zeta$. Η ύπαρξη του σημείου ζ είναι η αιτία που εξηγεί το συμπέρασμα.

19. Έστω $A\subset\mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $x\in A$ και η $f''(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

Απάντηση: Από τις υποθέσεις μας εφαρμόζεται ο κανόνας του L'Hospital και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\Big(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}\Big)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\Big(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\Big)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)=f''(x).$$

20. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, για την οποία υπάρχει $M>0$ ώστε $|f''(x)|\le M$ για κάθε $x>0$. Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

Απάντηση: Σύμφωνα με το Θεώρημα του Taylor για κάθε x, $h>0$ υπάρχει κάποιο $0<t<1$ ώστε

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x+th)\frac{h^2}{2}.$$

Έστω $\epsilon>0$. Επειδή υποθέτουμε οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, υπάρχει $x_0>0$ έτσι ώστε $|f(x)|<\dfrac{\epsilon}{2M}$ για κάθε $x>x_0$. Συνεπώς,

$$|f'(x)|=\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f''(x+th)\frac{h}{2}\right|$$

$$\le\frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h}+|f''(x+th)|\frac{h}{2}<\frac{\epsilon}{Mh}+\frac{Mh}{2}$$

για κάθε $x>x_0$ και κάθε $h>0$. Επιλέγοντας τώρα κατάλληλο h, π.χ. $h=\dfrac{\sqrt{\epsilon}}{M}$, προκύπτει οτι $|f'(x)|<\dfrac{3}{2}\sqrt{\epsilon}$ για κάθε $x>x_0$. Αυτό δείχνει οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

21. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{όταν } x\le 0,\\ e^{-1/x}, & \text{όταν } x>0\end{cases}$$

είναι C^∞. Συνεπώς, για κάθε a, $b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x-a)\cdot f(b-x)$ είναι C^∞ τέτοια ώστε $g(x)\ne 0$ ακριβώς τότε όταν $a<x<b$. (Υπόδειξη: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει μία πολυωνυμική συνάρτηση P_n βαθμού $2n$ τέτοια ώστε $f^{(n)}(x)=P_n\Big(\dfrac{1}{x}\Big)f(x)$ για κάθε $x>0$.)

Απάντηση: Για $x>0$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x}$, ενώ

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{xe^{1/x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0,$$

οπότε $f'(0) = 0$. Επαγωγικά, έστω οτι υπάρχει μία πολυωνυμική συνάρτηση P_n βαθμού $2n$ τέτοια ώστε $f^{(n)}(x) = P_n\Big(\dfrac{1}{x}\Big)f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f^{(n)}(0) = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) + e^{-1/x}P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big[P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) - P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big]f(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x > 0$ και η συνάρτηση $P_{n+1}(t) = t^2[P_n(t) - P_n'(t)]$ είναι πολυωνυμική βαθμού $2n+2$. Τέλος,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x} = \lim_{t\to+\infty}\frac{tP_n(t)}{e^t} = 0.$$

22. Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ μία C^n συνάρτηση και $c \in I$. Αν υπάρχουν μία πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού το πολύ n και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x-c|^{n+1}$$

για κάθε $x \in I$, να αποδειχθεί οτι

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

για κάθε $x \in I$.

Απάντηση: Προφανώς $f(c) = P(c)$. Υπάρχουν a_0, a_1,..., $a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)^k$, οπότε $a_0 = P(c) = f(c)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Taylor για κάθε $x \in I$, $x \neq c$, υπάρχει $\xi_x \in I$ μεταξύ των c και x ώστε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-c)^n.$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει οτι

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{f^{(k)}(c)}{k!} - a_k\Big)\frac{1}{(x-c)^{n-k+1}} + \Big(\frac{f^{(k)}(\xi_x)}{n!} - a_n\Big)\frac{1}{(x-c)}\right| \leq M$$

για κάθε $x \in I$, $x \neq c$. Επειδή $\lim\limits_{x\to c} f^{(n)}(\xi_x) = f^{(n)}(c)$, αφού υποτίθεται οτι η f είναι C^n, συμπεραίνουμε από αυτό οτι

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} - a_k = 0$$

για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n$.

23. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq 0$, τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι $f = 0$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Θεώρημα του Rolle προκύπτει οτι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq 0$.)

Απάντηση: Προφανώς $f(0) = 0$, επειδή η f είναι συνεχής. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle σε κάθε διάστημα $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε οτι υπάρχει μία γνήσια φθίνουσα ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο 0 ώστε $f'(\xi_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$. Επαγωγικά, αν υπάρχει μία γνήσια φθίνουσα ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο 0 ώστε $f^{(k)}(\xi_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $f^{(k)}(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle σε κάθε διάστημα $[\xi_{n+1}, \xi_n]$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $\xi_{n+1} < \zeta_n < \xi_n$ ώστε $f^{(k+1)}(\zeta_n) = 0$ και η ακολουθία $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα και συγκλίνει στο 0. Συνεπώς, $f^{(k+1)}(0) = 0$. Άρα $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα του Taylor, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει κάποιο θ_n μεταξύ του 0 και του x, δηλαδή $0 < |\theta_n| < |x|$, ώστε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}x^n = 0 + \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}x^n.$$

Από τις υποθέσεις μας προκύπτει ότι

$$|f(x)| \leq M\frac{|x|^n}{n!}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$|f(x)| \leq \inf\{M\frac{|x|^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} M\frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

24. Για κάθε $0 \leq x < 1$ να αποδειχθεί οτι
(α) $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,
(β) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Απάντηση: (α) Υπολογίζουμε οτι

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

(β) Όμοια

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}+1]\frac{x^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

25. (α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $|\theta_n| \leq 2$ έτσι ώστε

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι το όριο

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Ο πραγματικός αριθμός γ λέγεται σταθερά του Euler και είναι άγνωστο αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Απάντηση: (α) Υπολογίζουμε οτι

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)n^k}$$

και

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)n^k}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \frac{n}{n-1} \leq 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)n^k}$$

για $n \geq 2$. Το ίδιο ισχύει και για $n = 1$, αφού

$$\theta_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k+2} = -1 + \log 2,$$

οπότε $-\frac{1}{2} < \theta_1 < 0$.

(β) Από το (α), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως και

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}[\log(k+1) - \log k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\lim_{n\to+\infty}\log\frac{n+1}{n} = 0$, συμπεραίνουμε οτι το όριο

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$.